不同存贷利率下极大化终止时刻期望效用①

杨招军，黄立宏
（湖南大学数学与计量经济学院，长沙 410082）

摘 要：假设投资者具有效用函数 $U(x)=x^{\rho}/\rho, 0<\rho<1$，基于贷款利率高于存款利率的实际，运用随机分析中的Itô公式，得到了个体投资者极大化期望终止效用的最优投资策略显式解，该策略易于投资者操作使用.

关键词：风险资产投资；随机最优控制；试探求解法；Itô公式；显式解

中图分类号：F830.9 **文献标识码**：A **文章编号**：1007-9807(2005)05-0050-05

0 引 言

投资可简单地分为风险投资与无风险投资，如何按不同的比例分配有限的财富，投资于风险资产（如股票）与无风险资产（如储蓄），是每个投资者经常面临的投资选择问题.连续情形下投资消费问题的研究始于 Merton[1,2].文献[1,2]假设投资者效用函数为双曲绝对风险回避函数(HARA)，对常系数模型得到了最优投资消费策略闭式解.在同样的模型假设下，文献[3]推广了 Merton 的结果，对一般性效用函数得到显式解.目前，投资消费问题仍然引起人们的广泛兴趣[4~9].以上研究有一个共同的前提：存款利率与贷款利率是相同的.众所周知，贷款利率始终高于存款利率，其利率差无疑会对投资者的决策产生重大影响.这种影响值得进行深入的探讨.在有存贷利率差情形下研究投资问题，已有一些结果[10~12]，但这些研究讨论的是企业若干不同目标下的投资策略.本文假设投资者具有效用函数

$$U(x)=x^{\rho}/\rho, 0<\rho<1 \tag{1}$$

从贷款利率高于存款利率的实际出发，运用随机分析中的Itô公式，给出了求解极大化期望终止效用的最优投资问题的新途径，其主要思想是在不十分严格的推导下直接导出可能的最优解，然后运用随机分析方法给出充分性证明，最后得到个体投资者极大化期望终止效用的最优投资策略显式解，该策略特别易于投资者操作使用.

1 投资模型

考虑投资者在时间段$[0,T]$内的组合投资问题.投资者面临的经济环境是不确定的，它随着时间变化.为刻画这种随机环境，引入赋有σ-域流$\{F_t\}_{0\le t\le T}$的概率空间$(\Omega,F,P,\{F_t\}_{0\le t\le T})$，其中，$F_t$表示投资者在时刻$t$掌握的所有信息.每个$\omega\in\Omega$代表直到时刻$T$才最终确定的一个经济状态.由实际出发，假设贷款利率R与存款利率r不同，贷款利率高于存款利率，即$R>r>0$.建立具有两种资产的金融市场（严格说有三种资产）价格动态系统

$$\begin{cases}dB_t=vB_t\mathrm{d}t\\ dS_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t\end{cases} \tag{2}$$

其中：$v=R, v=r$；B为无风险资产价格；S为风险资产价格；W为F_t适应的布朗运动；$\mu>R>r>0, \sigma>0$，均为常数.于是，投资者的决策问题成为：在任意时刻$t(0\le t\le T)$，确定风险投资比例π_t、贷款比例ξ_t以及存款比例ς_t，使投资者在某种意义下满意程度最高.这里假设投资者具有

① 收稿日期：2003-05-09；修订日期：2005-01-16.
基金项目：湖南省自然科学基金资助项目(04JJ3009)；湖南大学校基金重点项目.
作者简介：杨招军(1964—)，男，湖南邵阳人，博士，教授.

式(1)确定的效用函数，满意程度是由终止时刻期望效用刻画的. 作为理性投资者，其策略应是可行的.

定义1　投资者的一个可行策略$\{\pi_t,\xi_t,\varsigma_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$，是指满足如下条件的随机过程

1) 随机过程$\{\pi_t,\xi_t,\varsigma_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$是$F_t$适应的；

2) 不等式$\int_0^T \pi_t^2 dt < \infty, X_t \geqslant 0 (0\leqslant t\leqslant T)$几乎处处成立；

3) 对每个$t\in[0,T]$，$\pi_t-\xi_t+\varsigma_t=1$，$\xi_t\geqslant 0,\varsigma_t\geqslant 0$.

