第8卷第5期
2005年10月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol.8 No.5
Oct. 2005

无分红股票期权的构造定价模型①

戴 锋，丁 锐，秦子夫
（解放军信息工程大学，郑州 450002）

摘要：利用偏尾分布与偏尾过程，首次提出了期权执行价格的DF构造，并在此基础上给出了股票无红利分配条件下期权定价的构造性解析模型——DF构造定价模型.该模型方法能够解决任意时刻提出执行的看涨或看跌期权定价问题，所以它既适用美式期权定价，也适用于欧式期权定价.最后，通过与Black-Scholes期权定价公式的对比实证分析，结果表明文章的结论是可靠的.

关键词：DF(Dai Feng)构造；无红利分配；期权定价；解析公式
中图分类号：F224　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007－9807(2005)05－0055－06

0 引 言

期权定价是世界经济与金融理论研究中一个具有核心意义的重要问题，合理的期权定价对金融衍生商品市场乃至世界金融市场的稳定有着极为重要的作用.文献[1]较完整地介绍了期权定价方法的研究状况，已有的期权定价模型与方法可重点参见文献[2～8].但对于不付红利股票的美式看跌期权定价尚未得出封闭的解析公式[9]，有关的近似方法则可参见文献[10～16].

实证分析的结果表明：偏尾分布与偏尾过程[17]能够在一定条件下较好地描述股票、商品价格及资产价值变化的结构特征[18].在偏尾分布的基础上，作者曾给出了一种期权定价模型[19]，但仍未真正有效地解决所希望解决的期权定价问题.

本文首次提出期权执行价格的DF(Dai Feng)构造，并在此基础上给出了股票无红利分配条件下期权定价的一种构造性解析模型.该模型方法能够解决任意时刻提出执行的看涨或看跌期权定价问题，所以它同时适用于美式期权和欧式期权定价.

1 关于股票价格的基本假设

作为讨论的基础，对股票价格提出以下基本假设：

1) 股票价格包括成本价格和市场价格.成本价格是指市场中所有交易商对股票的平均持有价格；市场价格是指股票的市场交易价格.

2) 决定股票的市场价格的基本因素是成本价格和成本价格波动幅度决定，并通过市场交易实现的.

3) 任何股票的成本价格及其波动幅度为正，任何股票的市场价格非负.

4) 对于逐渐远离成本价格的股票市场价格，其实现的可能性逐渐减小.

5) 股票市场价格的变化是连续的.

6) 市场交易没有交易费用或税收.

上面的6点假设共同简称为基本假设.

2 偏尾分布与DF构造

2.1 偏尾分布与股票价格结构分布

定义1(偏尾分布)　设S为非负随机变量且

① 收稿日期：2002－11－12；修订日期：2005－07－28.
作者简介：戴 锋(1958—)，男，安徽肥东人，教授，博士生导师.

具有如下分布密度

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Big/\int_0^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx & x\geqslant 0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \quad (1)$$

则称 S 服从偏尾分布,记为 $S\in P(\mu,\sigma^2)$.

偏尾分布实际上是非负单截尾正态分布,但它与正态分布不同的是,当 μ 由大变小时,分布曲线的峰区形状逐渐变尖,为了表述上的方便,称之为偏尾分布.该分布有两个基本特点:一是变量取负值的概率为零,这恰好与任何标的资产(如股票、期货等)价格均非负的特征相一致;二是变量取零值的概率非零.现有描述商品(股票)价格行为的对数正态分布,其变量取零值的概率为零.事实上,任何标的商品资产都可能在市场上出现零价格情形(如某些倒闭公司的股票,变质的药品、食品等).对 Levy 分布而言,变量取零值的概率非零,但除 Gaussion 分布(正态分布)和 Cauchy 分布(柯西分布)两种特例外无法表示成初等函数形式,而 Cauchy 分布的数学期望和方差不存在,这些都给实际应用带来不便.此外,依据偏尾分布可以得到定理 1 所给的两个重要结论,这是依据其它概率分布难以同时得到的.

