第8卷第5期 管理科学学报 Vol.8 No.5
2005年10月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Oct. 2005

一种新型不确定AHP的研究与应用①

朱建军[1]，王梦光[2]，刘士新[2]
(1.南京航空航天大学经济与管理学院，南京 210016；2.东北大学信息科学与工程学院，沈阳 110004)

摘要：针对现有AHP方法在某些决策环境下不能准确反映决策者的偏好，以及群决策背景下专家偏好集结的信息丢失等问题，研究元素服从离散分布的一种新型不确定AHP，将未确知数概念引入到AHP之中，用局部一致性和整体一致性思想检验未确知数判断矩阵，并根据未确知数判断矩阵的特点，提出基于未确知数运算法则和蒙特卡罗模拟的两种权重求解方法，最后通过两个例子说明新方法的应用可行性.

关键词：层次分析法；不确定性；群决策；未确知数
中图分类号：O22 **文献标识码**：A **文章编号**：1007-9807(2005)05-0015-06

0 引 言

在层次分析法[1,2](analytical hierarchy process, AHP)的实践中，受决策问题的不确定性因素影响，一些学者将AHP方法进行扩展[3~8]，加强了AHP的应用范围，然而不足之处是求解权重时，需假设元素服从某一连续分布，这种连续分布假设有时不能准确反映决策者的偏好，以方案1与2相比为例，若决策者认为两方案同样重要($a_{12}=1$)的可能性有30%，稍微重要($a_{12}=3$)的可能性有50%，而明显重要($a_{12}=5$)的可能性只有20%，在这种情况下，若用区间数$\overline{a_{12}}=[1,5]$表示重要性差别，将增加决策的不确定性，且没有充分利用决策者的偏好信息；若用加权方法$a_{12}=1\times30\%+3\times50\%+5\times20\%=2.8$处理，缺点是用均值2.8近似表示$a_{12}$的可信度完全不清楚. 如果用下面形式来描述，则能较全面地表达决策者的偏好信息. 例如：$a_{12}=\begin{cases}(1,30\%)\\(3,50\%)\\(5,20\%)\end{cases}$，其中，二元组(1,30%)表示决策者有30%的把握认为两个方案有相同的重要性($P(a_{12}=1)=30\%$).

此外，随着决策问题复杂性的增加，群决策受到国内外学者的广泛关注，AHP是处理群决策问题的一个有效工具，但还存在专家偏好集结过程中信息丢失等问题，限制了AHP在群决策领域的应用[4]. 对此，可以采用二元组的形式表示专家组的判断. 设m为专家数目，用统计方法拟合专家意见的分布[9]，对a_{ij}，统计a_{ij}^k的频数v^k，$k=1,\cdots,M$，M为决策意见的分类数，$P(a_{ij}^k)=\dfrac{v^k}{m}$，则反映专家意见的二元组形式为

$$a_{ij}=\begin{cases}\left(a_{ij}^1,P(a_{ij}^1)=\dfrac{v^1}{m}\right)\\ \cdots\\ \left(a_{ij}^M,P(a_{ij}^M)=\dfrac{v^M}{m}\right)\end{cases}$$

抽象成二元组形式的判断元素具有如下特点：

① 元素服从离散分布. 记α为决策者的可信度，若认为总可信度$\alpha=1$，即$\sum_{k=1}^{M}P(a_{ij}^k)=\alpha=$

① 收稿日期：2003-06-23；修订日期：2005-05-27.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70301007)；国家863计划CIMS主题资助项目(2002AA412010)；辽宁省博士启动基金资助项目(20021011)；沈阳市自然科学基金资助项目(1022036-1-04).
作者简介：朱建军(1976—)，男，江苏丹阳人，讲师.

1,表明决策者对判断结果(数值分别为 $a_{ij}^1,\cdots,a_{ij}^M$)的估计是充分的,$\alpha=1$ 的二元组形式属随机信息表达,但国内外研究元素服从离散分布(可信度为分布概率)判断矩阵的文献尚较少.

② 若认为可信度 $\sum_{k=1}^{M}P(a_{ij}^k)=\alpha<1$,表明决策者对结果没有充分把握,除 $a_{ij}^1,\cdots,a_{ij}^M$ 外,还有可信度为 $1-\alpha$ 的判断,表示为 $a_{ij}=\begin{cases}(a_{ij}^1,P(a_{ij}^1))\\ \cdots\\ (a_{ij}^M,P(a_{ij}^M))\\ (\text{其它},1-\alpha)\end{cases}$.