条件1)的经济意义是投资者只能依据现有的信息进行决策，投资者没有"先知先觉"功能，不能准确预测未来价格的变化；条件2)的经济意义是投资者不能"恶意"透支；条件3)是预算恒等式.

记所有可行策略的集合为A. 已知投资者初始财富$X_0>0$，在任意时刻t的财富总量为$X_t(0\leqslant t\leqslant T)$，在整个时间段$[0,T]$并不追加投资，也不抽出财富挪用，即采用自融资(self-financing)策略，于是，对于可行策略$\{\pi_t,\xi_t,\varsigma_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$，导出财富过程$X$满足如下随机微分方程

$$dX_t=[r+\pi_t(\mu-r)-\xi_t(R-r)]\cdot X_t dt+\sigma\pi_t X_t dW_t,(0\leqslant t\leqslant T) \tag{3}$$

综上所述，投资者的最优投资策略就是如下随机动态规划问题的最优解。

$$\underset{\{\pi_t,\xi_t,\varsigma_t\}\in A}{\mathrm{Max}} E\left[\frac{1}{\rho}X_T^\rho\right] \tag{4}$$

其中

$$dX_t=[r+\pi_t(\mu-r)-\xi_t(R-r)]\cdot X_t dt+\sigma\pi_t X_t dW_t \quad (0\leqslant t\leqslant T), X_0>0 \tag{5}$$

2　最优策略的试探求解

由 Itô 公式，对任何t，有

$$U(X_T)=U(X_t)+\int_t^T[U'(X_u)\cdot(r+\pi_u(\mu-r)-\xi_u(R-r))X_u+\frac{1}{2}U''(X_u)\cdot\sigma\pi_u^2X_u^2]du+\int_t^T U'(X_u)\sigma\pi_u X_u dW_u \tag{6}$$

将式(1)代入式(6)，取$t=0$，得

$$\frac{1}{\rho}X_T^\rho=\frac{1}{\rho}X_0^\rho+\int_0^T[X_u^\rho(r+\pi_u(\mu-r)-\xi_u(R-r))+\frac{1}{2}(\rho-1)X_u^\rho\sigma^2\pi_u^2]\cdot du+\int_0^T X_u^\rho\sigma\pi_u dW_u \tag{7}$$

假设

$$E\left[\int_0^T X_u^{2\rho}\sigma^2\pi_u^2 du\right]<\infty$$

则由 Itô 积分性质，有

$$E\left[\frac{1}{\rho}X_T^\rho\right]=\frac{1}{\rho}X_0^\rho+E\left[\int_0^T[(r+\pi_u\cdot(\mu-r)-\xi_u(R-r))+\frac{1}{2}(\rho-1)\sigma^2\pi_u^2]X_u^\rho du\right] \tag{8}$$

由此看出，式(4)，(5)的一个可能最优解为选择可行策略$\{\pi_t,\xi_t,\varsigma_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$，使

$$(r+\pi_u(\mu-r)-\xi_u(R-r))+\frac{1}{2}(\rho-1)\sigma^2\pi_u^2 \tag{9}$$

取最大值. 因此，等价地，求解如下非线性规划问题

$$(\mathrm{NP}):\underset{\pi_u,\xi_u}{\mathrm{Min}}\left\{\frac{1}{2}(1-\rho)\sigma^2\pi_u^2-\pi_u(\mu-r)+\xi_u(R-r)-r\right\}$$
$$\mathrm{s.t.}\begin{cases}\xi_u-\pi_u+1\geqslant 0\\ \xi_u\geqslant 0\end{cases} \tag{10}$$

