期权定价的蒙特卡罗模拟综合性方差减少技术①

马俊海[1], 张 维[2], 刘凤琴[3]
(1. 东北大学计算机科学与技术博士后流动站, 沈阳 110004;
2. 天津财经大学, 天津 300222; 3. 浙江财经学院, 杭州 310012)

摘要: 主要将重要性抽样技术处理特殊衍生证券定价问题的能力与控制变量技术、分层抽样技术简单灵活、易于应用的特点有机地结合起来,把分层抽样技术和控制变量技术引入重要性抽样模拟估计的分析框架,提出更为有效的关于期权定价蒙特卡罗模拟的综合性方差减少技术;并以基于算术型亚式期权定价为例,进行了实证模拟分析.

关键词: 期权; 蒙特卡罗模拟; 方差减少技术; 重要性抽样技术; 最优化分层抽样技术
中图分类号: C931.2 文献标识码: A 文章编号: 1007 - 9807(2005)04 - 0068 - 06

0 引 言

蒙特卡罗模拟的基本方差减少技术作为模拟效率改进的重要途径,在金融衍生证券的定价分析中已经得到了广泛的应用和发展. 其中,对偶变量、控制变量、分层抽样技术作为通用性方差减少技术,其基本特点是简单灵活,容易实现,可以应用于所有类型的金融衍生证券的价格估计中;但是,由于方法自身的局限性,单独的使用对于一些特殊的金融衍生证券的价格估计不能取得理想的效果. 例如,为保证对偶变量技术对金融衍生证券定价分析有效,就必须使该衍生证券的盈亏收益函数是随机抽样样本的单调函数;这一条件对诸如欧式期权、美式期权等比较简单的衍生证券是完全满足的,但对于诸如障碍期权、亚式期权等比较复杂的新型衍生证券并不一定成立[1,2]. 再比如,保证控制变量技术有效性的一个重要条件就是该技术应用过程中所需分析的证券与其相关证券之间具有较高程度的正相关性. 因此,对于一些比较简单衍生证券,这种相关性证券比较容易得到;而对于比较复杂的衍生证券,寻找一个较好性质的相关性证券则显得比较困难[3,4].

重要性抽样技术的思想基础就是通过一定的变换,将在一个概率测度下的数学期望转换为在另一个概率测度下的数学期望,从而使得随机抽样能更好地符合模拟估计问题的性质. 基于这一思想基础,恰当地确定一个合适的漂移率水平,从而建立起一个有效的重要性抽样函数是重要性抽样技术应用的一个重要环节. 近些年来,许多学者都对重要性抽样技术在金融衍生证券价格模拟的应用进行大量的研究分析,这些研究也提出了许多确定重要性抽样技术中漂移率水平的方法,但没有从理论上对最佳漂移率的确定进行系统分析. 此外,根据文献[5],利用蒙特卡罗模拟对许多期权价格进行估计所产生的方差,主要可由期权盈亏函数中的线性项与非线性项两部分引起,重要性抽样技术的利用可以最大限度地减小由盈亏函数线性部分所引起的价格估计方差,对于非线性部分则显得无能为力;而在重要性抽样技术中引入适当的分层抽样技术,可以减少或消除盈亏函数的非线性部分所引起的估计方差.

① 收稿日期: 2003 - 06 - 03; 修订日期: 2005 - 06 - 06.
作者简介: 马俊海(1964 —),男,山西平陆人,博士,教授.

1　重要性抽样技术的最佳漂移率确定方法

1.1　最佳漂移率确定的最优化问题

从理论上分析,上述的重要性抽样技术可以应用于标的资产价格服从任何随机运动过程的金融衍生证券的价格模拟. 但是,为了研究方便,在此主要就标的资产价格服从几何布朗运动过程的情况. 假设原始概率密度 g 为一个多维正态分布密度函数,其均值向量和协方差矩阵分别为 n 维零向量和 n 阶单位矩阵. 又假设 $h_\mu(z)$ 表示均值向量为 μ 协方差矩阵为 n 阶单位矩阵的正态分布密度函数, $E_\mu(.)$ 表示在概率密度为 $h_\mu(z)$ 的期望算子,则重要性抽样估计过程可表示为[6]

$$E[G(Z)I_D] = E_\mu[G(Z)e^{-\mu' z+(1/2)\mu'\mu}I_D] \quad (1)$$

其中, $Z \sim N(0, I)$, I 为 n 阶单位矩阵. 根据多元正态分布性质, Z 在密度函数 $h_\mu(z)$ 条件下与 $(Z+\mu)$ 在原始密度函数 $g = h_0(z)$ 条件下具有相同的概率分布,即

$$E_\mu[G(Z)e^{-\mu' z+(1/2)\mu'\mu}I_D] = E[G(Z+\mu)\cdot e^{-\mu' z+(1/2)\mu'\mu}I_D(Z+\mu)] \quad (2)$$

