

# 基于多标度分形理论的金融风险测度指标研究

魏宇, 黄登仕

(西南交通大学经济管理学院, 成都 610031)

**摘要:** 多标度分形(multifractal)理论是一种刻画金融市场波动复杂性特征的有力工具,而金融价格时间序列的多标度分形谱(multifractal spectrum)则是对测度对象复杂性特征的一种具体和全面的描述.以上海证券交易所综合股价指数高频价格时间序列的多标度分形谱计算为例,建立了基于多标度分形谱两个主要参数的市场风险测度指标  $R_f$ ,弥补了传统风险测度指标在非有效市场条件下的不足.通过对上证综指的实证研究验证了这一指标的有效性,并对其在价格波动预测方面的作用进行了初步的探讨和理论解释.

**关键词:** 多标度分形; 风险测度; 风险管理; 可预测性; 复杂性

**中图分类号:** F830      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1007 - 9807(2005)04 - 0050 - 10

## 0 引言

金融市场的健康发展是一个国家经济持续、稳定增长的重要保障之一,正如我们所见到的那样,1997年亚洲金融危机给世界经济带来的巨大阴影至今仍然挥之不去.因此,防范金融风险,保持金融市场的应有活力就是一个具有重要意义的重要研究课题,而开展相应的金融风险管理工作的首要前提则是一个准确、有效的风险测度指标的建立.

目前,学术界和实务界常用方差(variance)或标准差(standard deviation)来作为金融资产风险的风险测度指标<sup>[1]</sup>,必须指出,用方差作为风险测度指标的前提条件是:金融资产的收益率应该服从正态分布,也就是说,金融市场本身要满足“有效市场假说”(EMH)的条件.然而,许多实证研究表明<sup>[2~8]</sup>,金融资产的收益率并不服从正态分布,而是呈现出所谓的“尖峰胖尾”(leptokurtic and fat tailed)形态.同时,收益率的非线性形式(如平方、绝对值等)在很长的时间范围内保持着相当程度的相关性,即收益率波动具有“长程相关性”(long-

ranged correlation)和“持久性”(persistence)特征.20世纪70年代以后,世界金融市场不断出现的种种异常现象对EMH提出了严峻的挑战,因此,用方差(及其变形)作为金融风险测度指标的有效性是值得怀疑的.

1997年,分形理论的创始人Mandelbrot在《科学美国人》(Scientific American)上撰文指出<sup>[9]</sup>,多标度分形理论(multifractal)是一种定量刻画和模拟金融市场各种异常价格波动的有力工具.此后,众多国内外学者运用多标度分形理论对各种不同类型金融市场的波动现象进行了实证研究,取得了许多有价值的研究成果<sup>[7~19]</sup>.其中,文献[8,11~13]还验证了中国股票市场的多标度分形特征.这些有关中国股票市场多标度分形特征的实证研究也从另一角度验证了我国股票市场的非有效性,并为下一步运用多标度分形理论指导我国金融管理工作打下了坚实的基础.另外,文献[8]还首次提出并初步讨论了运用多标度分形理论来指导金融风险管理工作的研究思路.

基于以上认识,本文将尝试在金融风险管理中引入多标度分形理论的观点和方法,并最终建

收稿日期: 2002 - 12 - 25; 修订日期: 2004 - 04 - 20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70171054); 国家杰出青年科学基金资助项目(70229001).

作者简介: 魏宇(1975—),男,四川攀枝花人,博士,讲师.

立一种有别于现有风险管理理论的全新金融风险测度指标. 首先, 我们没有像传统研究方法那样从直接刻画金融资产价格的波动特征入手, 而是通过运用多标度分形理论提供的强大工具, 对金融资产价格波动进行间接描述, 提炼出有关波动的间接统计信息; 其次, 在上面研究的基础上, 建立一种基于多标度分形谱 (multifractal spectrum) 的全新风险测度指标; 最后, 对这种新的风险测度指标的有效性进行初步的验证和讨论.

## 1 多标度分形及多标度分形谱 $f(\cdot)$ 的计算

### 1.1 有关多标度分形 (谱) 的几个定义

对金融市场价格波动的描述方法大致可以分为两类: 一类是直接描述方法, 这也是目前在金融经济学研究中所采用的主要方法, 其中包括 ARCH、GARCH 以及 Lévy-Stable 模型等. 另一类是以多标度分形理论为基础的间接描述方法, 即通过多标度分形特有的模型和方法对金融资产在不同时间标度 (time scale) 上的不同幅度的价格波动情况作出细致分析, 为金融管理工作提供技术支持. 下面, 首先对多标度分形理论中几个常用的概念<sup>[20]</sup>以及它们在金融风险管理中运用的理论基础进行简单的描述.

**定义 1** 考虑  $n$  维欧式空间  $R^n$ , 其一子集  $U$  的直径定义为

$$|U| = \sup\{|x - y|, x, y \in U\} \quad (1)$$

如果  $F \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ , 且对每一个  $i$  都有  $0 < |U_i| < \infty$ , 则称子集族  $\{U_i\}$  (有限或可数) 为另一集合  $F$  的一个  $s$ -覆盖.

**定义 2** 设  $F$  为  $R^n$  中任一子集,  $s$  为一非负实数, 对  $\forall \epsilon > 0$ , 定义以下公式

$$H^s(F) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^m |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{ 为 } F \text{ 的 } s\text{-覆盖} \right\} \quad (2)$$

然后考察所有直径不超过  $\epsilon$  的  $F$  覆盖, 并使这些直径的  $s$  次幂的和达到最小. 当  $\epsilon$  减小时, 式(2)中能覆盖  $F$  的集类是减小的, 所以下确界  $H^s(F)$  随着增加, 且当  $\epsilon \rightarrow 0$ , 趋于某一极限, 记为

$$H^s(F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H^s(F, \epsilon) \quad (3)$$

$\forall F \subset R^n$ ,  $H^s(F)$  存在, 但可以为 0 或  $\infty$ , 则称  $H^s(F)$  为  $F$  的  $s$  维豪斯道夫测度.