作拉格朗日函数

$$L(\pi_u,\xi_u,\lambda_1,\lambda_2)\equiv\frac{1}{2}(1-\rho)\sigma^2\pi_u^2-\pi_u(\mu-r)+\xi_u(R-r)-r-\lambda_1(\xi_u-\pi_u+1)-\lambda_2\xi_u \tag{11}$$

根据非线性规划原理，可得

引理1　若$(\pi_u^*,\xi_u^*,\lambda_1,\lambda_2)$满足

$$\begin{cases}L_{\pi_u}=(1-\rho)\sigma^2\pi_u-\mu+r+\lambda_1=0 & \text{(i)}\\ L_{\xi_u}=(R-r)-\lambda_1-\lambda_2=0 & \text{(ii)}\\ L_{\lambda_1}=-(\xi_u-\pi_u+1)\leqslant 0 & \text{(iii)}\\ L_{\lambda_2}=-\xi_u\leqslant 0 & \text{(iv)}\\ \lambda_1\geqslant 0,\ \lambda_2\geqslant 0 & \text{(v)}\\ \lambda_1(\xi_u-\pi_u+1)+\lambda_2\xi_u=0 & \text{(vi)}\end{cases} \tag{12}$$

则$(\pi_u^*,\xi_u^*,\lambda_1,\lambda_2)$是非线性规划问题(10)的解.

为求解式(12),引入记号

$$\theta^- \equiv \frac{\mu - R}{(1-\rho)\sigma^2},\ \theta^+ \equiv \frac{\mu - r}{(1-\rho)\sigma^2} \tag{13}$$

显然有$\theta^- < \theta^+$.由式(12)的(ii),(vi)看出

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = R - r \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\xi_u + \lambda_1(1-\pi_u) = 0\end{cases} \tag{14}$$

因而有

$$(\pi_u - 1)\lambda_1 = (R - r)\xi_u \tag{15}$$

若$\pi_u \neq 1$,则由式(15)与式(12)的(ii),得

$$\lambda_1 = \frac{(R-r)\xi_u}{\pi_u - 1}$$

$$\lambda_2 = \frac{(R-r)(\pi_u - 1 - \xi_u)}{\pi_u - 1} \tag{16}$$

分情况讨论如下:

1)假设$\pi_u > 1$.则由式(12)的(iii),得$\xi_u \geqslant \pi_u - 1 > 0$.另一方面,由式(12)的(v)及式(16)知$\pi_u - 1 \geqslant \xi_u$,得$\xi_u = \pi_u - 1$.于是,由式(16)推出$\lambda_1 = R - r$,代入式(12)的(i),导出$\pi_u = \theta^-$.

2)假设$\pi_u < 1$.则由式(16)及式(12)的(v),得$\xi_u \leqslant 0$,并结合式(12)的(iv),导出$\xi_u = 0$.故式(16)得$\lambda_1 = 0$.于是,由式(12)的(i)得$\pi_u = \theta^+$.

3)假设$\pi_u = 1$.则由式(12)的(i),得

$$\lambda_1 = \mu - r - (1-\rho)\sigma^2 \tag{17}$$

由式(12)的(v),有

$$\mu - r \geqslant (1-\rho)\sigma^2 \tag{18}$$

即$\theta^+ \geqslant 1$成立.将式(17)代入式(12)的(ii),得

$$\lambda_2 = R - \mu + (1-\rho)\sigma^2 \tag{19}$$

由式(12)的(v),推出

$$\mu - R \leqslant (1-\rho)\sigma^2 \tag{20}$$

即$\theta^- \leqslant 1$成立.同时,由式(12)的(vi)及(ii),显然有$\xi_u = 0$.

综上所述,并结合引理1,容易得到

定理1　最优化问题(10)的最优解(π_u^*,ξ_u^*)为:若$\theta^- > 1$,则$\pi_u^* = \theta^-$;$\xi_u^* = \theta^- - 1$.若$\theta^+ < 1$,则$\pi_u^* = \theta^+$;$\xi_u^* = 0$;最后,若$\theta^- \leqslant 1$且$\theta^+ \geqslant 1$,则,$\pi_u^* = 1$,$\xi_u^* = 0$.

