第9卷第1期
2006年2月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol.9 No.1
Feb. 2006

区间数计划网络的关键路问题研究①

刘春林[1]，陈华友[2]
(1.南京大学商学院，南京 210093；2.南京大学管理工程研究院，南京 210093)

摘要：论文针对区间数计划网络的特点，提出了基于限制期约束的区间关键路(deadline based interval critical path, DBICP)的概念，通过相关定理的证明给出了求解DBICP的算法，该算法拓展了Stefan Chanas和Pawel Zielinski关于区间关键路问题的研究成果.

关键词：关键路；区间数；计划网络

中图分类号：U121　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007－9807(2006)01－0027－06

0 引 言

关键路技术是最常用的处理项目计划的图形技术，这种技术提示决策者将注意力集中到关键路线上，因为关键路线上的活动通常被认为是导致项目成败的关键所在.2002年，《欧洲运筹学杂志》(European Journal of Operational Research)发表了一篇研究区间数网络关键路问题的重要文章[1].这篇由Stefan Chanas和Pawel Zielinski合写的论文给出了区间关键路(interval critical path, ICP)的定义以及求解方法.然而由于该文对ICP的定义过于宽泛，以至于在通常情况下区间数计划网络可能存在较多的ICP.受文献[1]的启发，本文提出了定义关键路的另外一种方法，称为基于限制期约束的区间关键路(deadline based interval critical path, DBICP)，本文同时给出了求解DBICP的算法.研究表明：依据该算法得到的路径不仅是DBICP，而且还是ICP.

1 研究基础回顾

1.1 确定性网络关键路的定义

$G(A, V)$是一个有向无圈图表示的网络，V是G中所有节点(在计划网络中，节点表示事件)的集合，$A \subset V \times V$是G中所有边的集合(边表示活动)，每一个活动$(i, j) \in A$都对应于一个确定的时间(duration time)t_{ij}，让“1”表示起始节点(项目开始事件)，“n”表示结束节点(项目结束事件)，并且让$P(n)$表示从节点“1”到节点“n”的所有路径的集合，让t表示完工期限(限制期).

定义1 路径$p \in P(n)$是关键路，当且仅当它是图$G(A, V)$中的最长路.

容易发现，路径$p \in P(n)$的长度就是完成整个项目的最短时间.为表述方便，本文定义$w(p)$表示路径p的长度.一个有向无圈网络的最长路可以通过标号方法进行求解.

1.2 ICP的定义及判定定理

现在考虑区间数计划网络$G_1(A, V)$，该网络与$G(A, V)$具有相同的结构，它们唯一的不同表现在：$G_1(A, V)$网络的活动时间是一个区间数T_{ij}，$T_{ij} = [\underline{t}_{ij}, \overline{t}_{ij}]$，对于区间数网络，文献[1]给出关键路的如下定义和判定定理.

定义2 $G_1(A, V)$中的路径$p \in P(n)$是区间关键路(interval-critical-path, ICP)，当且仅当存在一系列实数$t_{ij} \in [\underline{t}_{ij}, \overline{t}_{ij}]$，$(i, j) \in A$，当用$t_{ij}$替代区间数$T_{ij}$时，$p$是定义1意义下的关键路[1].

定理1 $G_1(A, V)$中的路径$p \in P(n)$是ICP，当且仅当将网络$G_1(A, V)$中的活动时间

① 收稿日期：2003－08－22；修订日期：2005－10－28.
基金项目：教育部哲学社会科学创新基地子课题资助项目；国家自然科学基金资助项目(70101003).
作者简介：刘春林(1970—)，男，安徽天长人，博士，教授.

$T_{ij}=[\underline{t}_{ij},\overline{t}_{ij}]$,用下式表示的实数 t_{ij} 替换后,是确定性网络的关键路[1].

$$t_{ij}=\begin{cases}\overline{t}_{ij} & \text{if } (i,j)\in p\\ \underline{t}_{ij} & \text{if } (i,j)\notin p\end{cases}\tag{1}$$

2 DBICP 的定义及性质

按照 ICP 的定义,对于一个区间数计划网络 $G_1(A,V)$ 通常会存在许多 ICP,因为从本质上看,ICP 表述的是区间数网络的非劣路径.那么到底哪一条 ICP 值得进一步去关注,是本文有待解决的关键问题.由于活动时间是区间数,所以根据区间数求和性质[2~4],对于任意一条路径 $p\in P(n)$,其长度 $w(p)$ 可以表示为

$$w(p)=\sum_{(i,j)\in p}T_{ij}=\left[\sum_{(i,j)\in p}\underline{t}_{ij},\ \sum_{(i,j)\in p}\overline{t}_{ij}\right]$$

进一步让 $\underline{w}(p)=\sum_{(i,j)\in p}\underline{t}_{ij}$,$\overline{w}(p)=\sum_{(i,j)\in p}\overline{t}_{ij}$,有

$$w(p)=[\underline{w}(p),\overline{w}(p)]\tag{2}$$

其中:$\underline{w}(p)\leqslant\overline{w}(p)$ 通过上面的表述,可以得出定理 1 的一个等价命题(推论 1)

推论 1 $G_1(A,V)$ 中的路径 $p\in P(n)$ 是 ICP,当且仅当对 $P(n)$ 中任意路径 p',有

$$\overline{w}(p)\geqslant\underline{w}(p'),\ \forall p'\in P(n)\tag{3}$$

证明 由定理 1 显然得证.