由式(2),在原始概率分布条件下的重要性抽样估计为 $G(Z+\mu)e^{-\mu' z+(1/2)\mu'\mu}I_D(Z+\mu)$.

μ 的选择实际上就是要使该估计的方差达到最小,即 $\min\limits_{\mu} E_\mu[G(Z)^2 e^{-2\mu' z+\mu'\mu}I_D]$.

若定义 $F(z) = \ln G(z)$,则根据马俊海的研究分析[7],最佳漂移率的选择问题可以归结为以下的最优化问题

$$\min_{\mu}\left\{\max_{z\in D}\left[2F(z) - \mu' z + \frac{1}{2}\mu'\mu - \frac{1}{2}z' z\right]\right\} \quad (3)$$

又根据前面对集合 D 的定义和随机向量 Z 的正态分布性质可知,对于许多类型金融衍生证券的盈亏函数 $G(z)$,集合 D 是一个开集. 所以,由上式表示问题的最优解总是可以在集合 D 的内部 D_0 取得. 该最优化问题的一阶条件可表示为 $2\nabla F(z) - \mu' - z' = 0$.

此一阶条件可简化为 $\nabla F(\mu) = \mu'$

如果对漂移率为 μ 的重要性抽样估计进行 Taloy 展开,并将上述一阶条件代入该式,则有

$$e^{F(\mu)+\nabla F(\mu)Z+O(Z' z)-\mu'\mu}I_D = e^{F(\mu)-(1/2)\mu'\mu}\cdot e^{O(Z' z)}I_D \quad (4)$$

此式说明,通过上述最优化问题得到的漂移率为 μ 的重要性抽样模拟估计,实际上消除了由于函数 $F(z)$ 中的线性项部分所代表的随机变量,从而也就消除了该线性项所引起的估计方差.

1.2　求解最优化问题的基本算法

对于诸如欧式、亚式期权等金融衍生证券的价格估计,满足一阶条件的重要性抽样函数的漂移率可以通过直接求解满足一阶条件的方程来确定. 而对于一般的金融衍生证券而言,则必须通过数值迭代方法来加以解决. 实际上,求解一阶条件问题可以看作为一个不动点问题[8].

假设函数 $F(z)$ 是区域集合 D 上的一个二次连续可微的,区域集合 D 是一个凸集, $H(z)$ 代表函数 $F(z)$ 在 z 处的海塞矩阵. 定义从 D 到 D 中的一个映射: $\nabla F(z): D \to D$, $\sup\limits_{z\in D}\|H(z)\| < 1$. 则恰有一个 $\mu \in D$ 满足上述的一阶条件,并且对于任何一个 $\mu_0 \in D$,如果漂移序列 μ_n 满足以下迭代公式 $\mu_{n+1} = \nabla F(\mu_n)$,则该漂移率序列必收敛于 μ.

对于一些比较简单的金融衍生证券的价格模拟,通过较少的迭代步骤就可以达到较高的估计精度. 但是,对于相当一些金融衍生证券的价格模拟,由于定理中的一些条件得不到满足,因而其收敛速度比较慢. 为此可考虑对其进行适当改进,基本过程为

首先,上述的一阶条件可以重新写为 $\nabla G(\mu)/G(\mu) = \mu$.

经过第 i 次迭代以后, $G(\mu)$ 可近似为

$$G(\mu) = G(\mu_i) + \nabla G(\mu_i)(\mu - \mu_i)$$

而 $\nabla G(\mu)$ 可由 $\nabla G(\mu_i)$ 来近似逼近,则上述的迭代公式可以近似为

$$\mu_{i+1} = \frac{\nabla G(\mu_i)}{G(\mu_i) + \nabla G(\mu_i)(\mu_{i+1} - \mu_i)} \quad (5)$$

进一步假设 $\beta = \beta(\mu_{i+1}) = 1/[G(\mu_i) + \nabla G(\mu_i)(\mu - \mu_i)]$,则可得 $\mu_{i+1} = \beta\nabla G(\mu_i)$

将该公式代入式(5),得到的方程

$$\|\nabla G(\mu_i)\|^2\beta^2 + (G(\mu_i) - \nabla G(\mu_i)\mu_i)\cdot\beta - 1 = 0$$

求解这一方程,得到关于参数 β 的两个值,取其中的正值代入上式,则可由 μ_i 得到 μ_{i+1},从

而实现对所求漂移率的迭代逼近公式.