定理1确定的策略使式(8)的被积函数取最大值,它是可能的最优解,但还不能肯定确是如此,称它为试探解.这是因为当前策略影响后面时刻财富的变化,故“局部”最优不一定是“全局”最优.

3　最优策略的充分性证明

为简化叙述,记

$$\begin{aligned}\beta_1 &\equiv R\rho + \frac{(\mu - R)^2\rho}{2(1-\rho)\sigma^2} \\ \beta_2 &\equiv r\rho + \frac{(\mu - r)^2\rho}{2(1-\rho)\sigma^2} \\ \bar{\beta} &\equiv \mu\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma^2 + \frac{1}{2}\rho^2\sigma^2\end{aligned} \tag{21}$$

以及对应策略$\{\pi_u,\xi_u,\varsigma_u\}_{0\leqslant u\leqslant T}$的$t$时刻条件目标函数值

$$J^{\pi,\xi,\varsigma}(t,X_t) \equiv E\left[\frac{1}{\rho}X_T^\rho \mid F_t\right] \tag{22}$$

又记

$$\beta \equiv \begin{cases}\beta_1, 若\ \theta^- > 1 \\ \beta_2, 若\ \theta^+ < 1 \\ \bar{\beta}, 若\ \theta^- \leqslant 1, \theta^+ \geqslant 1\end{cases} \tag{23}$$

定理2　若投资者选择如下策略$\{\pi_u,\xi_u,\varsigma_u\}_{0\leqslant u\leqslant T}$:

$$\begin{cases}\pi_u^* = \theta^-, \xi_u^* = \theta^- - 1, \varsigma_u = 0, 若\ \theta^- > 1 \\ \pi_u^* = \theta^+, \xi_u^* = 0, \varsigma_u = 1 - \theta^+, 若\ \theta^+ < 1 \\ \pi_u^* = 1, \xi_u^* = 0, \varsigma_u = 0, 若\ \theta^- \leqslant 1, \theta^+ \geqslant 1\end{cases} \tag{24}$$

则有

$$J^{\pi^*,\xi^*,\varsigma^*}(t,X_t) \equiv \frac{1}{\rho}X_t^\rho\exp(\beta(T-t)), 0 \leqslant t \leqslant T \tag{25}$$

证明　若$\theta^- \leqslant 1$,且$\theta^+ \geqslant 1$,将策略$\{\pi_u,\xi_u,\varsigma_u\}_{0\leqslant u\leqslant T}$代入式(5),得

$$\mathrm{d}X_u = \mu X_u\mathrm{d}u + \sigma X_u\mathrm{d}W_u,\ 0 \leqslant u \leqslant T$$

解之,得

$$X_T = X_t\exp\Big(\Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\Big) \tag{26}$$

将式(26)代入目标函数(22),推出定理相应结论成立.其他情形的证明类似,兹略.

定理3　式(24)给出的策略是优化问题(4),(5)的最优解.在任意时刻$t(0 \leqslant t \leqslant T)$的条件最优目标函数为$J^{\pi^*,\xi^*,\varsigma^*}(t,X_t)$.特别地,优化问题(4)、(5)的最优目标函数为

$$J^{\pi^*,\xi^*,\varsigma^*}(0,X_0)=\frac{1}{\rho}X_0^\rho\exp(\beta T) \tag{27}$$

证明　设$\{\pi_u,\xi_u,\varsigma_u\}_{0\leqslant u\leqslant T}$为任一容许策略，$X$是由式(5)确定的相应财富过程.对任意给定时刻$t$，定义停时序列

$$T_n\equiv\left(T-\frac{1}{n}\right)^+\wedge\inf\left\{u\in[0,T];\right.$$
$$X_u\geqslant n,\text{或 }X_u\leqslant\frac{1}{n},$$
$$\left.\text{或}\int_0^u\|\pi_\tau\|^2\mathrm{d}\tau=n\right\} \tag{28}$$