**定义 3** 由式(2)可见, 对给定的  $F$  和  $s < 1$ ,  $H^s(F)$  对  $s$  不减, 由式(3)同样有  $H^s(F)$  也不增. 对  $F$  的  $s$ -覆盖  $\{U_i\}$  和  $t > s$ , 易得

$$\sum_{i=1}^m |U_i|^t \leq \sum_{i=1}^m |U_i|^{t-s} \sum_{i=1}^m |U_i|^s \quad (4)$$

令  $\epsilon \rightarrow 0$  并设  $H^s(F)$  为有限值, 则由式(4)得

$$H^t(F) = \begin{cases} 0 & \text{若 } t > s \\ H^s(F) & \text{若 } t = s \\ \infty & \text{若 } t < s \end{cases}$$

即  $H^s(F)$  关于不同的  $s$ , 存在着一个使  $H^s(F)$  从  $\infty$  跳跃到 0 的唯一临界值  $s_0$ , 则该临界值  $s_0$  称为  $F$  的豪斯道夫维数 (Hausdorff Dimension), 记为  $D_H(F)$ . 精确定义如下

$$D_H(F) = \inf\left\{ s \mid H^s(F) = 0 \right\} = \sup\left\{ s \mid H^s(F) = \infty \right\} \quad (5)$$

**定义 4** 设  $F$  是  $n$  维欧式空间  $R^n$  上的一个  $n$  维子集, 将  $F$  划分为测度尺度 (或标度) 为  $\epsilon$  的无重复分形子集合  $\{X_i\}$ , 且每一分形子集的概率测度  $\mu$  与  $\epsilon$  有幂律关系 (Power-law)

$$\mu \sim \epsilon^\mu \quad (6)$$

这里的  $\mu$  被称为 Hölder 指数, 又因为它控制着概率测度的奇异性, 因此也称作奇异性的指数. 同时, 如果每一分形子集有不同的奇异性指数, 则称此集合  $F$  为多标度分形.

**定义 5** 由定义 1~3 可以得到, 当  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 下式表示具有相同概率测度  $\mu_i$  的分形子集合  $\{X_i\}$  的  $q$  维豪斯道夫测度

$$H^q(X_i) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H^q(X_i, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf\left\{ \sum_{i=1}^m |U_j|^q \mid \{U_j\} \text{ 为 } X \text{ 的 } \epsilon\text{-覆盖} \right\} \quad (7)$$

若存在临界指数  $f(q)$ , 使得

$$f(q) = \inf\left\{ q \mid H^q(X_i) = 0 \right\} = \sup\left\{ q \mid H^q(X_i) = \infty \right\} \quad (8)$$

则称  $f(q)$  为多标度分形的奇异谱, 或简记为多标度分形谱 (multifractal spectrum), 它实际就是分形子集合  $\{X_i\}$  的豪斯道夫维数.

多标度分形谱  $f(q)$  和 Hölder 指数  $\mu$  是描述多标度分形对象局部特征的一套基本语言, 也是下面新的风险测度指标建立的重要基础.

有了上面的定义以后, 就可以运用多标度分

形方法对金融资产的时间价格序列进行多标度分形分析,从而计算其多标度分形谱的信息.一般来讲,常用“数盒子”的方法(box-counting)来计算金融资产时间价格序列的多标度分形谱<sup>[18,19]</sup>,即当  $\{U_i\}$  为标度(长度)为  $l$  的“盒子”时,若具有相同概率测度  $\mu_i$  (即相同的 Hölder 指数  $i$ ) 的盒子数为  $N(l)$ , 根据上面的定义并注意到  $f(\cdot)$  为测度对象的豪斯道夫维数,则有

$$N(l) \sim l^{-f(i)} \quad (9)$$

对于规则的多标度分形(如康托集等),可以通过式(6)和(9)求出多标度分形谱  $f(\cdot)$  的解析表达式,但对于金融资产时间价格序列这样的随机多标度分形来讲,只有通过运用所谓的“分割函数”(Partition Function)的方法来计算  $f(\cdot)$ .

### 1.2 多标度分形谱 $f(\cdot)$ 的计算实例

本文研究的数据样本为上海证券交易所综合股份指数(以下简称上证综指)从1999年1月19日到2001年7月6日的每5min高频数据(high frequency data),共28128个记录,记为  $I(t), t=1,2, \dots, N$ . 上海证券交易所每天9:30开盘,到11:30中午休市,然后13:00开盘,到15:00全天收盘,每天共有4h(即240min)连续竞价交易时间.因此,采用每5min记录一个数据的方法每天可以产生48个记录.

首先,考虑用“数盒子”的方法计算每天上证综指的多标度分形谱时,假设整个交易日的时间长度为标准化的1,并注意到盒子长度  $l < 1$ , 则无重复均匀覆盖这48个数据的“盒子长度”分别可以取:  $1/48, 1/24, 1/16, 1/12, 1/8, 1/6, 1/4, 1/3, 1/2$  和1. 举例来说,当取无重复覆盖的盒子长度为  $1/16$  时,就表明可以用16个这样的盒子无重复地覆盖住每天产生的这48个交易数据,其中每个盒子中的数据个数为  $48/16=3$  个.