在这种情况下的二元组形式属未确知信息,不能当作随机变量处理,AHP及其不确定扩展都无法准确描述这类不确定的判断,对此,国内外尚没见到有相关研究报道.

本文研究判断矩阵元素用二元组形式表达的AHP判断矩阵及性质,由于二元组形式的概念、表现形式与未确知数(见文献[10])相近,因此,将未确知数引入AHP之中,试图为进一步发展和完善不确定环境下的AHP做进一步研究.

1 未确知数AHP判断矩阵

定义1 对 $a=x_1<\cdots<x_M=b$,若 $\phi(x)=\begin{cases}x=x_i,P(x=x_i)=\alpha_i,\\ \text{其它},0\end{cases}$, $\sum_{i=1}^{M}\alpha_i=\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$,称 $[a,b]$ 和 $\phi(x)$ 构成一个未确知有理数,α 为总可信度($\alpha=1$ 时,退化成随机变量),$[a,b]$ 为取值区间,x_i 为 x 的可能取值,α_i 为 $x=x_i$ 的可信度,M 为未确知数的阶数[10].

若 x_i 用 $x_i=[x_i^L,x_i^U]$ 表示,x_i^L 为 x_i 的下限,x_i^U 为上限,则称 $[a,b]$ 和 $\phi(x)$ 构成一个盲数,下面给出未确知数判断矩阵的定义及性质.

定义2 称由未确知有理数构成的判断矩阵为未确知有理数判断矩阵,记作 $\hat{A}=(\hat{a}_{ij})_{n\times n}$, $\hat{a}_{ij}=\begin{cases}(a_{ij}^1,P(a_{ij}^1))\\ \cdots\\ (a_{ij}^M,P(a_{ij}^M))\end{cases}$. a_{ij}^k 为 $\hat{a}_{ij}$ 的 M 个可能值,$k=1,\cdots,M$,$P(a_{ij}^k)$ 为 a_{ij}^k 的可信度.

性质1 ① $0<P(a_{ij}^k)\leqslant 1$,总可信度 $\alpha=P(a_{ij}^1)+\cdots+P(a_{ij}^M)$ 满足 $0<\alpha\leqslant 1$;② 按照AHP的1~9标度,$a_{ij}^k>0$,$a_{ij}^k\in\{1/9,\cdots,9\}$,$\hat{a}_{ii}=1$,$P(\hat{a}_{ii}=1)=100\%$;③ 具有互反性,$\hat{a}_{ji}=1/\hat{a}_{ij}$,

$$\hat{a}_{ji}=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{a_{ij}^1},P(a_{ij}^1)\right)\\ \cdots\\ \left(\dfrac{1}{a_{ij}^M},P(a_{ij}^M)\right)\end{cases}$$

在定义2中,若 a_{ij}^k 用区间数 $[a_{ij}^{kL},a_{ij}^{kU}]$ 表示,则构成盲数AHP判断矩阵.当 $a_{ij}^1=\cdots=a_{ij}^M$,$P(a_{ij}^1)=\cdots=P(a_{ij}^M)=\dfrac{100}{M}\%$,简写成 $(a_{ij},100\%)$ 的形式,则未确知数AHP退化成确定性AHP.在不致混淆的情况下,统称未确知有理数AHP、盲数AHP为未确知数AHP(unascertained number analytical hierarchy process,UNAHP).应用UNAHP进行决策时,递阶层次结构建立、权重组合方法与AHP相同(见文献[1,2]),下文着重探讨一致性检验、权重求解方法.

2 一致性分析

为讨论方便,首先简述与判断矩阵一致性相关的概念.判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一致性比例 $CR(\boldsymbol{A})=\dfrac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})-n}{(n-1)RI}$,$RI$ 为随机一致性指标(取值见文献[1]),n 为判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数,$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 对应的主特征值,一般在 $CR(\boldsymbol{A})\leqslant 0.1$ 时,认为 $\boldsymbol{A}$ 满意一致.

在UNAHP的应用时,可在其判断矩阵内随机生成一个满意一致的判断矩阵来估计决策者的偏好,由此,提出随机确定性判断矩阵的概念,在此基础上研究 $\hat{A}$ 的一致性特点.