由 Itô 积分性质，有 $E\left[\int_t^{T_n}\exp(\beta(T-\mu))X_u^\rho\sigma\pi_u\mathrm{d}W_u\right]=0$.由 Itô 公式，得

$$0\leqslant E\left[\frac{1}{\rho}X_{T_n}^\rho\exp(\beta(T-T_n))\mid F_t\right]=$$
$$\frac{1}{\rho}X_t^\rho\exp(\beta(T-t))+$$
$$E\left[\int_t^{T_n}\exp(\beta(T-u))\cdot\right.$$
$$X_u^\rho(-\frac{\beta}{\rho}+r+\pi_u(\mu-r)-$$
$$\left.\xi_u(R-r)+\frac{1}{2}(\rho-1)\sigma^2\pi_u^2)\mathrm{d}u\mid F_t\right]$$

根据定理1，容易得出

$$-\frac{\beta}{\rho}+r+\pi_u(\mu-r)-\xi_u(R-r)+$$
$$\frac{1}{2}(\rho-1)\sigma^2\pi_u^2\leqslant 0$$

其中，只有当容许策略$\{\pi_u,\xi_u,\varsigma_u\}_{0\leqslant u\leqslant T}$为$\{\pi_u^*,\xi_u^*,\varsigma_u^*\}_{0\leqslant u\leqslant T}$时，等式才成立.于是，得出

$$0\leqslant E\left[\frac{1}{\rho}X_{T_n}^\rho\exp(\beta(T-T_n))\mid F_t\right]\leqslant$$
$$\frac{1}{\rho}X_t^\rho\exp(\beta(T-t))$$

因此，由 Fatou 引理，得

$$E\left[\frac{1}{\rho}X_T^\rho\mid F_t\right]=$$
$$E\left[\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\rho}X_{T_n}^\rho\exp(\beta(T-T_n))\mid F_t\right]\leqslant$$
$$\liminf_{n\to\infty}E\left[\frac{1}{\rho}X_{T_n}^\rho\exp(\beta(T-T_n))\mid F_t\right]\leqslant$$
$$\frac{1}{\rho}X_t^\rho\exp(\beta(T-t)) \tag{29}$$

对任一容许策略$\{\pi_u,\xi_u,\varsigma_u\}_{0\leqslant u\leqslant T}$均成立.容易看出，容许策略取为式(24)时，式(29)成为等式，故式(24)确定的策略为最优投资策略.定理的余下部分是显然的.

1）最优投资比例$\{\pi_u^*,\xi_u^*,\varsigma_u^*\}_{0\leqslant u\leqslant T}$表明，在任意时刻$u(0\leqslant u\leqslant T)$，风险资产购买量为$\pi_u^*X_u$，贷款额为$\xi_u^*X_u$，存款额为$\varsigma_u^*X_u$，从中容易看出存贷利率差对投资者的具体影响；2）从最优解$\{\pi_u^*,\xi_u^*,\varsigma_u^*\}_{0\leqslant u\leqslant T}$看出，若贷款额为正值，则不存款，若存款为正值，则不贷款，这与直观结论是一致的；3）也可采用随机动态规划求解这一问题，但最后需求解一个难以求解的二阶偏微分方程，本文避免了这种困难的计算；4）本文得到的投资策略，可帮助投资者确定什么时候贷款，什么时候存款，存贷款数量，以及风险投资额，所有决策手算即可确定，易于实时操作；4）若存贷利率相同，即$R=r$，则由式(24)可得存贷利率相同时的最优投资策略，通过式(27)计算对应目标函数的差异，易于算出存贷利率不同对福利的影响.

4　结束语

在投资者具有幂效用函数的假设条件下，不同于通常存、贷利率相同的假设，本文基于贷款利率高于存款利率的实际，代替复杂的随机动态规划方法，用猜测－证明(guess and verify)的新方法，分析投资者的最优投资决策问题，得到了投资决策的显式解.研究结果切实可行，易于实时操作，对投资者的决策有直接的指导意义.