如前所述,根据区间数求和性质 $w(p)$ 也是一个区间数,$\underline{w}(p)$ 和 $\overline{w}(p)$ 是区间数 $w(p)$ 的两个端点.在网络 $G_1(A,V)$ 中,集合 $P(n)$ 可以被分成两个集合 R_1 和 R_2,让 R_1 表示所有实数路径的集合,让 R_2 表示所有纯区间数路径的集合,即

$$R_1=\{p\mid\underline{w}(p)=\overline{w}(p),p\in P(n)\}$$

$R_2=\{p\mid\underline{w}(p)<\overline{w}(p),p\in P(n)\}$,对于一个区间数网络,假定 $R_2\neq\varnothing$

$$P(n)=R_1\cup R_2$$

定义 3 对于一个完工期限 t,让 $F(P,t)$ 表示路径 p 的长度小于 t 的可能性

如果 $p\in R_1$,那么

$$F(p,t)\overset{\text{df}}{=}\begin{cases}0 & \underline{w}(p)>1\\ 1 & \underline{w}(p)\leqslant t\end{cases}\tag{4}$$

如果 $p\in R_2$,那么

$$F(p,t)\overset{\text{df}}{=}\begin{cases}0 & t<\underline{w}(p)\\ \dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)} & \underline{w}(p)\leqslant t<\overline{w}(p)\\ 1 & \overline{w}(p)\leqslant t\end{cases}\tag{5}$$

定义 4 给定限制期 t,路径 $p^*\in P(n)$ 是基于限制期约束的区间关键路(DBICP),当且仅当

$$F(p^*,t)=\min_{p\in P(n)}F(p,t)\tag{6}$$

定义 3 和定义 4 借鉴了 Soroush[5] 的思路:DBICP 依赖于限制期 t(注意:ICP 的定义与限制期无关).在一个不确定计划网络中,关键路线常常被用来估计按期完工的可能性.定义 DBICP 的意义在于表达了这样一个信息:DBICP 对应的 F 值是所有路径中最接近于项目按期完工可能性的路径,因而它是最关键的[5].

经典 PERT 技术用"期望关键路线"估计整个项目计划按期完工的概率,其理论基础是,当每项活动时间被描述为独立随机变量(通常假定是一个 β 分布或者正态分布的随机变量)时,依据中心极限定理,整个项目完成时间服从正态分布,具有最大期望值的路线就是关键路线.于是可以根据限制期(工期)计算出项目按期完工的可能性.但是这种估计方法已被证明存在许多缺陷,因为它可能忽略了与限制期(工期)更加紧密相关的其它线路[5~10].比如考虑一个工期为 17 的简单网络计划,该网络只有 oc 和 obc 是两条平行线路组成,假定 obc 服从期望为 15,方差为 1 的正态分布,oc 服从期望为 14,方差为 9 的正态分布.根据传统 PERT 技术,有较高期望值的 obc 为项目计划的关键路,用 obc 作为关键路线估计出完工可能性为 0.977 2.但是如果把 oc 作为关键路线,就会得出完工可能性为 0.841 3.这种情况下,对此项目计划而言,oc 作为关键路线似乎更加合理,因为它以更小的误差反应项目按期完工可能性.同样在区间数网络中,DBICP 揭示了这样一个事实:应用 ICP 可能会过高估计项目完工的可能性,而 DBICP 反映的是更加接近真实的项目按期完工可能性.

性质 1 $0\leqslant F(P,t)\leqslant 1$

性质 2 如果 $\max_{p\in P(n)}\overline{w}(p)\leqslant t$,那么 $\forall p\in P(n)$,$F(p,t)=1$,因此让 $P_2^*=\arg\max_{p\in P(n)}\overline{w}(p)$,有 P_2^*

是 DBICP,同时依据推论 1,P_2^* 也是 ICP.

性质 3　如果 $\max_{p\in P(n)}\underline{w}(p) > t$,那么 $P_1^* = \arg\max_{p\in P(n)}\underline{w}(p)$,$F(P_1^*,t) = 0$. 因此 P_1^* 是 DBICP,同时依据推论 1,P_2^* 也是 ICP.