定义3 称 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 $\hat{A}$ 的一个随机确定性判断矩阵,$\boldsymbol{A}$ 按如下方法构造:当 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 时,$a_{ij}=a_{ij}^k$(若 $\hat{a}_{ij}$ 为盲数,则 $a_{ij}\in a_{ij}^k=[a_{ij}^L,a_{ij}^U]^k$,$a_{ij}$ 在 $[a_{ij}^L,a_{ij}^U]^k$ 内按均匀分布概率随机生成),k 的取值由 $P(a_{ij}^k)$ 根据轮盘赌方法确定,且若 $\alpha=1$,$k\in\{1,\cdots,M\}$,若 $\alpha<1$,$k\in\{1,\cdots,M+1\}$,令 a_{ij}^{M+1} 取 $\{1/9,\cdots,9\}$ 中任意一个数值,$P(a_{ij}^{M+1})=1-\alpha$.$a_{ji}=1/a_{ij}$,$a_{ii}=1$,$i,j=1,\cdots.n$.

根据UNAHP判断矩阵 $\hat{A}$ 的构成特点,其一致性应有如下定义(见定理1—定理3).

定理1 对于 $\hat{A}$,按定义3随机生成确定性判

断矩阵，若存在某个确定性判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有一致性，则 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 具有局部一致性.

证明　定义 3 生成的一个判断元素 a_{ij}，能反映决策者基于某个可信度下做出的判断，由 a_{ij} 构成的随机确定性判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可反映 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的局部特性. 因此，若存在某个随机矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有一致性，则 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 具有局部一致性特点.　证毕.

由于决策问题的复杂性，$\hat{\boldsymbol{A}}$ 有时也较难达到局部一致性条件，有定理 2.

定理 2　按定义 3 随机生成确定性判断矩阵，若存在某个判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有满意一致性（$CR(\boldsymbol{A}) \leqslant 0.1$），则 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 具有局部满意一致性. 否则，$\hat{\boldsymbol{A}}$ 不具有局部满意一致性.

证明　同定理 1.　证毕.

若 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 具有局部一致性，则一定具有局部满意一致性；若 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 不具有局部满意一致性，由 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 导出的权重不可靠，其结果不能作为决策依据.

定理 3　按定义 3 随机生成 N 个确定性判断矩阵 $\boldsymbol{A}$，记作 $\boldsymbol{A}^1,\cdots,\boldsymbol{A}^N$，若存在 t 个 $\boldsymbol{A}$ 具有满意一致性（$CR(\boldsymbol{A}) \leqslant 0.1$），则 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的整体一致性 η 可用 $\frac{t}{N} \times 100\%$ 表示.

证明　定义 3 随机生成的任意一个判断矩阵，能局部反映 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的特性. 在实际应用时，可随机生成一个满意一致的判断矩阵近似作为决策者的偏好. 随机生成 N 个（N 足够大）确定性判断矩阵，若满足 $CR(\boldsymbol{A}) \leqslant 0.1$ 的判断矩阵数量 t 越多，则可近似作为决策者偏好的判断矩阵越多，说明 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的一致性越好，反之越差，因此，可用 $\eta = \frac{t}{N} \times 100\%$ 来反映 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的整体一致性.　证毕.

若 $\eta > 0$，则 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 具有局部满意一致性. η 较小时（一般 $\eta < 60\%$），$\hat{\boldsymbol{A}}$ 的整体一致性较差；反之则较好（$\eta \geqslant 60\%$）. 就群决策背景，若 η 较大，则表明专家的意见比较集中. 在求解权重前，应根据上述结论分析一致性，对不具有局部满意一致性或整体一致性较差的判断矩阵应进行改进.

3　两种权重求解方法

3.1　方法 1：基于未确知数运算法则方法

针对 UNAHP 判断矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的特点，提出两种求解权重的方法，两种方法充分利用了决策者的判断信息，能获得比区间数等方法更为详尽的结果.

求解思路简述如下：按文献[10] 给出的未确知数的运算法则，对 UNAHP 判断矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$，令其元素直接参与 AHP 排序公式的计算，从而导出 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的权重. 以 AHP 的行和归一化排序方法为例，其权重求解公式为 $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$，对 $\hat{\boldsymbol{A}}$，将 $\hat{a}_{ij}$ 代入上述公式，可得 $\hat{w}_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij}$，$i = 1,\cdots,n$，$\hat{w}_i$ 为未确知数，求其数学期望 $E(\hat{w}_i)$，可得方案的期望权重，求解过程中涉及未确知数的运算法则见附录.

3.2　方法 2：蒙特卡罗模拟方法

蒙特卡罗（monte carlo，MC）模拟方法在处理不确定决策问题时得到了广泛应用[11,12]. 本文在现有研究成果基础上，设计求解 UNAHP 判断矩阵权重的方法.