不同的投资者有不同的风险偏好(效用函数)，因而有必要研究其他效用函数下的对应投资决策问题，然而，一般难以得到显式解，猜测－证明法也很可能会失败，有待用其他方法深入研究；另一方面，为使模型更贴近实际，有必要引入交易成本、部分信息限制等，这些研究更复杂，但也更具实际意义.

参考文献：

[1]Merton R C. Portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case[J]. Rev. Econ. Statist., 1969, 51: 247—257.

[2]Merton R C. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model[J]. J. Econ. Theory, 1971, (3): 373—413.

[3]Karatzas I, Lehoczky J, Sethi S, *et al*. Explicit solution of a general consumption-investment problem[J]. Math. Oper. Res., 1986, 11: 261—294.

[4]Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: Exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Math. Oper. Res. , 1995, 20: 937—958.

[5]Browne S. Survival and growth with a liability: Optimal portfolio strategies in continuous time[J]. Math. Oper. Res. , 1997, 22: 468—493.

[6]Browne S. Risk constrained dynamic active portfolio management[J]. Management Science, 2000, 46(9): 1188—1199.

[7]Davis M H A, Norman A R. Portfolio selection with transaction costs[J]. Math. Oper. Res, 1990, 15: 676—713.

[8]Yang Z J, Ma C Q. Optimal trading strategy with partial information and the value of information: The simplified and generalized models[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2001, 4(5): 759—772.

[9]杨招军，李致中，邹捷中．部分信息下的最优投资消费策略显式解[J]．应用概率统计，2001，17(4)：390—398.
Yang Zhao-jun, Li Zhi-zhong, Zou Jie-zhong. An explicit solution to optimal investment and consumption with partial information [J]. Journal of Applied Probability and Statistics, 2001, 17(4): 390—398. (in Chinese)

[10]杨招军，李致中．债务固定的公司最优生存策略[J]．系统工程理论与实践，2000，20(5)：54—57.
Yang Zhao-jun, Li Zhi-zhong. The survival strategies for a company with fixed liabilities[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2000, 20(5): 54—57. (in Chinese)

[11]杨招军，李致中，刘再明．具有随机风险的公司最优投资策略[J]．应用数学，2000，13(4)：5—9.
Yang Zhao-jun, Li Zhi-zhong, Liu Zai-ming. Optimal investment policies for a firm with a random risk process[J]. Mathematica Applicata, 2000, 13(4): 5—9. (in Chinese)

[12]杨招军．债务固定的公司最优投资策略[J]．系统工程学报，2001，16(2)：138—141.
Yang Zhao-jun. Optimal strategies for a company with fixed liabilities[J]. Journal of Systems Engineering, 2001, 16(2): 138—141. (in Chinese)

[13]韩其恒，唐万生，李光泉．概率准则下的两期投资决策问题[J]．管理科学学报，2002，5(1)：55—58.
Han Qi-heng, Tang Wan-sheng, Li Guang-quan. Problem of two period investment decision-making with probability criterion[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(1): 55—58. (in Chinese)

[14]李洪江，曲晓飞，冯敬海．阶段性投资最优比例问题的实物期权方法[J]．管理科学学报，2003，6(1)：20—26.
Li Hong-jiang, Qu Xiao-fei, Feng Jing-hai. Definition of optimal proportion of phased investment: Real options approach[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(1): 20—26. (in Chinese)

Maximizing expected utility from terminal wealth under case of different rates between borrowing and saving

YANG Zhao-jun, *HUANG Li-hong*

College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082, China

Abstract: This paper studies the optimal investment strategies of maximizing expected utility from terminal wealth. According to the fact that the borrowing rate is higher than the saving rate, and by adoption of the utility function of $U(x) = x^{\rho}/\rho$, $0 < \rho < 1$ for the investor, we develop a new method of Guess-Verify instead of stochastic dynamic programming with Itô formula and nonlinear programming technique to solve the optimal investment strategies, which is easy to handle.

Key words: investment in risk asset; stochastic optimal control; methods of trial solution; Itô formula; explicit so-lutions