其次,当盒子尺度为  $l$  时,假设覆盖每天48个数据  $I(t), t=1,2, \dots, 48$ , 需要  $m$  个盒子,且每个盒子内有  $n$  个数据记录,那么定义在第  $i$  个盒子上的概率测度为

$$P_i(l) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n I(i_j) \Big|_{t=1}^{48} I(t), i=1,2, \dots, m \quad (10)$$

其中,  $I(i_j)$  表示第  $i$  个盒子中的第  $j$  个指数. 根据定义4.5以及公式(9)有

$$P_i(l) \sim l^{-f(i)} \quad (11)$$

$$N(l) \sim l^{-f(i)} \quad (12)$$

其中:  $N(l)$  表示具有相同 Hölder 指数的长度为  $l$  的盒子个数. 然后,通过以下的“分割函数”-  $S_q(\cdot)$  来计算多标度分形谱  $f(\cdot)$ .

$$S_q(l) = \sum_{i=1}^m P_i^q(l) \quad (13)$$

研究表明,  $S_q(\cdot)$  同样满足以下形式的幂律分布(Power-law)

$$S_q(l) \sim l^{-\tau(q)} \quad (14)$$

可以看到,当  $q$  取正数时,  $q$  越大,则  $S_q(\cdot)$  将主要反映的是那些具有大的概率测度的盒子的信息;反之,当  $q$  取负数时,  $q$  越小,则  $S_q(\cdot)$  将主要反映的是那些具有小的概率测度的盒子的信息. 在实际计算时,  $q$  的取值范围大小以  $f(\cdot)$  达到饱和值为准<sup>[18]</sup>. 在计算中  $q$  的取值范围为  $[-120, 120]$ .  $\tau(q)$  的值可以通过求取在双对数坐标轴  $\ln S_q(\cdot) - \ln l$  上的直线斜率得出,并且通过 Legendre 变换可以得到<sup>[18,21]</sup>.

$$f(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} (\alpha \tau(\alpha)) \quad (15)$$

$$f(\alpha) = \alpha - \tau(\alpha) \quad (16)$$

运用上面的方法,计算了1999年4月21日和1999年5月19日两天的多标度分形谱,如图1所示. 图1(a),(b)分别表示的是两天当中的上证综指的分时走势情况,图中水平虚线表示当天指数的平均价格(mean price, 当天指数最大值和最小值的平均值),  $T_0$  表示当天股指在平均值上下方运行的分界时间点. 图1(c),(d)分别是两天的上证综指的多标度分形谱,其分布的 Hölder 指数的最大和最小值分布用  $\alpha_{max}$  和  $\alpha_{min}$  表示.

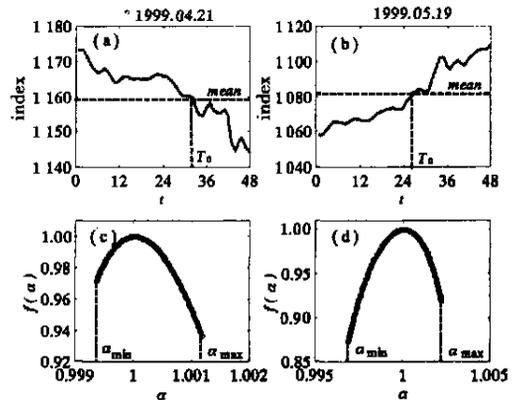


图1 两天当中上证综指的多标度分形谱分布

Fig. 1 Multifractal spectra of SSEC in two days

### 2 新的风险测度指标定义

从图 1 可以看到,不同的价格走势情况,对应着不同形状和大小的多标度分形谱分布.图 1(a)中当天的价格走势在平均价格(图中用水平虚线表示)上方运行的时间大于在平均价格下方运行的时间(因为  $T_0 > 24$ ),表明当天的价格走势表现“较强”,此时对应的多标度分形谱呈现如图 1(c)所示的“左钩”(left hook)形态.与此相反的是图 1(b)中当天的价格走势在平均价格下方运行的时间大于在平均价格上方运行的时间( $T_0 > 24$ ),表明当天的价格走势“较弱”,此时多标度分形谱呈现“右钩”(right hook)形态.另外,除了两个多标度分形谱的形状有所差别,它们的横坐标和纵坐标的分布范围也有较大区别.所以从直观上看,多标度分形谱中确实蕴含着一些有关不同的价格波动情况的间接统计信息.

参照文献 [18, 19] 的方法,定义以下两个指标:多标度分形谱的宽度为  $\Delta f = f(\min) - f(\max)$ ,与此对应的有  $f = f(\min) - f(\max)$ .因为每个指数价格盒子的概率测度  $P_i(\cdot) \sim \dots$ ,且  $< 1$ ,所以  $\max$  和  $\min$  分别代表最小概率测度和最大概率测度盒子的测度值.  $\Delta f$  越大(即多标度分形谱宽度越大)表明当天价格走势分布越不均匀,即当天价格波动的绝对程度越大.同理,因为具有相同概率测度的盒子个数  $N(\cdot) \sim \dots^{-f(\cdot)}$ ,所以  $f(\min)$  和  $f(\max)$  分别指示具有最大概率测度和最小概率测度的盒子个数的多少,并且由于  $N_{\min}(\cdot) / N_{\max}(\cdot) = \dots^{-\Delta f}$ ,所以当  $f > 0$  时,  $N_{\min}(\cdot) / N_{\max}(\cdot) > 1$ ,即具有最大概率测度指数盒子的数量要多于具有最小概率测度指数盒子的数量,即指数在平均价格上方运行的可能性要大于在下方运行的可能性;反之,当  $f < 0$  时,  $N_{\min}(\cdot) / N_{\max}(\cdot) < 1$ ,则表明指数在平均价格下方运行的可能性要大于在上方运行的可能性.这些结论与前面图 1 中直观的结果一致.