2 最优化分层抽样基本方法及其抽样方向选择

由前面分析结果,通过漂移率 μ 的选择而得到的重要性抽样技术,去掉了由于函数 $F(z)$ 线性项所引起的估计方差.因此,为了进一步减少模拟的估计方差,一个重要途径就是要减少由于函数 $F(z)$ 的二次项所引起的估计方差.下面将通过选择适当的分层抽样的方向,比较有效地解决随机向量 Z 服从多元标准正态分布时,以解决盈亏函数 $F(z)$ 的二次项所引起的估计方差问题.关于分层抽样技术,在文献[1]中有比较详细论述,本文主要就特殊方向上的分层抽样技术的基本思想及其抽样方向选择问题进行研究分析.

2.1 特殊方向上的分层抽样技术

对前面重要性抽样估计进行 Taylor 展开,并利用选择最佳漂移率一阶条件,可得

$$\mathrm{e}^{F(\mu+Z)-\mu' Z-(1/2)\mu'\mu} I_D = \mathrm{e}^{F(\mu)-(1/2)\mu'\mu}\cdot \mathrm{e}^{(1/2)Z' H(\mu) Z + o(1)} I_D \tag{6}$$

其中,$H(\mu)$ 表示函数 $F(z)$ 在 μ 处的海塞矩阵.

2.1.1 单一方向的分层抽样技术

假设 μ 为一个 n 维单位化实数向量,Z 为 n 元标准正态分布随机向量,则 $\mu' Z$ 是一个一元标准正态分布随机变量.为了对随机变量 $\mu' Z$ 进行层数为 N 的分层抽样,先将实数空间 R 划分为 N 个子区间 $B_1, B_2, \cdots, B_N$,设 X_i 为在 $\mu' Z\in B_i$ 成立下 Z 的条件分布随机变量.这样一来,对随机变量 $\mu' Z$ 进行层数为 N 的分层抽样就等价于对每一个随机变量 $X_i, i=1,2,\cdots,N$ 进行随机抽样.根据Duffie[9]的研究分析可知,$(Z|\ \mu' Z=a)\sim N(\mu a, I_n-\mu\mu')$.

由此可以比较容易实现对随机变量 $X_i, i=1,2,\cdots,N$ 的随机抽样.现在,假设上述的划分满足特殊性质,即子区间 B_i 是一个位于标准正态分布的第 $(i-1)/N$ 与第 i/N 个分位数之间的子区间,也即有以下的关系

$$(i-1)/N \le P(\mu' Z\in B_i) \le i/N$$

则为了进行分层抽样,可以做以下定义

$$V_i=\frac{i-1}{N}+\frac{U_0^i}{N}\ (i=1,2,\cdots,N) \tag{7}$$

其中,U_0^i 为区间[0,1]均匀分布随机变量的抽样样本,因而 V_i 则是区间[$(i-1)/N, i/N$]上均匀分布随机变量的抽样样本.又假设 $X_i=\Phi^{-1}(V_i)$,则 X_i 为基于条件 $\mu' Z\in B_i$ 的标准正态分布随机变量的抽样样本.其中,Φ^{-1} 为标准正态分布函数的逆函数.最后设定沿着方向 u 的分层随机抽样样本,$Z^i=\mu X_i+C_\mu Y^i$.其中,$Y^i\sim N(0, I_n)$,并与 X_i 独立,C_μ 满足 $C_\mu C_\mu'=I_n-\mu\mu'$.特别地,可以直接选择 C_u 就为 $I_n-\mu\mu'$ 本身.

2.1.2 沿着多个方向的分层抽样的技术方法

设 $U=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)$,其中 μ_i 为 n 维单位化相互正交实数向量,$1\le k\le n$,即 $U'U=I_k$.

