

二分群体决策规则的序性质研究^①

李 武

(上海大学国际工商管理学院, 上海 201800)

摘要: Karotkin 等发现二分群体决策的加权多数决策规则集具有序性质, 但未能解释其原因. 文章提出了规则链和规则距离函数的概念, 指出当一组决策规则构成规则链时这组规则便具有序性质, 从而解释了这一现象. 而判断一组规则是否构成规则链则可以通过计算各规则间的规则距离来实现. 随后通过对具体实例的分析进一步阐述了得到的结论.

关键词: 群体决策; 决策规则; 规则序

中图分类号: C934

文献标识码: A

文章编号: 1007-9807(2005)05-0010-05

0 引言

群体决策是决策理论研究的一个热点^[1,2], 而二分群体决策是一类典型而特殊的群体决策. 二分群体决策的备选方案集合仅包含两个对立的方案. 现实中存在着大量的这类决策问题. 例如, 判定被告是“有罪”与“无罪”; 对某项计划“支持”与“反对”等. 这一模型可以广泛应用于政治、经济、管理等多个领域. 即使群体决策的方案集合包含两个以上的方案, 在许多情况下也可以转换成一个二分群体决策序列. 20世纪80年代以来, 二分群体决策问题逐渐引起人们的重视. Nitzan 和 Paroush 建立了描述二分群体决策的基本模型^[3]. Grofman、Batchelder 等分析了二分群体决策的随机统计特性^[4,5]. Ben-Yarshar 等则研究了扩展型的二分群体决策的最优规则^[6]. 国内对于二分群体决策的研究还相对较少. 杨雷、席西民利用信号检测理论研究了二分群体决策过程^[7]. 李武、席西民则研究了二分群体决策规则约束条件^[8].

在对二分群体决策的研究中, Nitzan 和 Paroush 证明了二分群体决策的最优规则是加权多数规则^[9]. 随后 Karotkin、Nitzal 和 Paroush 发现加权多数规则集具有序性质^[10], 即可以将加权多

数规则集中的若干规则加以排序, 使其拥有如下性质: 如果对于某个决策能力向量, 决策规则 f_i 是最优决策规则, 则对于该决策能力向量, 次优决策规则必然是 f_{i+1} 或 f_{i-1} . 进一步, 如果对于该决策能力向量, f_{i+1} 是次优规则, 则次于 f_{i+1} 的最优规则必然是 f_{i-1} 或 f_{i+2} , 如此等等. 决策规则的序性质显然对于研究决策规则的优性具有重要的意义. Karotkin 和 Paroush 认为, 无论决策群体的规模如何, 其对应的加权多数规则集都存在这样的序性质^[11]. 然而 Karotkin 和 Paroush 并未对这一观点作出证明, 亦未能说明决策规则序性质的发生机理. 本文将通过规则链和规则距离函数的概念来解释规则序的发生机理.

1 二分群体决策模型

Nitzan 和 Paroush 提出了二分群体决策的基本模型^[9]. 设有 n 个成员 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的决策群体在 a, b 两个对立方案间择一(如批准或否决某项计划). 决策变量 $x_i = 1$ 或 -1 分别表示决策者 i 选择方案 a 或方案 b . 决策者之间相互独立. 向量 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 称为一个决策断面. 所有决策断面的集合记为 Ω . 每个决策者选择正确方案的能

① 收稿日期: 2003-04-29; 修订日期: 2005-07-08.
基金项目: 国家博士后科学基金资助项目(2003033311).
作者简介: 李 武(1974—), 男, 山西运城人, 博士, 讲师.

力是有限的,用决策者 i 选择正确方案的概率 p_i 表示其决策能力. $p = (p_1, \dots, p_n)$ 是群体的决策能力向量. 设方案 a, b 为正确方案的先验概率分别为 α 和 $1 - \alpha$. $B(1:1)$ 代表群体选择了方案 a 且方案 a 为正确方案时的收益, $B(-1:1)$ 代表群体选择了方案 b 而方案 a 为正确方案时的收益. 类似有 $B(-1:-1)$ 和 $B(1:-1)$.