性质2和性质3可以发现:可以运用有向图最长路算法(比如标号算法),求解最长路 $\max_{p\in P(n)}\overline{w}(p)$ 和 $\max_{p\in P(n)}\underline{w}(p)$,如果得到 $\max_{p\in P(n)}\overline{w}(p) \leqslant t$,或者 $\max_{p\in P(n)}\underline{w}(p) > t$,那么 DBICP 问题迎刃而解.

3　确定 DBICP 的基本思路与问题简化

由性质 2 和性质 3 可以得到确定 DBICP 的如下步骤:

步骤 1　寻找最长路 p_1:$\underline{w}(p_1) = \max_{p\in P(n)}\underline{w}(p)$

如果 $\underline{w}(p_1) > t$,那么 p_1就是 DBICP. 否则转到步骤 2.

步骤 2　寻找最长路 p_2:$\overline{w}(p_2) = \max_{p\in P(n)}\overline{w}(p)$

如果 $\overline{w}(p_2) \leqslant t$,那么 p_2是 DBICP. 否则转到步骤 3.

步骤 3　在这种情况下,有

$$\max_{p\in P(n)}\underline{w}(p) \leqslant t < \max_{p\in P(n)}\overline{w}(p) \tag{7}$$

如何在式(7)成立条件下求解 DBICP 是本文的研究重点. 下面的定理把求解(6)的问题转化为一个比例路径问题.

定理 2　在式(7)成立的条件下,让 $p^* = \arg\min_{p\in R_2}\dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)}$,则 p^* 是一条 DBICP.

证明　因为式(7)成立,所以对任意路径 p,有 $\underline{w}(p) \leqslant t < \overline{w}(p)$,或者 $t \geqslant \overline{w}(p)$ 让

$$R_{21} = \{p \mid \underline{w}(p) \leqslant t < \overline{w}(p), p \in R_2\} \tag{8}$$

$$R_{22} = \{p \mid t \geqslant \overline{w}(p), p \in R_2\} \tag{9}$$

如果 $p \in R_{21}$,那么 $\dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)} < 1$ 并且 $\min_{p\in R_{21}}F(p,t) < 1$;

如果 $p \in R_{22}$,那么 $\dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)} \geqslant 1$ 并且 $\min_{p\in R_{22}}F(p,t) = 1$;

如果 $p \in R_1$,由于式(7)成立($\max_{p\in P(n)}\underline{w}(p) \leqslant t$),因此 $\underline{w}(p) = \overline{w}(p) \leqslant t$,并且有 $\min_{p\in R_1}F(p,t) = 1$. 进一步可以看出 $R_{21} \neq \varnothing$,否则与提前假设 $t < \max_{p\in P(n)}\overline{w}(p)$ 矛盾. 所以

$$\min_{p\in P(n)}F(p,t) = \min_{p\in R_1\cup R_{21}\cup R_{22}}F(p,t) = \min_{p\in R_{21}}F(p,t)$$

$$(\because \text{对 } \forall p \in R_1 \cup R_{22}, F(p,t) = 1) = \min_{p\in R_{21}}\frac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)} = \min_{p\in R_2}\frac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)}$$

$(\because$ 对 $\forall p \in R_{22}, \dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)} > 1$,并且 $R_{21} \neq \varnothing)$

因此 $p^* = \arg\min_{p\in R_2}\dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)}$ 是一条 DBICP.

推论 2　在式(7)成立的条件下,$p^* = \arg\min_{p\in R_2}\dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)} \in R_{21}$($R_{21}$ 定义见(8))

证明　从定理 2 的证明过程中可以看出,$R_{21} \neq \varnothing$,并且当 $p \in R_{21}$,$\dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)} < 1$,当 $p \in R_{22}$,$\dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)} \geqslant 1$,所以 $p^* = \arg\min_{p\in R_2}\dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)} \in R_{21}$.

定理 3　在式(7)成立的条件下,$p^* = \mathrm{agr}\min_{p\in R_2}\dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)}$ 也是一条 ICP.

证明　反证法:如果 p^* 不是 ICP,那么根据推论1存在一条路径 p',$\overline{w}(p^*) < \underline{w}(p')$,根据题设(7)成立,于是 $t \geqslant \max_{p\in P(n)}\underline{w}(p) \geqslant \underline{w}(p')$,即 $t \geqslant \underline{w}(p') > \overline{w}(p^*)$. 但是由推论2可以看出,在式(7)成立的条件下,$p^* \in R_{21}$,即有 $\underline{w}(p^*) \leqslant t < \overline{w}(p^*)$,于是产生了矛盾. 所以 p^* 是 ICP.