对 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 根据定义 3 生成 N 个判断矩阵 $\boldsymbol{A}^I$，$I = 1,\cdots,N$，若 $CR(\boldsymbol{A}^I) \leqslant 0.1$，求解其相应的权重 $\boldsymbol{w}^I = (w_1^I,\cdots,w_n^I)^{\mathrm{T}}$，记 $w_i^L = \min\limits_{I=1,\cdots,N} w_i^I$，$w_i^U = \max\limits_{I=1,\cdots,N} w_i^I$，则权重可用区间数 $\overline{w}_i = [w_i^L, w_i^U]$ 表示；记 w_i^I 为第 i 个方案在第 I 个判断矩阵中的权重，$Rank_i^j$ 为 w_i^I，排在第 j 位的累计次数；t 为具有满意一致性（$CR(\boldsymbol{A}^I) \leqslant 0.1$）判断矩阵的个数，计算 $Rank_i^j$、$\eta = \frac{t}{N}$，及 w_i 的均值.

需要说明，① 在 η 数值较小时，应对 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 进行相应调整；② 方法 2 根据可信度大小模拟不同的判断值，计算量较大，结果用区间数表示. 对盲数 AHP 判断矩阵，若用方法 1 求解，涉及区间数运算，将导致区间数的不确定性增加，建议用方法 2 求解；③ 此外，对于判断矩阵内含部分确定数、部分未确知数的情况，方法 1 和 2 同样适用.

4　算例分析

例 1　用文献[1] 的例子，从三个候选人中选拔最合适的办公室主任，评价准则是工作能力、学识水

平、人际关系，假设基于工作能力准则进行比较，得到一个未确知有理数判断矩阵 $\hat{A}$（下三角部分的元素由互反性给出；$\hat{a}_{ij}$ 为 3 阶未确知有理数）.

$\hat{a}_{12}$	$\hat{a}_{13}$	$\hat{a}_{23}$
(4,70%)	(1,60%)	(1/8,50%)
(6,10%)	(1/2,30%)	(1/6,20%)
(1,20%)	(2,10%)	(1/5,30%)

令 $N = 200$，求得 $\hat{A}$ 的整体一致性 $\eta = 73.5\%$，数值较大，说明其整体一致性较好. 用方法 1 得到结果见表 1，候选人 1 的权重取 0.439 4 的可能性为 56%，候选人 3 的权重分别有 40% 的可能性取 0.477 8 和 0.597 4，由权重的数学期望，候选人 1 和 3 的比较接近，候选人 3 略优于候选人 1，候选人 2 的权重明显小于候选人 1 和 3，三个候选人的优先排序为 $w_3 > w_1 > w_2$.

表 1 基于未确知数运算法则的权重结果

Table 1 Weight result based on the calculation rule of unascertained numbers

阶数	权重		
	$\hat{w}_1$	$\hat{w}_2$	$\hat{w}_3$
1	(0.271,26%)	(0.080 8,56%)	(0.353,20%)
2	(0.439 4,56%)	(0.117 5,30%)	(0.447 8,40%)
3	(0.615 4,18%)	(0.153 4,14%)	(0.597 4,40%)
$E(\hat{w}_i)$	0.427 3	0.102	0.500 7

用方法 2，200 次模拟结果见表 2. 由表 2，在工作能力准则下，依据平均权重，三个候选人优先排序为 $w_3 > w_1 > w_2$，候选人 1 和 3 的权重比较接近，候选人 1 排在第 1 名的次数为 38 次，候选人 3 有 109 次排在第 1 名，而候选人 2 的权重明显小于候选人 1 和 3. 方法 1 和方法 2 对候选人基于工作能力准则的排序相同.

下面将本文方法与加权方法、区间数方法进行比较，若采用加权方法处理，则得到一个确定性判断矩阵（上三角元素 $a_{12} = 3.6, a_{13} = 0.95, a_{23} = 0.156$），其权重为 $w_1 = 0.402, w_2 = 0.093\,7, w_3 = 0.504\,3$，与本文方法结果的平均值相近；若用区间数方法，则得到一个区间数判断矩阵（上三角元素 $\overline{a}_{12} = [1,6], \overline{a}_{13} = [1/2,2], \overline{a}_{23} = [1/8,1/5]$），其权重为 $\overline{w}_1 = [0.230\,5,\ 0.559\,4]$，$\overline{w}_2 = [0.068, 0.17]$，$\overline{w}_3 = [0.358\,9, 0.623]$，结果与蒙特卡罗模拟方法的上、下限结果相近. 但基于未确知数运算法则和蒙特卡罗模拟的方法，都考虑决策者不同可信度的偏好，因此，提供了更多的决策信息，这是本文方法的特点.