一个函数 $f: \Omega \rightarrow \{1, -1\}$ 称为一个决策规则. $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ 和 $f(x_1, \dots, x_n) = -1$ 分别代表决策断面 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 发生时,在决策规则 f 下决策群体选择方案 a 或 b . 所有 f 的集合记为 F , 显然有 $|F| = 2^n$.

群体选择正确方案的概率称为决策质量. $\pi(f:1)$ 和 $\pi(f:-1)$ 分别表示 a 为正确方案和 b 为正确方案并应用决策规则 f 时群体决策的决策质量. $\pi(f)$ 表示应用决策规则 f 时的群体决策质量, 则有 $\pi(f) = \alpha\pi(f:1) + (1 - \alpha)\pi(f:-1)$. 需要注意的一点是群体决策的决策质量与决策收益并非完全一致, 也就是说决策质量最高时决策收益未必最大, 反之亦然. 该群体决策的最优规则即为能够最大化群体决策收益的决策规则, 亦即如下优化问题的解

$$\max_{f \in F} E(f) \quad (1)$$

其中: 群体决策的决策收益 $E(f) = B(1:1)\pi(f:1)\alpha + B(-1:1)[1 - \pi(f:1)]\alpha + B(-1:-1)\pi(f:-1)(1 - \alpha) + B(1:-1)[1 - \pi(f:-1)](1 - \alpha)$

Nitzan 和 Paroush 证明, 该问题的解, 亦即二分群体决策的最优规则是如下的加权多数规则^[9]

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i x_i + \ln \frac{\alpha[B(1:1) - B(-1:1)]}{(1 - \alpha)[B(-1:-1) - B(1:-1)]} \right\} \quad (2)$$

其中: $w_i = \ln \frac{p_i}{1 - p_i}$, $\text{sign}(m) = \begin{cases} 1 & m > 0 \\ -1 & m < 0 \end{cases}$

当两个方案的先验预期收益相等, 即 $\alpha B(1:1) + (1 - \alpha)B(1:-1) = \alpha B(-1:1) + (1 - \alpha)B(-1:-1)$ 成立时, 以上问题即为 $\max_{f \in F} \pi(f)$, 此时群体决策收益与群体决策质量完全一致. 此时的最优规则即为如下的加权简单多数规则

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i \right) \quad (3)$$

2 规则序、规则链与规则距离函数

定义决策断面集合 $M(f, g) = \{x: x \in \Omega, f(x) \neq g(x)\}$ 为决策规则 f 和决策规则 g 的决策断面差异集. 即两个决策规则的决策断面差异集为这两个决策规则集结出不同结果的决策断面的集合.

对于决策规则 f, g 和 h , 如果有 $M(f, g) \subset M(f, h)$, 则称规则 f, g 和 h 之间存在三元关系 $R(f, g, h)$. 这个三元关系可以理解为决策规则 f 和 g 之间的差别小于决策规则 f 和 h 之间的差别. 对于一组规则, 如果其中任意 3 个规则都存在关系 R , 则称这些规则构成了一个规则链. 也就是说, 一个规则链中的任意三个规则, 必有两个规则之间的差别小于另两个规则之间的差别. 若有 $R(f, g, h)$, 则称规则 g 在规则链上位于规则 f 和规则 h 之间.

在决策规则集 F 上定义距离函数如下:

$d(f, g) = |M(f, g)|$. 即两个决策规则之间的距离为其决策断面差异集的模.

距离函数应当满足: 1) 非负性及零距离与点重合的等价性; 2) 对称性; 3) 三角不等式. 从 $F, M(f, g)$ 及 $d(f, g)$ 的定义易知 $d(f, g)$ 满足前两个条件. 对于第 3 个条件, 显然当 $M(f, g)$ 与 $M(g, h)$ 的交集为空时, 有 $M(f, h) = M(f, g) \cup M(g, h)$, 可知有 $|M(f, h)| = |M(f, g)| + |M(g, h)|$. 当 $M(f, g)$ 与 $M(g, h)$ 的交集不为空集时, 有 $M(f, h) \subset M(f, g) \cup M(g, h)$, 可知有 $|M(f, h)| < |M(f, g)| + |M(g, h)|$. 于是有 $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$. 可见满足第 3 个条件. 于是 $\{F, d\}$ 便构成了一个度量空间. 规则距离反映了各规则的相似程度. 距离越近的规则, 相似程度越大; 反之亦然.