基于上面的分析可知,从多标度分形谱得到的  $\Delta f$  指标表示的是一天当中价格波动幅度的绝对大小,因此,  $\Delta f$  可以被认为是一种衡量金融资产价格波动绝对幅度的测度指标.而  $f$  本身却

具有正负号,当  $f > 0$  时,则表明指数在平均值上方运行的时间较长,此时投资者在直觉上认为价格的走势“较强”,且  $f$  越大,价格走势给人的感觉“越强”,反之,则相反.另外,根据 1.1 中的定义 5,  $f(\cdot)$  其实就是测度对象的豪斯道夫维数(Hausdorff dimension),而豪斯道夫维数是衡量对象混乱(复杂)程度的指标.所以,当  $f$  的值越大时,表明一天当中的价格分布越不均匀,即波动行为越混乱(复杂).因此,  $f$  还具有测度价格波动的相对高低趋势和波动方式的作用,它与  $\Delta f$  一道,可以被用来构造新的风险测度指标.图 2(a)是 1999 年 1 月 19 日—2001 年 7 月 6 日的上证综指走势,图 2(b)、(c)、(d) 分别是全部 586 d 当中每天价格波动的方差(variance)、 $\Delta f$  和  $f$ .

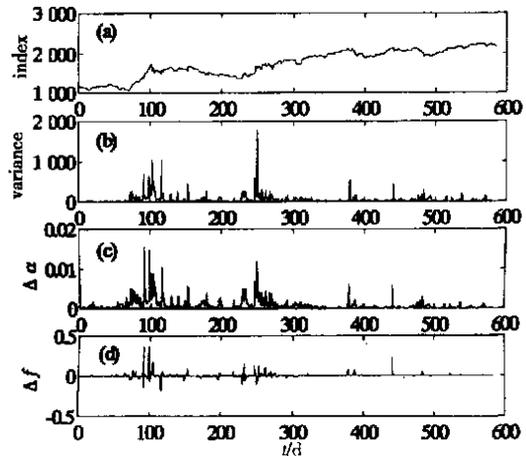


图 2 多标度分形谱指标与方差的比较  
Fig. 2 Comparison between parameters of multifractal spectrum and variance

从图 2 中不难看到,通过多标度分形谱计算出的  $\Delta f$  分布与方差(variance)具有惊人的相似性,同时,当价格发生大幅波动时,  $f$  指标也有相应的“反映”,而且  $f$  还指示了价格波动的相对高低趋势和波动方式.

为了准确刻画金融资产价格波动风险的幅度及方式,有必要系统地考察  $\Delta f$  和  $f$  指标的综合作用.在考虑到  $\Delta f$  所提供信息的基础上,并注意到  $f$  的值非常接近于零,为了综合两者提供的信息,定义如下基于多标度分形谱  $f(\cdot)$  的新的风险测度指标  $R_f(\cdot)$ ,如公式(17)所示

$$R_f(\cdot) = \Delta f \cdot \text{sign}(f(\cdot)) \cdot e^{|f(\cdot)|} \quad (17)$$

其中

$$\text{sign}(f(\Delta t)) = \begin{cases} +1 & \text{当 } f(\Delta t) > 0 \\ 0 & \text{当 } f(\Delta t) = 0 \\ -1 & \text{当 } f(\Delta t) < 0 \end{cases} \quad (18)$$

表示金融资产价格序列的多标度分形谱计算的时间标度(它可以是1h、1d、1周或者其它更长或更短的时间标度,即前面定义的  $\Delta t$  和  $f$  实际应该表示为包含时间参数的形式,如  $f(\Delta t)$  和  $f(\Delta t)$ ). 在上面对上证综指的计算中  $\Delta t = 1d$ , 实际运用中可以根据风险管理的具体要求,按前面的方法计算不同的时间标度  $\Delta t$  上的多标度分形谱,便可得到在不同时间标度  $\Delta t$  上的金融资产头寸的风险测度. 公式(17)也可简单表示为

$$R_f = \text{sign}(f(\Delta t)) e^{|\Delta f|} \quad (19)$$

传统风险测度指标一般仅仅关注价格(收益率)波动的绝对幅度大小,而从上面基于多标度分形谱的风险测度指标  $R_f$  的定义可以直观地看到,  $R_f$  不仅包含了传统风险测度指标中价格波动绝对幅度大小的信息,还综合了价格走势的相对趋势和波动方式的  $f$  的信息,因此基于多标度

分形谱的  $R_f$  指标能够比传统风险测度指标更全面、客观和真实地刻画金融资产价格波动的风险. 下面对这一指标的有效性加以初步的验证.

### 3 基于多标度分形谱的风险测度指标有效性验证

为了验证基于多标度分形谱的风险测度指标  $R_f$  是否能真实准确地描述金融资产头寸的风险,对其有效性进行进一步的讨论. 首先,定义在时间标度  $\Delta t$  上的收益率  $Z(\Delta t)$  为( $\Delta t$  可以是1h、1d、1周或其它更长或更短的时间标度)

$$Z_r(t) = \ln I(t + \Delta t) - \ln I(t) = \ln [I(t + \Delta t) / I(t)] \quad (20)$$

如图3(a)、(b)所示,得到了上证综指从1999年1月20日到2001年7月6日的一共585个每日收益率  $Z(\Delta t = 1d)$  与对应的每日  $a$  和  $f$  的关系.