表 2 蒙特卡罗模拟的权重结果

Table 2 Weight result based on Monte Carlo simulation approach

	$\overline{w}$	Mean	$Rank_i^1$	$Rank_i^2$	$Rank_i^3$
$\overline{w}_1$	[0.224 7,0.631 6]	0.421 0	38	109	0
$\overline{w}_2$	[0.052 6,0.165 5]	0.085 8	0	0	147
$\overline{w}_3$	[0.315 8,0.609 8]	0.493 2	109	38	0

例 2 问题同例 1，增加一候选人. 设 30 个专家共同评议，基于工作能力准则统计专家偏好的分布（若认为专家的可信度 $\alpha = 1$），得到如下盲数 AHP 判断矩阵 $\hat{A}$.

$\hat{a}_{12}$	$\hat{a}_{13}$	$\hat{a}_{14}$	$\hat{a}_{23}$	$\hat{a}_{24}$	$\hat{a}_{34}$
([3 - 4],50%)	([1 - 2],30%)	([2 - 3],20%)	([1/6 - 1/5],60%)	([1/2 - 1],70%)	([3 - 4],50%)
([2 - 3],30%)	([1/2 - 1],30%)	([3 - 4],60%)	([1/2 - 1],20%)	([2 - 3],10%)	([2 - 3],40%)
([1/2 - 1],20%)	([2 - 3],40%)	([1/2 - 2],20%)	([1/4 - 1/3],20%)	([1 - 2],20%)	([1 - 2],10%)

在 $N = 200$ 时得 $\hat{A}$ 的整体一致性为 $\eta = 70\%$，整体一致性较好. 用方法 2，200 次模拟结果见表 3. 由表 3，在工作能力准则下，依据权重平均值大小得优先排序为 $w_1 > w_3 > w_4 > w_2$，候选人 1 明显优于其它三个候选人，候选人 2 和 4 的平均权重接近，在 200 次模拟中，候选人 2 有 51 次排在候选人 4 之前，而候选人 4 有 89 次排在候选人 2 之前，说明候选人 4 略优于候选人 2.

表 3 基于蒙特卡罗模拟的权重结果

Table 3 Weight result based on Monte Carlo simulation approach

	$\overline{w}$	Mean	$Rank_i^1$	$Rank_i^2$	$Rank_i^3$	$Rank_i^4$
$\overline{w}_1$	[0.235 0, 0.522 3]	0.405 3	90	50	0	0
$\overline{w}_2$	[0.080 0, 0.212 1]	0.116 4	0	0	51	89
$\overline{w}_3$	[0.186 9,0.500 5]	0.352 5	50	90	0	0
$\overline{w}_4$	[0.080 9,0.213 5]	0.125 7	0	0	89	51

决策者可以用同样的方法求得候选人在学识水平、人际关系准则下的权重，之后，按照 AHP 的权重组合理论得到某一候选人的综合权重，从

而为决策提供参考.

5 结 论

将未确知数引入 AHP 之中，是不确定性研究的一个有益补充，能满足在一些不确定情况下的决策需要，它的一致性检验和权重求解简便，实用性较强.对这种新型 AHP 方法，权重的其它有效求解方法、以及如何改进一致性较差的判断矩阵等问题需进一步研究.

参考文献:

[1]许树柏.层次分析法原理[M].天津：天津大学出版社，1986.
Xu Shubai. Theory of the Analytical Hierarchy Process[M]. Tianjin: Tianjin University Publishing House, 1986. (in Chinese)

[2]Saaty T L. Highlights and critical points in the theory and application of the analytic hierarchy process[J]. European Journal of Operational Research, 1994, 74(3): 426—447.

[3]Lee M, Pham H. A methodology for priority setting with application to software development process[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 118(2): 375—389.

[4]Bryson N, Joseph A. Generating consensus priority interval vectors for group decision-making in the AHP[J]. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 2000, 9(4): 127—137.

[5]Buckley J, Feuring T, Hayashi Y. Fuzzy hierarchical analysis revisited[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129(1): 48—64.

[6]Zhu K, Jing Y. A discussion on extent analysis method and applications of fuzzy AHP[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 116(2): 450—456.