定义 2(偏尾过程) 若随机变量 S 与时间有关,即 $\forall t\in[0,\infty)$ 均有 $S(t)\in P(\mu(t),\sigma^2(t))$,则称 $\{S(t),t\in[0,\infty)\}$ 为一个偏尾过程.

通常股票价格是随时间变化的,若 $\mu(t)$ 为股票在时刻 t 的成本价格,$\sigma^2(t)$ 为成本价格在时刻 t 的方差.如果某股票的市场价格满足前面的基本假设,那么在时刻 t,该股票市场价格变量 $S(t)$ 服从偏尾分布,记为 $S(t)\in P(\mu(t),\sigma^2(t))$.

以下若无特别说明,$S(t)\in(P(\mu(t),\sigma^2(t))$ 即可指股票,又可指股票的市场价格.根据文献[19],有定理 1 和定理 2.

定理 1 如果股票的市场价格 S 服从偏尾分布 $P(\mu,\sigma^2)$,那么

1) 股票市场价格 S 的数学期望,即股票的市场平均价格

$$E(X)=\int_0^\infty x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\Big/\int_0^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$\mu+\sigma^2 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\Big/\int_0^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \quad (2)$$

这里,$R(S)=\sigma^2 e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\Big/\int_0^\infty e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}}dx$ 可表示股票的市场平均交易利润.

2) 股票市场价格 S 的方差,即市场价格风险为

$$D(X)=\int_0^\infty[x-E(X)]^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\Big/\int_0^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$\sigma^2+E(S)[\mu-E(S)] \quad (3)$$

定理 2 对任意的 $x\in[0,\infty]$,下列等式近似成立

$$1)\int_0^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\times\left(\sqrt{1-e^{-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2}}+\operatorname{sgn}(x-\mu)\sqrt{1-e^{-\frac{2}{\pi}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}\right)$$

其中,$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

$$2)\int_0^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\left(\sqrt{1-e^{-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2}}+1\right).$$

2.2 DF 过程与 DF 构造

定义 3(DF 过程) 若 $\{\xi(t),t\in[0,\infty)\}$ 是一个偏尾过程,且 $\forall t\in[0,\infty)$ 有

$\xi(t)\in P(\mu(t),\sigma^2(t)t)$

则称 $\{\xi(t),t\in[0,\infty)\}$ 是一个戴锋(Dai Feng)过程,简称 DF 过程.

定义 4 若 a,b 为非负常数,

当 $a>0,b=0$ 时,定义 $e^{-\frac{a}{b}}=\lim\limits_{t\to0^+}e^{-\frac{a}{t}}=0$.

定义 4 是为了确保 $e^{-\infty}$ 有定义.

定义 5(DF 构造) 若 X 为与股票 $S(t)$ 相关的某项固定的资产价值,若 $\{X_S(t,T),t\in[0,\infty),T>t\}$ 是一个 DF 过程,且 $X_S(t,T)\in P(X,D[S(t)](T-t))$,则将 $X_S(t,T)$ 称为资产价值 X 关于股票 $S(t)$ 的 DF 随机构造,$X_S(t,T)$ 简称为 $S(t)$ 的一个 DF 构造.

由于 $t=T$ 时,$X_S(t,T)=X$,所以在不考虑利率贴现的情况下,随机构造 $X_S(t,T)$ 实际上是相当于时刻 T 价值为 X 的随机资产.

虽然股票与其 DF 构造在方差上具有某种关系，但它们各自的随机运动通常不存在必然的相互联系，所以一般可以认为股票 $S(t)$ 的 DF 构造 $X_S(t, T)$ 与 $S(t)$ 相互独立.

3　无分红股票期权的构造定价模型

3.1　假设与记法

为了建立股票无分红的期权的特点，给出

假设 3.1

1) 在股票期权的生命期内，股票不分红.

2) 无风险利率为常数.

3) 不存在无风险套利机会.

4) 期权交易是连续的.