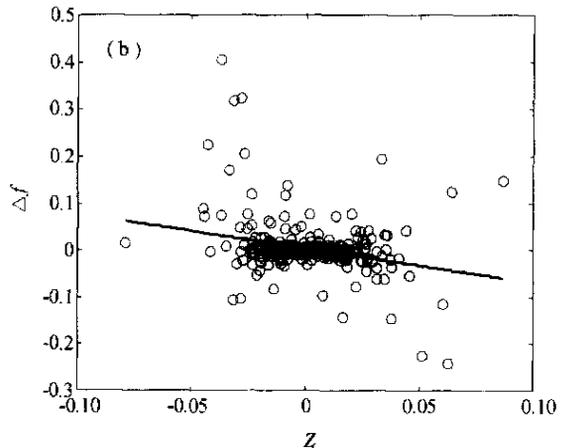
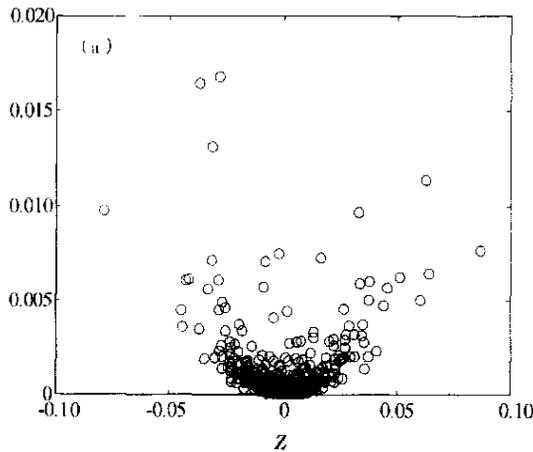


图3 上证综指每日收益率  $Z$  与  $a$  和  $f$  的关系

Fig. 3 Dependence of daily returns of SSEC with  $a$  and  $f$

从总体来看,在图3(a)中,当绝对收益率  $|Z|$  较大时,即价格波动较大时,  $|f|$  的值也较大;同时在图3(b)中,当  $|Z|$  较大时,  $f$  的绝对值也较大,并具有一定的负相关性(这一结果与文献[18, 19]对恒生指数的研究相反),图3(b)中的直线是通过最小二乘法拟合的结果. 根据图3展示的实证结果,并结合前面的结论,计算了新的风险测度指标  $R_f$  的平均值  $AV(R_f)$  与收益率  $Z$  的关系,如图4所示.

图4中柱状图的柱体高度分别表示在收益率

$Z$  所表示的范围之内的  $R_f$  的平均值,最左端和最右端的两个柱体高度分别表示收益率  $Z < -0.05$  和  $Z > 0.05$  的  $R_f$  的平均值. 可以看到,  $R_f$  的平均值基本与收益率  $Z$  负相关,特别是当价格发生正(负)的大幅波动(即收益率为正(负)且较大(小)时),  $R_f$  的值将会有相应的反映,并且,  $R_f$  对价格的大幅下跌的灵敏度要高于其对价格大幅上涨的灵敏度. 而价格的大幅波动正是在金融风险管理工作中所要重点关注的对象,因此,风险测度指标

$R_f$  确实可以测度收益率  $Z$  的大小和符号, 即测度价格波动的幅度大小以及波动的方向。

但是, 必须指出的是, 上面通过多标度分形理论和实证方法分析得出的有关价格波动的间接统计信息是非常粗糙的, 这些信息还无法满足精确程度要求更高的风险管理工作的需要。因此, 有必要在前面分析的基础上, 从多标度分形分析得出的统计信息中进一步提炼出更具价值的、精确程度更高的风险管理信息。

基于以上考虑, 通过进一步观察  $R_f$  与  $Z$  在同一坐标平面上分布, 如图 5 所示, 可以发现在 4 个不同的象限中,  $R_f$  与  $Z$  的相关关系是有很大的区别的, 图中直线分别是对 4 个象限数据的拟合结果。

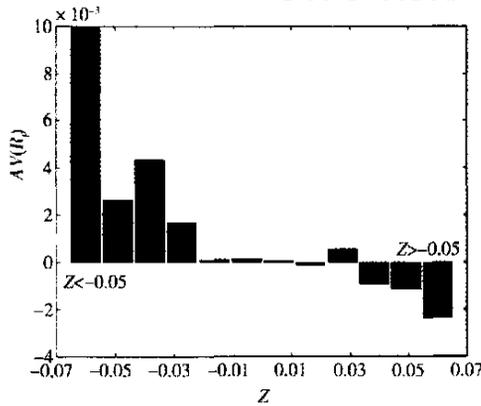


图 4 新的风险测度指标  $R_f$  的平均值  $AV(R_f)$  与收益率  $Z$  的关系  
Fig. 4 Average of the new risk measurement  $R_f$   
 $AV(R_f)$  varying with daily returns  $Z$

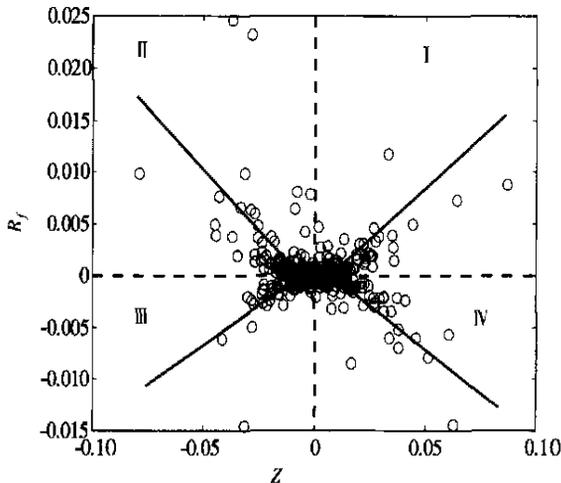


图 5 上证综指收益率  $Z$  与  $R_f$  的四象限关系图  
Fig. 5 Distribution of  $R_f$  and daily returns  $Z$  of SSEC