对于加权简单多数规则, 由于其满足中性, 即 $f(-x) = -f(x)$, 因此对于 2 个加权简单多数规则 f 和 g , 如果对于某个决策断面 x 有 $f(x) \neq g(x)$, 则亦有 $f(-x) \neq g(-x)$. 于是可知若 $M(f, g)$ 中包含决策断面 x , 一定也包含决策断面 $-x$. 这样根据规则距离的定义就可以知道, 2 个加权简单多数规则之间的距离一定是偶数.

关系 R 与规则距离之间有如下关系:

命题 1 对于任意 3 个规则 f, g 和 h , 有

$$R(f, g, h) \Leftrightarrow d(f, h) = d(f, g) + d(g, h)$$

证明 若有 $R(f, g, h)$, 根据关系 R 和规则距离的定义, 显然有 $d(f, h) = d(f, g) + d(g, h)$;

若 $d(f, h) = d(f, g) + d(g, h)$, 则 $M(f, g)$ 与 $M(g, h)$ 的交集为空, 于是有 $M(f, h) = M(f, g) \cup M(g, h)$, 即有 $M(f, g) \subset M(f, h)$. 证毕.

因此对于一个规则链上的 3 个规则 f, g 和 h , 其两两之间的距离为 $d(f, g)$ 、 $d(f, h)$ 和 $d(g, h)$, 则必有其中之一为其余两个之和. 反过来, 如果一组决策规则中任意 3 个决策规则 f, g 和 h , 其两两之间的距离为 $d(f, g)$ 、 $d(f, h)$ 和 $d(g, h)$, 必有其中一个为另两个之和, 则这一组规则构成了一个规则链. 这样就可以通过检查各规则间的规则距离来判断一组规则是否构成一条规则链. 而对规则距离的计算是易于编程实现的.

下面讨论规则链、规则距离与决策质量的关系.

命题 2 对于一个决策规则链上的规则 f, g 和 h 和某一决策能力向量 p^* , 若规则 f 为对于 p^* 的最优规则, 且规则 g 处在规则 f 和规则 h 之间, 则有 $\pi(g, p^*) > \pi(h, p^*)$. $\pi(g, p^*)$ 为决策能力向量 p^* 应用规则 g 时的决策质量, $\pi(h, p^*)$ 为决策能力向量 p^* 应用规则 h 时的决策质量.

证明 规则 g 处在规则 f 和规则 h 之间, 则意味着对于决策规则 f, g 和 h 有 $R(f, g, h)$. 由于规则 f 为对于 p^* 的最优规则, 因此当规则 f 的任一断面的集结结果发生改变时, 其决策质量都会下降. 而 f 和 g 的差异集包含在 f 和 h 的差异集中, 也就是说与决策规则 g 相比, 决策规则 h 将决策规则 f 的更多的决策断面的集结结果作了改变. 因

此可知对于 p^* , h 的决策质量必然低于 g 的决策质量. 证毕.

由此可见, 决策规则链上的规则的决策质量是有序的. 这一命题解释了决策规则序性质的本质. 规则链上的任意一个规则 f , 当对于某个决策能力向量是最优规则时, 次优规则必然是决策链上与 f 相邻的规则; 对于这一决策能力向量, 当决策规则沿着决策链向任一端沿伸时, 决策质量是单调下降的.