则根据正态分布的性质,有

$$U' Z\sim N(0, I_k),$$
$$(Z|\ U' Z=a)\sim N(Ua, I-UU').$$

为了进行沿着 k 个方向 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k$ 进行分层随机抽样,令 $N=m^k$,通过把 k 个方向的每一个方向的[0,1)区间划分为 m 个相同长度的子区间,从而将单位超立方体$[0,1)^K$划分为 N 个子超立方体.从每一个子超立方体的均匀分布中选择一个点,再对每一个选择出的点通过 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 运算,便得出基于 n 个方向的分层抽样样本.由于分层抽样通常需要较大的 m,因此,如果 k 比较大时,这种抽样程序实现起来是非常困难的.为此,将利用由前面分析的拉丁超立方抽样方法(Latin Hypercube Sampling),对 k 比较大时情况给予比较好的解决.

2.2 最优化分层抽样方向的选择

假设现在所估计的问题为 $C=E(f(Z))$.其中,$E(f^2(Z))<\infty$,Z 为多元标准正态分布随机向量,$Z_1, Z_2,\cdots,Z_n$ 为 Z 的随机抽样样本,ϕ 表示单变量标准正态分布密度函数,可以将分层抽样的最佳抽样方向的选择归结如下的最优化问题[10]

$$\min_{\mu:\mu'\mu=1}\int \mathrm{var}(f(Z)|\ \mu' Z=x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

由前面分析可知,在重要性抽样分析框架中引入分层抽样技术的主要目的是减少或消除由函数 $F(z)$ 的二项式所引起的估计方差.为此,可以假设上述最优化问题中的函数为如下的特殊形式

$$f(Z)=\exp\left(\frac{1}{2}Z' H(\mu) Z\right) \tag{9}$$

其中,$H(\mu)$ 为函数 $f(Z)$ 在 $Z=\mu$ 处的海塞矩阵.

假设 μ 为已经选定的最优化重要性抽样函数的漂移率，则分层抽样方向的选择实际上就是要解决以下的最优化问题

$$\min_{\mu:\mu'\mu=1} E[\mathrm{Var}(e^{(1/2)Z'H(\mu)Z} \mid \mu'Z)] \tag{10}$$

根据线性代数学基本定理，对于这一最优化问题，有以下的基本定理[10]：

假设海塞矩阵 $H(\mu)$ 的 n 个特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，并且每一个特征根都大于等于零和小于等于 1/2，v_i 是相应于特征根 λ_i 的单位化特征向量。如果 λ_j^* 为 $H(\mu)$ 的最大特征根，则 $\mu = v_j^*$ 取得上述的最优化问题的解，即 $u = v_j^*$ 为分层抽样的第一个最佳抽样方向。

此外，该定理中关于特征根的假设条件（小于或等于 1/2）似乎限制了其应用范围。但根据 Forunie 等[11]的分析与讨论，对于诸如亚式期权、障碍期权、基于 CIR 利率模型的利率衍生证券以及基于随机波动率的各种路径依赖式衍生证券等许多比较复杂的金融衍生证券，都比较容易满足该假设条件。所以，尽管受到了一定程度的限制，但该定理仍具有非常广泛的应用范围。

2.3　最优化抽样方向选择的简化方法

从上述理论分析可知，确定最优分层方向的关键就是要衍生证券的盈亏函数 $F(Z)$ 在最佳漂移率 μ 处的海塞矩阵 $H(\mu)$ 的特征值及单位化特征向量。这一问题对于许多比较复杂的衍生证券而言，实现起来非常困难。因此，寻找简化计算方法就显得十分必要。

首先，假设对函数为如下特殊表示形式时的最优分层方向确定进行简要分析

$$F(Z) = f(b'Z)\ (b \in R^n)$$

这种特殊形式函数要求高维衍生证券的盈亏函数能够表示为以随机抽样的线性组合为变量的一元函数。当标的资产价格服从几何布朗运动过程时，基于标的资产价格几何平均值的亚式期权是满足这一性质的最为常用的金融衍生证券。此外，还有许多类型的金融衍生证券，虽然不能直接具有这一特殊性质，但也可以通过 Taylor 展开等变换近似地表示为这一特殊形式。$F(Z)$ 的梯度可表示为如下的形式：$\nabla F(Z) = b f'(b'Z)$。其中，$f'(\cdot)$ 表示函数的微分运算。则求解最佳漂移率的一阶条件可表示为 $b f'(b'\mu) = \mu$。