如果不加特别说明，以下所有讨论均在假设 3.1 的条件下进行. 记

$S(t)$—— 股票在当前时刻 t 的市场价格；

X—— 期权的执行价格；

T—— 期权合约到期日；

r—— 无风险利率；

$S(t)e^{r(T-t)}$——$S(t)$ 的远期价值；

$X_S(t, T)$——X 关于 $S(t)e^{r(T-t)}$ 的 DF 构造；

C_S—— 购买一股看涨期权的价值；

P_S—— 出售一股看跌期权的价值.

若 $S(t) \in P(\mu(t), \sigma^2(t))$，且 $X_S(t,T) \in P(X, D[S(t)e^{r(T-t)}](T-t))$. 那么，便有如下的 DF 构造定价方法（简称为 DF 法）.

3.2　看涨期权的 DF 构造定价模型

结合定义 1、定义 5 和定理 2，并进行积分运算，便有如下看涨期权定价公式：

$$
\begin{aligned}
C_S(t) &= e^{-r(T-t)} E[\max(S(t)e^{r(T-t)} - X_S(t,T), 0)] = \\
&e^{-r(T-t)} \int_0^{S(t)e^{r(T-t)}} [S(t)e^{r(T-t)} - x] f_{X_S}(x)\mathrm{d}x = (S(t) - Xe^{-r(T-t)}) \times \\
&\left[\frac{\sqrt{1 - e^{-\frac{2(Xe^{-r(T-t)})^2}{\pi D[S(t)](T-t)}}} + \mathrm{sgn}(S(t)e^{r(T-t)} - X)\sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}\frac{(S(t)-Xe^{-r(T-t)})^2}{D[S(t)](T-t)}}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}\frac{X^2}{D[S(t)](T-t)}}}} \right] + \\
&\sqrt{\frac{2D[S(t)](T-t)}{\pi}} \left[\frac{e^{-\frac{(S(t)-Xe^{-r(T-t)})^2}{2D[S(t)](T-t)}} - e^{-\frac{(Xe^{-r(T-t)})^2}{2D[S(t)](T-t)}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}\frac{(Xe^{-r(T-t)})^2}{D[S(t)](T-t)}}}} \right]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

当看涨期权在未来任意时刻 $\tau \in [t, T]$ 被提出执行时，标的股票价格 $S(\tau)$ 相对合约便成为固定常数，于是 $D[S(\tau)] = 0$. 根据式(4) 及定义 4 知，该期权的当前价值为

$$C_S(\tau) = S(\tau) - Xe^{-r(T-\tau)},$$

$$\text{当 } S(\tau) > Xe^{-r(T-\tau)};$$

$$C_S(\tau) = 0, \quad \text{当 } S(\tau) \leqslant Xe^{-r(T-\tau)};$$

即 $C_S(\tau) = \max\{S(\tau) - Xe^{-r(T-\tau)}, 0\}$.

此时，该看涨期权的内涵价值为 $\max\{S(\tau) - X, 0\}$. 于是有

$$C_S(\tau) \geqslant \max\{S(\tau) - X, 0\} \tag{5}$$

3.3　看跌期权的 DF 构造定价模型

结合定义 1、定义 5 和定理 2，并进行积分运算，便有如下看跌期权的定价公式：

$$
\begin{aligned}
P_S(t) &= e^{-r(T-t)} E[\max(X_S(t,T) - S(t)e^{r(T-t)}, 0)] = \\
&e^{-r(T-t)} \int_{S(t)e^{r(T-t)}}^{\infty} [x - S(t)e^{r(T-t)}] f_{X_S}(x)\mathrm{d}x = (Xe^{-r(T-t)} - S(t)) \times \\
&\left[\frac{1 - \mathrm{sgn}[S(t)e^{r(T-t)} - X]\sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}\frac{(S(t)-Xe^{-r(T-t)})^2}{D[S(t)](T-t)}}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}\frac{(Xe^{-r(T-t)})^2}{D[S(t)](T-t)}}}} \right] + \sqrt{\frac{2D[S(t)](T-t)}{\pi}} \left[\frac{e^{-\frac{(S(t)-Xe^{-r(T-t)})^2}{2D[S(t)](T-t)}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}\frac{(Xe^{-r(T-t)})^2}{D[S(t)](T-t)}}}} \right]
\end{aligned}
\tag{6}
$$