3 实例分析

对于两个备选方案对称的 5 人规模的二分群体决策, 其最优规则为加权简单多数规则, 且加权简单多数规则共有 7 类, 权重自大从小排列的代表规则如表 1 所示^[9]. Karotkin 等指出其中除去 f_5 后的 6 个规则之间存在序关系^[11]. 例如选取 6 个能力向量 P_1, P_2, \dots, P_6 , 计算这 6 个规则对于各决策能力向量的决策质量如表 2, 从中可以看出这 6 个决策规则具有序性质. 把 6 个决策规则对于各决策能力向量的决策质量由大到小排序, 可以得到图 1.

表 1 5 人群体决策中的加权简单多数规则

Table 1 Weighted simple majority rules in 5-member group decision making

代 号	规则名称	标准权重向量
f_1	专家规则	(1,0,0,0,0)
f_2	准专家规则	(3,1,1,1,1)
f_3	主席仲裁规则	(2,1,1,1,0)
f_4	主席及两副手规则	(3,2,2,1,1)
f_5	受限简单多数规则	(1,1,1,0,0)
f_6	准简单多数规则	(2,2,1,1,1)
f_7	简单多数规则	(1,1,1,1,1)

表 2 各决策规则对于各决策能力向量的决策质量

Table 2 Decision quality of decision rules for different decisional ability vectors

决策规则	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
f_1	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820
f_2	0.780	0.829	0.835	0.848	0.862	0.901
f_3	0.740	0.818	0.850	0.857	0.873	0.914
f_4	0.700	0.806	0.834	0.865	0.885	0.928
f_6	0.660	0.795	0.819	0.856	0.896	0.942
f_7	0.620	0.783	0.804	0.846	0.884	0.956

注: P_1 : (0.82, 0.50, 0.50, 0.50, 0.50); P_2 : (0.82, 0.62, 0.62, 0.62, 0.62)
 P_3 : (0.82, 0.68, 0.68, 0.68, 0.50); P_4 : (0.82, 0.73, 0.73, 0.62, 0.62)
 P_5 : (0.82, 0.82, 0.68, 0.68, 0.68); P_6 : (0.82, 0.82, 0.82, 0.82, 0.82)

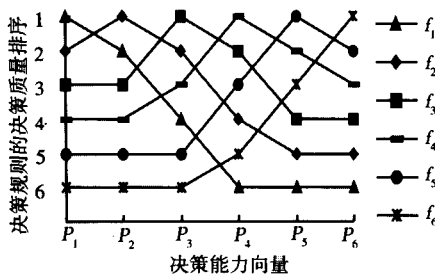


图 1 5 人群体决策规则的序性质

Fig. 1 Essential order of 5-member group decision

从图 1 中可以清楚地看出各决策规则的决策质量是井然有序的. 如当 f_3 最优时, 其次的规则依次为 f_2, f_4, f_1, f_6, f_7 , 距离其越近的规则决策质量越高. 这一现象不是偶然的. 这一组决策规则的这种序性质不因决策能力向量的变化而改变. 对其发生机理已在第 2 节作了阐述. 命题 2 中指出, 如果若干决策规则构成了一条规则链, 则规则链上的这些规则便具有这种序性质.

表 3 5 人群体决策中的加权简单多数规则距离
Table 3 Distances between weighted simple majority rules in 5-member group decision making

代号	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_1	0	2	4	6	8	8	10
f_2	2	0	2	4	6	6	8
f_3	4	2	0	2	4	4	6
f_4	6	4	2	0	2	2	4
f_5	8	6	4	2	0	4	6
f_6	8	6	4	2	4	0	2
f_7	10	8	6	4	6	2	0

参 考 文 献:

[1] 毕鹏程, 席酉民. 群体决策过程中的群体思维研究[J]. 管理科学学报, 2002, 5(1): 25—34.
Bi Pen-cheng, Xi You-min. Groupthink in group decision making process[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(1): 25—34. (in Chinese)

[2] 李 武, 席酉民, 成思危. 群体决策过程组织研究述评[J]. 管理科学学报, 2002, 5(2): 55—66.
Li Wu, Xi You-min, Cheng Si-wei. Review of process organizing research of group decision making[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(2): 55—66. (in Chinese)

[3] Nitzan S, Paroush J. Optimal decision rules in uncertain dichotomous choice situations[J]. International Economic Review, 1982, 23(2): 289—297.