根据微分方程理论，上述方程的任何解 μ 都可以表示为 $\mu = kb$。进一步分析，$F(Z)$ 在 μ 处的海塞矩阵可表示为 $bb'f''(b'\mu)$。则由矩阵分析理论，该矩阵仅有一类与向量 b 成比例的非零的特征向量。由此可以得出，盈亏函数为 $F(Z) = f(b'Z)\ (b \in R^n)$ 形式时，最佳漂移率 μ 与最优分层方向 v 相互成比例的两个同方向向量。因此，最优分层方向 v 实际上就是最佳漂移率 μ 的单位化向量，即 $v = \mu / \sqrt{\mu'\mu}$。

以上分析主要讨论了具有特殊形式盈亏函数 $F(Z)$ 的最优分层方向的确定问题。但大量的实证研究结果表明，在许多情况下，即使盈亏函数 $F(Z)$ 不具有上述的特殊形式，沿着公式所确定的方向进行分层抽样也能取得十分理想的效果。因此，当海塞矩阵及其特征向量很难确定时，往往就可以通过这一简化方法来进行分析。

3　实例分析

在此以亚式期权为例，对本章提出的模拟模型的应用效果进行比较分析。根据前面的分析，主要对以下的五种模拟模型进行比较分析，即普通蒙特卡罗模拟 MC、基于最佳漂移率 μ 的重要性抽样模拟 IMC、基于最佳漂移率 μ 的重要性抽样和沿着方向 μ 进行的分层抽样技术 SIMC、基于最佳漂移率 μ 的重要性抽样和沿着海塞矩阵 $H(\mu)$ 的最大单位化特征向量 v_1 进行的分层抽样技术 EIMC 以及在 SIMC 基础上引入控制变量技术的模拟模型 SIMC-CV。

3.1　基本模拟过程分析

根据 Benedecte A, Jean-Paul[12]算术平均标的资产价格的亚式看涨期权盈亏收益函数为

$$G(z) = e^{-rT}\max(\overline{S} - K, 0)$$

式中的无风险利率 r 为常数，因此在讨论分析时，可以不考虑常数因子 e^{-rT}。为了进行模拟估计，首先对期权的标的资产价格在风险中性世界中的变化路径在其有效期内进行离散化，其基本表示形式为 $S_0, S_1, S_2, \cdots, S_N$。其中，$S_i$ 表示模拟路径上的第 i 个时刻的价格 $S_{i\Delta t}$，$\Delta t = T/N$。则平均价格 $\overline{S}$ 可表示为 $\overline{S} = (1/N)\sum_{i=1}^{N} S_i$。

设在此盈利收益函数下的方差最小的重要性抽样函数的漂移率向量为 μ，$\mu = (z_1^*, z_2^*, \cdots,$

z_N^*),其一阶最优化条件可表示为如下的关系式

$$z_j^* = \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{i=j}^{N} S_i}{NG(\mu)}, \quad j = 1, 2, \cdots, N \tag{11}$$

此公式可进一步表示为以下的迭代递推形式

$$z_{j+1}^* = z_j^* - \frac{\sigma\sqrt{\Delta t} S_j}{NG(z)} \tag{12}$$

其中

$$z_1^* = \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}\,(G(\mu) + K)}{G(\mu)},$$

$$s_j = S_{j-1} e^{(r - (1/2)\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} z_j^*}$$

$$j = 1, 2, \cdots, N-1$$

在确定了重要性抽样中的最佳漂移率以后,一般地就可以通过计算函数 $F(z)$ 在 $\mu = (z_1^*, z_2^*, \cdots, z_N^*)$ 处的海塞矩阵 $H(\mu)$ 来进一步确定最优分层抽样方向. 这里有 $F(z) = \ln(\max(\bar{S} - K, 0))$. 该函数在满足条件 $\bar{S} > K$ 的所有点 z 处都是二阶可微的,而且其二阶偏导数也很容易计算. 因此,海塞矩阵 $H(\mu)$ 也同样容易地计算出来. 在实际运用过程中,还可以根据 2.3 中的简化方法,将已经求出的最佳漂移率 μ 进行单位化来确定最优分层抽样方向. 在进行以上的过程的基础上,再利用基于几何平均标的资产价格的亚式期权价格作为控制变量来做进一步分析,最小方差系数 β^* 通过一元回归模型确定[13].