当看跌期权在时刻 $\tau \in [t, T]$ 被提出执行时，$D[S(\tau)] = 0$，根据式(6) 及定义 4 有

$$P_S(\tau) = Xe^{-r(T-\tau)} - S(\tau),$$

$$\text{当 } S(\tau) < Xe^{-r(T-\tau)};$$

$P_S(\tau) = 0$, 当 $S(\tau) \geqslant Xe^{-r(T-\tau)}$;

即

$$P_S(\tau) = \max\{Xe^{-r(T-\tau)} - S(\tau), 0\}.$$

此时,该看跌期权的内涵价值为 $\max\{X - S(\tau), 0\}$. 于是有

$$P_S(\tau) \leqslant \max\{X - S(\tau), 0\} \quad (7)$$

从式(4)和(6)可以看出,期权价值有两部分构成,一部分由股票的市场价格产生,一部分由股票的市场波动产生. 由式(5)可见,看涨期权不应在到期日 T 之前执行,否则,当前价值将可能以较低的内涵价值兑现;而由式(7)可见,看跌期权应在到期日 T 之前执行,因为当前价值将可能以较高的内涵价值兑现,即当

$$Xe^{-r(T-t)} - S(t) > \alpha \ (t \leqslant T)$$

时,应执行该看跌期权,这里 α 为包括税收及交易成本在内的所有期权交易费用.

4 偏尾分布的拟合分析

下面将采用最大似然修正法[20]对偏尾分布进行参数估计;假设检验时的显著性水平为 $\alpha = 0.025$. 这里主要针对美国股票微软 MSFT (MICROSOFT CP) 的实际交易数据进行拟合与统计检验.

具体选取 MSFT 于 2002 年 1 月 29 日 —2002 年 12 月 24 日期间 $n = 230$ 个交易日的收盘点位作为采样数据,采样区间分割长度:$\Delta = 5 \times (z_{\max} - z_{\min})/n = 0.467\,608\,695\,7$ (US \$),这里,$z_{\max}$ 和 $z_{\min}$ 分别为采样价格的最大值和最小值,n 为采样价格总数. 共有 $m = 46$ 个分割区间. 参数估计及计算结果为:

1) 偏尾分布 $P(\mu, \sigma^2)$ 参数估计值

$\hat{\mu} = 53.585\,000\,13$; $\hat{\sigma}^2 = 28.656\,150\,31$;

2) 对数正态分布 $\mathrm{Ln}(\mu_l, \sigma_l^2)$ 参数估计值

$\hat{\mu}_l = 3.976\,827\,406$; $\hat{\sigma}_l^2 = 0.008\,770\,254\,161$;

3) 统计检验结果为

$\chi^2 = 58.080\,953\,41 < \chi^2_{0.025}(43) = 62.990$;

$\chi_l^2 = 58.025\,363\,91 < \chi^2_{0.025}(43) = 62.990$.

相应的直方图、采样折线图及偏尾分布拟合曲线如图 1 所示.

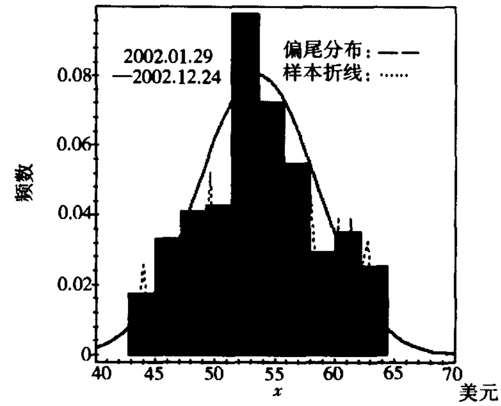

图 1 微软股票(MSFT)的偏尾拟合

Fig. 1 Fitting the prices of MSFT by partial distribution

5 DF 构造法与 B-S 法的期权定价比较研究

假设无风险利率 $r = 0.07$,期权合约到期日为 T,时间取值规范化为 $(T - t)/365$. 这里将结合 MSFT 对 DF 构造法与 B-S (Black-Scholes) 法的期权定价结果进行对比分析. 设:期权合约到期日 $T = 199$.