[4] Grofman B, Feld S, Owen G. Group-size and the performance of a composite group majority-statistical truths and empirical results [J]. Organizational Behavior and Human Performance, 1984, 33(3): 350—359.

[5] Batchelder W H, Romney A K. The statistical analysis of a general Condorcet model for dichotomous choice situations[A]. In Grofman B, Owen G(Eds.). Information Pooling and Group Decision Making: Proceedings of the Second University of California, Irvine Conference on Political Economy[C]. Greenwich, Conn.: JAI Press, Inc., 1986. 103—112.

[6] Ben-Yarshar R, Nitzan S. The optimal decision rule for fixed-sized committee in dichotomous choice situation: The general result [J]. International Economic Review, 1997, 38(1):175—186.

由命题 1 可知, 对于一组决策规则, 可由规则距离来判断它们是否构成一个规则链. 利用 Delphi 4.0 编程计算出 5 人群体决策中加权简单多数规则两两之间的距离如表 3 所示.

容易看出, 除去 f_5 后, 其余的 6 个决策规则之间的距离有很强的规律性. 显然对于任意 3 个规则的两两之间的距离, 必有其中一个为另外两个之和. 如对于规则 f_2, f_4 和 f_6, f_2 和 f_4 之间的距离为 4, f_4 和 f_6 之间的距离为 2, 而 f_2 和 f_6 之间的距离为 6. 由命题 1 及规则链的定义可知, f_1, f_2, f_3, f_4, f_6 和 f_7 构成了一个规则链, 因此这些规则必然具有序性质. 这样本文就解释了序现象的发生机理.

4 结 束 语

本文研究了二分群体决策规则的序现象, 提出了规则距离、规则链等概念, 解释了规则序的发生机理, 指出可以通过检查各规则间的规则距离来判断一组规则是否构成一条规则链, 证明了当一组规则构成规则链时这组规则便具有序性质. 随后考察了两个备选方案对称的 5 人二分群体决策中的加权简单多数规则, 在表 3 中计算了两两之间的规则距离, 指出 f_1, f_2, f_3, f_4, f_6 和 f_7 构成了一个规则链, 因此这组规则具有序性质.

- [7] 杨 雷, 席酉民. 信号检测理论与二分群体决策[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(12): 115—120.
Yang Lei, Xi You-min. Signal detection theory and dichotomous group decision making[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 1997, 17(12): 115—120. (in Chinese)
- [8] 李 武, 席酉民. 二分群体决策规则约束性质研究[J]. 管理工程学报, 2002, 16(4): 38—41.
Li Wu, Xi You-min. A research of restrictive conditions on dichotomous group decision rules[J]. Journal of Industrial Engineering/Engineering Management, 2002, 16(4): 38—41. (in Chinese)
- [9] Nitzan S, Paroush J. Collective Decision Making: An Economic Outlook[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [10] Karotkin D, Nitzal S, Paroush J. The essential ranking of decision rules in small panels of experts[J]. Theory and Decision, 1988, 24(3): 253—268.
- [11] Karotkin D, Paroush J. Variability of decisional ability and the essential order of decision rule[J]. Journal of Economic Behavior & Organization, 1994, 23(3): 343—354.

Research on essential order of decision rules in dichotomous group decision making

Li Wu

School of International Business and Management, Shanghai University, Shanghai 201800, China

Abstract: Karotkin et al discovered that sets of weighted majority rules possess a property of essential order. However, they didn't explain the reason of that. In this paper, we proposed the concept of decision-rule chain and distance function of decision rules, and pointed out that when a set of decision rules compose a decision-rule chain they possess the property of essential order. Therefore the property of essential order is explained. And we can examine whether a set of decision rules compose a decision-rule chain by computing the distances of those decision rules. The conclusion is further illustrated with an example.

Key words: group decision making; decision rule; essential order of decision rules