需要特别指出的是, 各个不同象限中的  $(Z, R_f)$  点对所蕴含的经济含义是完全不同的。比方说, 第 I 象限的点  $(Z > 0, R_f > 0)$  表示当天收盘价格较上一交易日上涨, 且价格在当日平均价格上方运行的时间比在平均价格下方运行的时间要长; 而第 III 象限的点  $(Z < 0, R_f < 0)$  则表示当天收盘价格较上一交易日下跌, 且价格在当日平均价格上方运行的时间比在平均价格下方运行的时间要短。因此, 落在不同象限的点对投资者下一步交易发出的“信号”是不尽相同的, 投资者对落在不同象限的点的进一步反应也就会出现偏差。这也就是说, 落在不同象限中的  $(Z, R_f)$  点对中包含着可以对金融资产价格下一步变化进行预测的有用信息。结合文献 [19] 中运用  $f$  对恒生指数价格变动进行的预测研究, 分别针对 4 个不同象限中  $(Z, R_f)$  点提供的信息, 对上证综指的价格波动行为进行了以下的预测研究。

首先, 定义获利概率  $G\%$  为

$$G\% = \frac{Z_+ \times n_+ \times 100}{Z_+ \times n_+ + |Z_- \times n_-|} \quad (21)$$

其次, 定义上涨概率  $N\%$  为

$$N\% = \frac{n_+ \times 100}{T} \quad (22)$$

公式 (21) 中,  $Z_+$  表示满足当日 (第  $i$  日) 风险测度指标  $R_f$  和收益率  $Z$  在一定取值范围内的所有交易日中, 其第 2 天 (第  $i+1$  日) 收益率  $Z > 0$  的所有交易日的收益率的平均值 (即第  $i+1$  日价格上涨的交易日内收益率的平均值);  $n_+$  表示相同条件下, 第  $i+1$  日收益率  $Z > 0$  的交易日的总天数 (即第  $i+1$  日价格上涨的交易日总数), 可以看出,  $Z_+ \times n_+$  实际表示满足前述条件的交易日的累计收益率增幅。  $Z_-$ 、 $n_-$  表示的意义正好相反。式 (22) 中,  $n_+$  的含义同上,  $T$  表示  $R_f$  和  $Z$  在一定取值范围内的所有交易日的总天数。可以看到, 上涨概率  $N\%$  其实就是证券投资技术分析中经常用到的心理线指标 (psychological line,  $PSY(T)$ )。图 6(a) ~ (d) 图分别是运用图 5 中 (1) ~ (4) 象限的  $(Z, R_f)$  点对对上证综指第 2 天价格变化进行预测的实证结果。

图 6 中的点表示当日  $R_f$  大于 (或小于) 横坐标  $R_f$ , 且收益率绝对值  $|Z|$  大于某一定值时, 第 2 日的获利概率  $G\%$  和上涨概率  $N\%$ 。举例来说,