3.2 模拟结果分析

现在假设亚式期权的基本参数为 $S_0 = 60$, $T = 1$, $r = 0.05$;波动率 σ 取两个值,分别为 0.15 和 0.25;执行价格 K 分别取 40、55 和 60 三个值;样本路径的离散化的时间点 $N = 16$,分层抽样的层数为 $m = 50$,随机模拟次数 $M = 1\ 000$. 利用这些模拟模型对上述假定的期权进行 100 次重复计算,得出普通蒙特卡罗模拟与后边四个模拟模型估计标准差的比率,其基本计算结果如表 1 所示. 表 1 中的价格估计 a 和 b 分列一栏表示利用 1 000 次模拟样本路径的 SIMC-CV 和 EIMC 模型进行 100 次重复计算的平均结果.

表 1 模拟模型的估计标准差比率

Table 1 The ratios of estimated standard deviation for the simulated model

波动率 σ	执行价格	价格估计 a	价格估计 b	IMC	SIMC	SIMC-CV	EIMC
0.15	45	6.000	5.998	2.5	6.7	7.3	7.8
	55	1.902	1.911	4	23	30.7	34
	60	0.215	0.215	13	71	98.0	102
0.25	45	7.101	7.100	2.0	12	14.7	17.6
	55	4.093	4.091	2.5	15	19.2	21.4
	60	2.054	2.057	7	20	25.7	27.0

3.2.1 模拟结果的整体比较

由模拟结果可知,基于最佳漂移率的重要性抽样的估计方差比普通蒙特卡罗模拟的估计标准差有了一定程度的降低. 而在上述重要性抽样基础上,再沿着最优分层抽样方向进行的分层抽样模拟模型对普通蒙特卡罗模拟的估计方差产生了极其明显的降低效果. 降低的程度大约增加了几十倍. 进一步分析可知,沿着最佳漂移率方向进行的分层抽样模拟的改进效果与沿着通过海塞矩阵求出的最佳分层方向进行的分层抽样模拟的改进效果相比较,后者的效果要比前者稍微好一些,但差别并不十分明显. 如果对前一模拟模型在引入控制变量技术,即表中的 SIMC-CV 模拟模型的改进效果与 EIMC 大体相当. 但由于在计算工作上,二者之间存在着明显的差别,即 SIMC-CV 模型的计算工作要比 EIMC 模拟模型小得多,实现起来也容易得多. 所以,对于上述的亚式期权,SIMC-CV 模拟模型将是前述模拟模型中最具实用意义的模型.

3.2.2 SIMC 与 EIMC 的比较分析

SIMC 与 EIMC 两种模型模拟效率的差别关键在于最佳漂移率方向与通过海塞矩阵求出的最优分层抽样方向之间的相关程度. 它们之间的相关性程度越强,SIMC 与 EIMC 的模拟效率也就越接近. 比如,假设期权的基本参数取以下数值 $S_0 = 60$, $K = 55$, $\sigma = 0.25$, $T = 1$, 0.05, $n = 16$.

根据上述递推公式计算出具有单位长度 1 的最佳漂移率向量与最优分层抽样方向,前 5 个分量和后两个分量分别为

$$\mu = (0.22, 0.207, 0.194, 0.182, 0.169, \cdots, 0.027, 0.205)$$

$$\upsilon = (0.23, 0.217, 0.204, 0.191, 0.178, \cdots,$$

0.036 ,0.013)

对其他参数情况下的亚式期权做类似分析,可得大致相同的结论,从而也说明了 EIMC 与 SIMC 两种模拟估计效率差别不太明显基本原因所在. 因此,对于一般性金融衍生证券的价格模拟过程,上述的关于漂移率方向与最优分层抽样方向相关性程度的分析判断是决定 SIMC 或 SIMC-CV 两种比较简单的模拟模型能否近似取代比较复杂的 EIMC 模拟模型的关键问题.

4　结束语

本文的研究分析可以得出以下主要结论:

(1) 不同的蒙特卡罗模拟的方差减少技术有机结合起来,将是进一步提高金融衍生证券定价的蒙特卡罗模拟效率的重要途径;

(2) 基于最佳漂移率的重要性抽样技术与沿着最优分层抽样方向进行的分层抽样技术结合起来的综合性方差减少技术,比普通的蒙特卡罗模拟产生了极其明显的效率提高效果,在各种金融衍生证券定价分析中,平均提高程度大约为几十倍.