时间: 2002 年 12 月 25 日;

品种: 2004 年 01 月 16 日(星期五)以后到期的期权合约;

标的当前价: 微软股票当天收盘价 53.39 \$.

这里分别将美国市场 2002 年 12 月 25 日期权实际交易的收盘价格(TP),运用 DF 构造定价公式计算的期权价格(DF)及运用 B-S 定价公式计算的期权价格(B-S)列于表 1 中.

表 1 期权价格数据对比表

Table. 1 Comparing between DF and B-S prices data on options

期权执行价格	看涨期权价格			看跌期权价格		
	TP	DF	B-S	TP	DF	B-S
50.0	11.40	6.138	6.101	7.70	0.094 8	0.058 0
55.0	9.20	2.208	2.201	9.90	0.900	0.892 9
60.0	6.80	0.350 2	0.382 7	12.50	3.777	3.809
65.0	5.10	0.034 7	0.028 8	15.90	8.196	8.189
70.0	3.80	0.001 8	0.001 0	19.50	12.898	12.897

从表 1 中可以看出,在多数情况下,DF 价格比 B-S 价格更加接近实际交易价格.

若以期权执行价格 $X = 60$ 为例,看涨和看跌

期权的DF价格与B-S价格的变化过程分别如图2和图3所示.

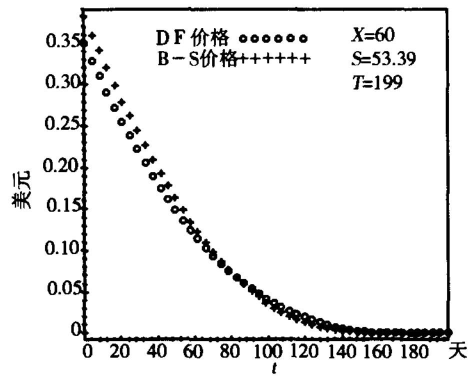

图2　看涨期权价格比较

Fig.2 Comparing between DF and B-S prices on call option

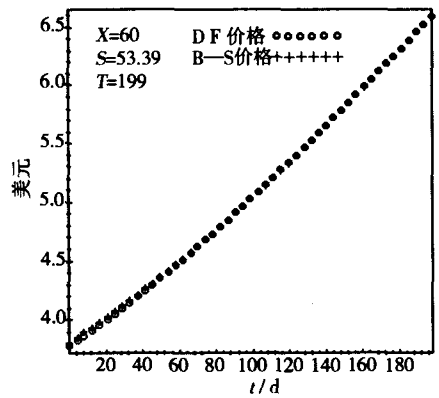

图3　看跌期权价格比较

Fig.3 Comparing between DF and B-S prices on put option

6　结束语

本文在偏尾过程与DF构造的基础上给出了一种期权构造定价方法—DF构造定价方法.由于偏尾分布能够较好地描述现货资产、股票及衍生商品证券价格变化的结构特点[20]，DF构造定价方法的合理性和可信性从而得到保证.文中通过DF构造定价与Black-Scholes期权定价的对比，所得到的结果基本吻合，也支持了DF构造定价方法的合理性和可信性.作者还对美国证券市场的道·琼斯100工业指数(DJX)及中国的上证指数、深发展等品种进行了类似的分析，结果同样支持DF构造定价方法.与Black-Scholes模型相比，DF构造定价模型可以对到期日及其之前任何时刻的期权收益作出价值预估.对于其它价格结构服从偏尾分布的标的资产，进行期权定价时亦可以采用本文给出的方法.作者今后还将对本文的结论作进一步的理论推进和实证分析，以期获得更充分的支持.

此外，结合本文与文献[21]的研究成果，可以进行期权最优投资方面的研究.

本文的原始数据来源于网站：

http://finance.yahoo.com

参考文献：

[1]刘海龙，吴冲锋.期权定价方法综述[J].管理科学学报，2002，5(2)：67—73.
Liu Hailong, Wu Chongfeng. Survey of option pricing methods[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(2): 67—73. (in Chinese)

[2]Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economics, 1973, 81: 637—654.