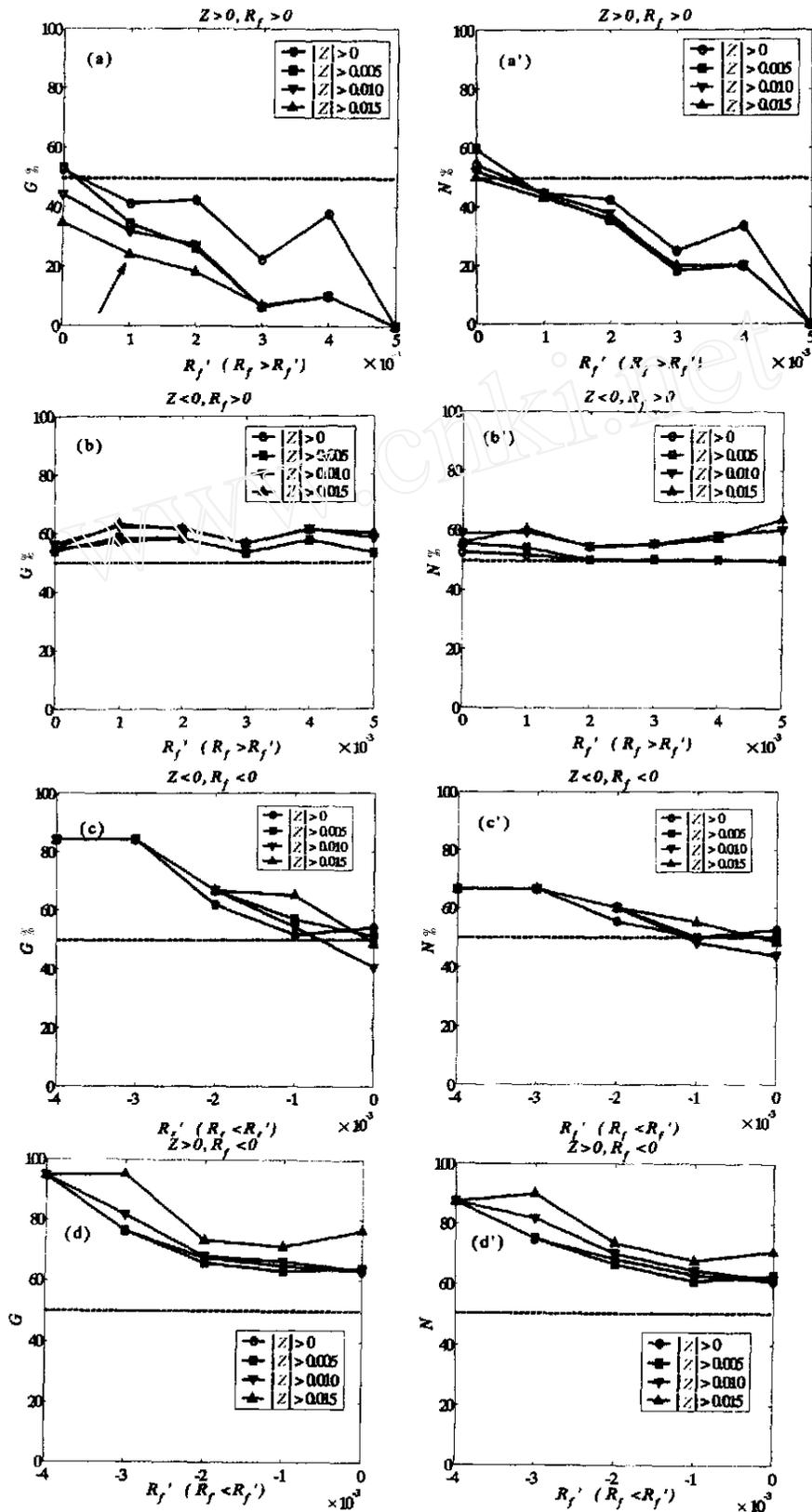


图6 运用  $R_f$  进行价格波动预测结果图

Fig. 6 Empirical results of prediction of price fluctuations based on  $R_f$

图6(a)中用箭头指出的小三角形表示的含义是满足当日  $R_f > 0.001$ , 且  $|Z| > 0.015$  的所有交易日的第2天的获利概率  $G\%$  的值大约为25%左右。

从图6展示的实证结果中,可以看到:1)除了极少数情况外,获利概率  $G\%$  和上涨概率  $N\%$  的值都偏离50%,也就是说预测的精确程度高于50%。其中,对有些特定范围点的预测精度可以高达80%左右。2)当日  $R_f$  的绝对值越大,预测的精确程度越高。3)当日收益率的绝对值  $|Z|$  越大,预测的精确程度越高。另外,需要补充的是,图6(a)和(a)对第象限的点的某些预测获利概率  $G\%$  和上涨概率  $N\%$  的值达到零,并不说明在对应条件下价格一定下跌,出现零值可能是因为本数据样本较大的原因。

综上所述,  $R_f$  除了具有测度风险的作用,还有对价格变化进行预测的作用,且价格波动越剧烈(即当日收益率的绝对值  $|Z|$  越大),其预测的精确程度就越高。 $R_f$  的这一优良特性为其在金融风险中的进一步运用打下了良好的基础。

那么,为什么  $(Z, R_f)$  会具有预测价格变化的作用呢?下面是结合证券投资技术分析(technical analysis)理论给出的初步解释:

**第象限**  $Z > 0, R_f > 0$ , 直观表示今日价格较昨日上涨,同时价格在平均值上方运行时间较长。这种情况给短线投资者(因为考虑的时间标度为1d)的感觉是价格在相对高位振荡过久,“超买”信号明显,短线将有获利回吐风险,价格无法持续走高,即出现技术分析中称为“顶背离”现象,引起投资者抛售资产,导致第2日价格下跌,如图6(a)和(a)所示。

**第象限**  $Z < 0, R_f > 0$ , 直观表示今日价格较昨日下跌,但是价格在平均值上方运行时间较长。这种情况给投资者的感觉是虽然价格回落,走势较低迷,但价格在相对高位运行时间较长,又给人以价格走势较强的印象,两者的综合作用使得其对投资者发出的信号不明显,所以第2天价格上涨和下跌的机会比较平均,反映在图6(b)和(b)上的表现就是获利概率  $G\%$  和上涨概率  $N\%$  在非常接近50%的上方小幅波动。

**第象限**  $Z < 0, R_f < 0$ , 直观表示今日价格较昨日下跌,同时价格在平均值下方运行时间较长。这种情况给投资者的感觉是价格下跌,并且价格

在相对低位运行过久,属于“超卖”信号明显,出现技术分析中的“底背离”现象,短线将有反弹获利的机会,因此投资者增加购买资产,导致第2日价格上涨,如图6(c)和(c)所示。

**第象限**  $Z > 0, R_f < 0$ , 直观表示今日价格较昨日上涨,且价格在平均值下方运行时间较长。这种情况给投资者的感觉是虽然价格在相对低位运行时间较长,但价格却被拉升,这正是一波上涨行情启动的明显信号,所以投资者会增加投资,导致第2天价格上涨,如图6(d)和(d)所示。

## 4 结束语

目前经常使用的金融风险测度指标大致可以分为两种类型,即风险的相对测度指标和绝对测度指标。相对测度指标主要是测量市场因素的变化与金融资产收益变化之间的关系。例如针对债券等利率性金融产品的久期和凸性指标,针对股票的 Beta 值,针对金融衍生产品的 Delta、Theta、Gamma、Vega 和 RHO 指标等。而金融风险的绝对测度指标主要包括前面提到的方差(variance)以及目前主流的 VaR 指标。但无论是相对测度还是绝对测度指标在理论上或实际运用中都遇到了这样或那样的困难。举例来说,风险的相对测度只是一个相对的比例概念,并没有回答某一资产或组合的风险(损失)到底有多大。另外,相对测度指标对测度对象的依赖性较高,它们无法测度包含不同市场因子或不同类型金融产品组合的风险,因此也就无法比较不同资产的风险大小。而对于绝对测度指标而言,很多研究已经证明,当实际市场不满足有效市场假说的前提条件时,方差和 VaR 指标的准确度都将大大降低。

在前一阶段的研究中<sup>[8]</sup>,首次提出了运用多标度分形理论进行金融风险管理的思路。在此基础上,建立了基于多标度分形谱的全新风险测度指标  $R_f$ ,并对其有效性进行了检验。这一新的指标从大的分类来讲,应该属于对风险的绝对测度,但是它相对于传统的方差或 VaR 指标的优越性在于,它的建立完全没有依靠任何有关市场有效性的假设前提,即没有对金融资产收益率的分布有任何理论上的假设条件,因此该指标可以弥补传统风险测度指标在非有效市场条件下的

不足.

其次,这一新的风险测度指标  $R_f$  对价格的波动还具有很好的预测作用,且价格波动越大,预测的准确程度越高.  $R_f$  的这一特性为其在风险管理中的进一步运用打下了良好的基础,这也是下一步研究的方向所在.