[7]Basak I. Probabilistic judgments specified partially in the Analytic Hierarchy Process[J]. European Journal of Operational Research, 1998, 108(1): 153—164.

[8]Haines L. A statistical approach to the analytic hierarchy process with interval judgments distributions on feasible regions[J]. European Journal of Operational Research, 1998, 110(1): 112—125.

[9]赵春梅，陆君安，卢兆明.层次分析法中群组决策的计算机仿真[J].计算机仿真，2001，18(5)：56—58.
Zhao Chunmei, Lu Junan, Lu Zhaoming. Simulation approach of group decision in the analytic hierarchy process[J]. Computer Simulation, 2001, 18(5): 56—58.(in Chinese)

[10]刘开第，吴和琴，庞彦军等.不确定性信息数学处理及应用[M].北京：科学出版社，1999.
Liu Kaidi, Wu Heqing, Pang Yanjun. Mathematics Approach and Application on Uncertainty Information[M]. Beijing: Science Publishing House, 1999.(in Chinese)

[11]Ahn B. The analytic hierarchy process in an uncertain environment: A simulation approach by Hauser and Tadikamalla (1996)[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 124(1): 217—218.

[12]Carmone F, Kara A, Zanakis S. A Monte Carlo investigation of incomplete pair wise comparison matrices in AHP[J]. European Journal of Operations Research, 1997, 102(3): 538—553.

Research on and application of new uncertainty model in analytical hierarchy process

ZHU Jian-jun[1], *WANG Meng-guang*[2], *LIU Shi-xin*[2]

1.College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2.School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China

Abstract: Decision-makers' preferences cannot be expressed correctly sometimes either via the original approaches or their extensions in the Analytical Hierarchy Process (AHP) under some uncertain decision environments. In addition, information distortion is inevitable when integrating multiple experts' preferences. To solve these problems, comparison matrices following discrete distribution are studied, and unascertained numbers are introduced into the matrix. Moreover, the consistency property of the unascertained number comparison matrix is analyzed. The local consistency indexes and the whole consistency indexes are developed to test the consistency of the unascertained numbers matrix. Two weighting approaches are put forward based on the property of this new uncertain model. One is based on the calculation rule of unascertained numbers, and the other is via the Monte Carlo simulation approach. The practicality is illustrated two examples.

Key words: analytical hierarchy process; uncertainty; group decisions; unascertained number

附录:

设未确知数 $\hat{Q}_A = \begin{cases}(x_1, f(x_1))\\ \cdots\cdots \\ (x_n, f(x_n))\end{cases}$, $\hat{Q}_B = \begin{cases}(y_1, g(y_1))\\ \cdots\cdots \\ (y_m, g(y_m))\end{cases}$,称图1为可能值带边和矩阵,图2为可信度带边积矩阵. 将图1内 $n \times m$ 个可能值 $x_i + y_j$ 从小到大排列(相同元素进行合并),记作 $v_1, \cdots, v_l$,将图2中相应 $n \times m$ 个可信度 $f(x_i)g(y_j)$ 排成一序列(相同可能值元素可信度相加),记作 $h(v_1), \cdots, h(v_l)$,则 $\hat{Q}_A + \hat{Q}_B = \begin{cases}(v_1, h(v_1))\\ \cdots\cdots \\ (v_l, h(v_l))\end{cases}$, $l \leq n \times m$,在高阶未确知数运算时,采用合并可信度的方法进行降阶运算. 未确知数的减、乘、除运算将图1中的"+"换成"-"、"×"、"÷",图2可信度带边积矩阵不变,详细内容参见文献[10].

$$\begin{array}{c|cccc}
x_1 & x_1+y_1 & x_1+y_2 & \cdots & x_1+y_m \\
\cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_n & x_n+y_1 & x_n+y_2 & \cdots & x_n+y_m \\
\hline
+ & y_1 & y_2 & \cdots & y_m
\end{array}$$

图1 可能值带边和矩阵

Fig.1 Possible value matrix with side summation

$$\begin{array}{c|cccc}
f(x_1) & f(x_1)g(y_1) & f(x_1)g(y_2) & \cdots & f(x_1)g(y_m) \\
\cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
f(x_n) & f(x_n)g(y_1) & f(x_n)g(y_2) & \cdots & f(x_n)g(y_m) \\
\hline
\times & g(y_1) & g(y_2) & \cdots & g(y_m)
\end{array}$$

图2 可信度带边积矩阵

Fig.2 Reliability matrix with side multiplication