[3]Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3: 125—144.

[4]Sharpe W F. Investment[M]. New York: Prentice-Hall Inc., 1978, 118—130, 145—152.

[5]Cox J C, Ross S A. Valuation of options for alternative stochastic process[J]. Journal of Political Economics, 1976, 3: 145—166.

[6]Whaley R. On the valuation of American call options on stocks with known dividends[J]. Journal of Financial Economics, 1981, 9: 207—212.

[7]Gesk R, Roll R. On valuing of american call options with the Black-Scholes European formula[J]. Journal of Finance, 1984, 39: 443—455.

[8]Ritchen P, Trevor R. Pricing options under generalized GARCH and stochastic volatility processes[J]. Journal of Finance, 1999, 54: 377—402.

[9]Hull J C. Options, Futures, and Other Derivatives[M]. 4th ed., New York: Prentice Hall Inc., 2000. 251, 388.

[10]Johnson H E. An analytic approximation to the American put price[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1983, 18

(March): 141—148.

[11]Geske R, Johnson H E. The American put valued analytically[J]. Journal of Finance, 1984, 39(December): 1511—1524.

[12]Barone-Adesi G, Whaley R E. Efficient analytic approximation of American option values[J]. Journal of Finance, 1987, 42 (June): 301—320.

[13]MacMillan L W. Analytic approximation for the American put option[J]. Advances in Futures and Option Research, 1986, 1: 119—139.

[14]Carr P, Jarrow R, Myneni R. Alternative characterizations of American put options[J]. Mathematical Finance, 1992, 2: 87—106.

[15]Subrahmanyam M G. The valuation of American option with stochastic interest rates: A generalization of the geske-johnson technique[J]. Journal of Finance, 1997, 52(2): 827—840.

[16]Briys E. Options, Futures and Exotic Derivatives[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.

[17]戴 锋，姬广坡. 一种新型商品定价模型与价格安全性指数评估体系[J]. 中国管理科学，2001, 8(1): 62—69.
Dai Feng, Gi Guang-po. A new kind of pricing model for commodity and estimating indexes system for price security[J]. Chinese Journal of Management Science, 2001, 8(1): 62—69. (in Chinese)

[18]Dai F, Chen X, Sun K. The Pd-Fitness Analysis of Price Structures on Chinese Stocks Market[C]. Proceedings of SCI, 2003.

[19]戴 锋，侯风华，梁 玲. 一种新型的期权定价模型—PD模型[J]. 中国管理科学，2002, 10: 245—248.
Dai Feng, Hou Fenghua, Liang Lin. PD model—A new kind of model for options pricing[J]. Chinese Journal of Management Science, 2002, 10: 245—248. (in Chinese)

[20]戴 锋，徐伟宣，刘 慧等. 一种新型的商品最优化定价方法[J]. 中国管理科学，2003, 11(1): 33—37.
Dai Feng, Xu Wei-xuan, Liu hui, *et al*. A new kind of method of optimal pricing for commodity[J]. Chinese Journal of Management Science, 2003, 11(1): 33—37. (in Chinese)

[21]黄小原，庄新田. 非对称信息条件下实物期权最优投资问题研究[J]. 管理科学学报，2003, 6(6): 28—33.
Huang xiao-yuan, Zhuang Xin-tian. Research of real options optimization investmeat under asymmetry information[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(6): 28—33. (in Chinese)

Structure models for options pricing on non-dividend-paying stocks

DAI Feng, *DING Rui*, *QIN Zi-fu*
Zhengzhou Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China

Abstract: Based on the Partial Distribution and the Partial Process, this paper presents the DF structure of strike price of option for the first time, and gives the DF structure pricing models, the constructive analytic models for options pricing on a non-dividend-paying stock. The models can be used in the pricing of both call options and the put options exercised at any time before the expiration. Hence, they are applicable to the pricing the American call and put option the European call and put options. The final empirical analysis of comparing with the Black-Scholes' formula gives the dependability of the options pricing formulas presented in this paper.

Key words: DF (Dai Feng) structure; non-dividend-paying; options pricing; analytic formulas