(3) 考虑到模拟的计算工作与方差减少水平,基于最佳漂移率 μ 的重要性抽样技术与沿着海塞矩阵 $H(\mu)$ 的最大单位化特征向量 v_1 进行的分层抽样技术所形成的综合性方差减少技术,对于许多特殊的金融衍生证券定价而言,则是一种最为有效的蒙特卡罗模拟提高技术.

参 考 文 献:

[1] Broadie P, Glasserman P. Monte Carlo methods for securities pricing[J]. Journal of Economic Dynamic and Control, 1997, 21: 1263—1321.

[2] Bratley P. A Guide to Simulation[M]. Berlin: Springer, 1983. 438—471.

[3] Broadie M Detemple. Recent advances in numerical methods for pricing derivative securities[A]. Numerical Methods in Finance [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 170—229.

[4] Boyle P. A Monte Carlo approach[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 4: 328—338.

[5] Owen A. Safe and Effective Importance Sampling[R]. Technique Report, Standford: Standford University Press, 1998. 210—242.

[6] Veach E, Guiba P. Optimally Combining Sampling Technique for Monte Carlo Rendering[C]. Los Angeles: In SIGGRAPH'1995 Conference Proceeding, 1995. 172—210.

[7] 马俊海. 金融衍生证券定价的数值分析方法[M]. 杭州: 浙江人民出版社, 2002. 147—149.
Ma Junhai. Numerical Analysis Methods for Pricing Financial Derivative Securities[M]. Hangzhou: People Press of Zhejiang, 2002. 147—149. (in Chinese)

[8] Aiworth P, Broadie M, Glasserman P. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods for Scientific Computing[M]. New York: Springer-Verlag, 1997. 211—240.

[9] Duffie D. Efficient Monte Carlo simulation of security prices[J]. Annals of Applied Probability, 1995, 5: 897—905.

[10] Glasserman P, Gaussian P. Importance Sampling and Stratification: Computation Issuer[C]. Proceeding of the 1998 Winter Simulation Conference, New York: IEEE Press, 1998. 685—693.

[11] Fournie E, Lasry J. Numerical Methods in Finance[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 321—370.

[12] Benedecte A, Jean-Paul D. A PDE approach to Asian options: Analytical and numerical evidence[J]. Journal of Banking & Finance, 1997, 21: 613—640.

[13] Hull J, White A. The use of the control variate technique in option pricing[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1988, 23(4): 237—251.

(下转第 79 页)

[21]Schwartz A. Bankruptcy workouts and debt contracts[J]. Journal of Law and Economics, 1993, 36: 595—632.

[22]Moody Default and recovery rates of corporate bond issuers: A statistical review of Moody's Ratings performance 1970—2001. [ED/OL] http://www.moodys.com/, 2002.

[23]Lando D. On Cox processes and credit-risky securities[J]. Review of Derivatives Research, 1998, 2: 99—120.

[24]Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 177—188.

[25]Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. An intertemporal general equilibrium model of asset prices[J]. Econometrica, 1985, 53: 363—384.

[26]Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, 53: 385—407.

Study of credit risk term structure with stochastic default intensity

LIANG Shi-dong, GUO Bing, FANG Zhao-ben

Department of Stat. & Finance, University of Science & Technology of China, Hefei 230026, China

Abstract: The credit risk pricing model constructed in this paper belongs to the Intensity Model Category. We constructed the frame model for term structure model of credit risk, discussed the example of two-factors models and got the closed-form solution to the price of defaultable bonds. Finally, we analyzed the pricing problem of credit risk derivatives.

Key words: credit risk; term structure; pricing; intensity model

(上接第 73 页)

Comprehensive variance reduction techniques of Monte Carlo simulation methods for pricing options

MA Jun-hai, ZHANG Wei, LIU Feng-qin

1. Post-Doctor Work Station of Computer Science and Technology, Northeastern University, Shenyang 110004, China;
2. Tianjin University of Finance and Economics, Tianjin 300222, China;
3. Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310012, China

Abstract: In this paper, combining the stronger ability to deal with some special financial derivative securities given by importance sampling technique and the characters of simple and flexible of mulit-control variable technique and optimum stratified sampling technique, we will put forward some more effective comprehensive variance reduction techniques on Monte Carlo simulation method for pricing financial derivative securities by introducing control variable technique and optimum stratified sampling technique into the analysis framework of importance sampling technique. At last, we make some practical analysis by using an arithmetic Asian option.

Key words: options; Monte Carlo simulation; variance reduction technique; importance sampling technique; optimum stratified sampling technique