最后,结合证券投资技术分析理论,对  $R_f$  的

这种预测功能作出了初步的解释.

虽然目前许多国内外学者都开展了金融市场的多标度分形研究,取得了许多有价值的研究成果,但是如何充分运用多标度分形分析所提供的信息来指导金融学研究和金融风险管理工作,仍然是摆在我们面前的一个重大课题,本文在这一领域进行了一些有益的探索.

## 参 考 文 献:

- [1] Mark Robinstein. Markowitz's "portfolio selection": A fifty-year retrospective[J]. *Journal of Finance*, 2002, (3): 1041—1045.
- [2] Lux T, Marchesi M. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market[J]. *Nature*, 1999, 397: 498—502.
- [3] Farmer J D, Lo A W. Frontiers of finance: Evolution and efficient markets[A]. In: Proc. Natl. Acad. Sci. [C]. USA: 1999. 9991—9998.
- [4] Matacz A. Financial Modeling and Option Theory with the Truncated Lévy Process[R]. cond-mat/9710197, available at <http://xxx.lanl.gov>, 1997.
- [5] Mantegna R, Stanley H E. Scaling behavior in the dynamics of an economic index[J]. *Nature*, 1995, 376: 46—51.
- [6] Bonanno G, Lillo F, Mantegna R N. Levels of complexity in financial markets[J]. *Physica A*, 2001, 299: 16—27.
- [7] 魏 宇, 黄登仕. 经济物理学研究评述[J]. *经济学动态*, 2002, (7): 74—78.  
Wei Yu, Huang Deng shi. Comments on Econophysics[J]. *Economics Information*, 2002, (7): 74—78. (in Chinese)
- [8] 魏 宇, 黄登仕. 金融市场多标度分形现象及与风险管理的关系[J]. *管理科学学报*, 2003, 6(1): 87—91.  
Wei Yu, Huang Deng shi. Multifractal phenomenon and financial risk management[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2003, 6(1): 87—91. (in Chinese)
- [9] Mandelbrot B B. A multifractal walk down Wall Street[J]. *Scientific American*, 1999, 298: 70—73.
- [10] 黄登仕. 金融市场的标度理论[J]. *管理科学学报*, 2000, 3(2): 27—33.  
Huang Deng shi. Scaling theories in financial markets[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2000, 3(2): 27—33. (in Chinese)
- [11] 何建敏, 常 松. 中国股票市场多重分形游走及其预测[J]. *中国管理科学*, 2002, (3): 11—17.  
He Jian-ming, Chang Song. Chinese stock market's multifractal walk and forecasting[J]. *Chinese Management Science*, 2002, (3): 11—17. (in Chinese)
- [12] 张永东, 毕香秋. 中国股票市场多标度行为的实证分析[J]. *预测*, 2002, (4): 56—59.  
Zhang Yong-dong, Bi Xiang-qiu. Empirical analysis of multiscale behavior of Chinese stock market[J]. *Forecast*, 2002, (4): 56—59. (in Chinese)
- [13] 朱 林, 常 松, 何建敏. 我国股票市场多仿射特性研究[J]. *管理工程学报*, 2002, (3): 86—89.  
Zhu Lin, Chang Song, He Jian-min. Multi-affine property study of our country stock market[J]. *Journal of Management Engineering in China*, 2002, (3): 86—89. (in Chinese)
- [14] Plerou V, Gopikrishnan P, Amaral L A N, et al. Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies[J]. *Phys. Rev. E*. 1999, 60: 6519—6529.
- [15] Gopikrishnan P, Plerou V, Amaral L A N, et al. Scaling of the distributions of fluctuations of financial market indices[J]. *Phys. Rev. E*. 1999, 60: 5305—5316.
- [16] Schmitt F, Schertzer D, Lovejoy S. Multifractal fluctuations in finance[J]. *Int. J. Theor. Appl. Fin.*, 2000, 3(3): 361—364.
- [17] Baey E, Delour J, Muzy F. Modeling financial time series using multifractal random walks[J]. *Physica A*, 2001, 299: 84—92.
- [18] Sun Xia, Chen Huiping, Wu Ziqin, et al. Multifractal analysis of Hang Seng index in Hong Kong stock market[J]. *Physica A*, 2001, 291: 553—562.

- [19] Sun Xia, Chen Huiping, Yuan Yongzhuang, *et al.* Predictability of multifractal analysis of Hang Seng stock index in Hong Kong [J]. *Physica A*, 2001, 301: 473—482.
- [20] 汪富泉, 李后强. 分形几何与动力系统[M]. 哈尔滨: 黑龙江教育出版社, 1993.  
Wang Fu-quan, Li Hou-qiang. *Fractal Geometry and Dynamic systems*[M]. Harbin: Heilongjiang Education Publishing Company, 1993. (in Chinese)
- [21] Thomas Lux. the Multi-Fractal Model of Asset Returns: Simple Moment and GMM Estimation, University of Kiel [R]. Working Paper, available at [www. bwl. uni-kiel. de](http://www.bwl.uni-kiel.de), 2001.

## Study on financial risk measure based on multifractal theory

WEI YU, HUANG Deng-shi

School of Economics & Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China

**Abstract:** Multifractal is a powerful tool to describe the complexity of fluctuations in financial markets, and the multifractal spectrum of financial price time series is a concrete and complete description of its complex characteristics. Take the multifractal spectrum of high frequency price time series of Shanghai Stock Exchange Composite index as example, a new market risk measure based on two main parameters of multifractal spectrum is constructed, which may make up for the shortcomings of traditional risk measure in inefficient markets. Empirical study is carried out to test the efficiency of the new risk measure, and its ability of predicting price movements is also studied.

**Key words:** multifractal; risk measure; risk management; predictability; complexity