4　求解 DBICP 的优化定理

至此本文通过定理 2 简化了问题,并得出了这

样的结论：在式(7)成立的条件下，$p^* = \arg\min_{p\in R_2}\frac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)}$ 既是 DBICP，也是 ICP. 以下问题就是如何求解 p^*. 基于这一目的，本文首先引进一个重要的路径函数 $P[x]$, $x\in[0,1]$.

$$p[x] = \arg\min_{p\in P(n)}\sum_{(i,j)\in p}((\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij})\quad x\in[0,1] \tag{10}$$

$p[x]$ 表示图 $G_1(A, V)$ 中的最长路，此刻区间数活动时间 T_{ij} 被替换成实数 $(\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij}$. 进一步容易发现 $p[x]$ 非负. 如果用 $N(x)$ 来表示 $p[x]$ 的长度，有

$$N(x) = \max_{p}\sum_{(i,j)\in p}((\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij}) \tag{11}$$

显然 $N(x)$ 可以通过有向图的最长路算法获得. 进一步式(7)可以等价表示为

$$N(0)\leqslant t < N(1) \tag{12}$$

定理 4 对 $\forall x\in[0,1]$, $N(x)$ 是连续递增的

证明见附录.

定理 5 如果式(7)成立(或者式(12)成立)，有

1) $N(x) > t \Leftrightarrow x > \min_{p\in R_2}\frac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)}$

2) $N(x) < t \Leftrightarrow x < \min_{p\in R_2}\frac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)}$

3) $N(x) = t \Leftrightarrow x = \min_{p\in R_2}\frac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)}$

证明

1) "$\Rightarrow$" $N(x) > t$

$\max_{p\in P(n)}\sum_{(i,j)\in p}((\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij}) > t \Rightarrow$

$\exists p'\in P(n), \sum_{(i,j)\in p'}((\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij}) > t \Rightarrow$

$(\overline{w}(p')-\underline{w}(p'))x+\underline{w}(p') > t \Rightarrow$

$p'\in R_2$，并且有 $(\overline{w}(p')-\underline{w}(p'))x+\underline{w}(p') > t$（反证法：如果 $p'\in R_1$，则 $\overline{w}(p')=\underline{w}(p')$，因此 $\underline{w}(p') > t$，而依据(7)，$\underline{w}(p')\leqslant t$，矛盾）$\Rightarrow$

$x > \frac{t-\underline{w}(p')}{(\overline{w}(p')-\underline{w}(p'))}, p'\in R_2 \Rightarrow$

$x > \min_{p\in R_2}\frac{t-\underline{w}(p)}{(\overline{w}(p)-\underline{w}(p))}$ "$\Leftarrow$"

$x > \min_{p\in R_2}\frac{t-\underline{w}(p)}{(\overline{w}(p)-\underline{w}(p))} \Rightarrow$

$\exists p\in R_2, (\overline{w}(p)-\underline{w}(p))x+\underline{w}(p) > t \Rightarrow$

$\exists p\in R_2, \sum_{(i,j)\in p}((\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij}) > t \Rightarrow$

$\exists p\in P(n), \sum_{(i,j)\in p}((\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij}) > t \Rightarrow$

$\max_{p\in P(n)}\sum_{(i,j)\in p}((\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij}) > t \Rightarrow$

$N(x) > t$

2) "$\Rightarrow$" $N(x) < t$

$\max_{p\in P(n)}\sum_{(i,j)\in p}((\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij}) < t \Rightarrow$

$\forall p\in P(n), \sum_{(i,j)\in p}((\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij}) < t \Rightarrow$

$\forall p\in P(n), (\overline{w}(p)-\underline{w}(p))x+\underline{w}(p) < t \Rightarrow$

$\forall p\in R_2, (\overline{w}(p)-\underline{w}(p))x+\underline{w}(p) < t \Rightarrow$

$\forall p\in R_2, x < \frac{t-\underline{w}(p)}{(\overline{w}(p)-\underline{w}(p))} \Rightarrow$

$x < \min_{p\in R_2}\frac{t-\underline{w}(p)}{(\overline{w}(p)-\underline{w}(p))}$ "$\Leftarrow$"

$x < \min_{p\in R_2}\frac{t-\underline{w}(p)}{(\overline{w}(p)-\underline{w}(p))} \Rightarrow$

$\forall p\in R_2, x < \frac{t-\underline{w}(p)}{(\overline{w}(p)-\underline{w}(p))} \Rightarrow$

$\forall p\in R_2, (\overline{w}(p)-\underline{w}(p))x+\underline{w}(p) < t \Rightarrow$

$\forall p\in P(n), (\overline{w}(p)-\underline{w}(p))x+\underline{w}(p) < t \Rightarrow$

$\forall p\in P(n), \sum_{(i,j)\in p}((\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij}) < t \Rightarrow$

$\max_{p\in P(n)}\sum_{(i,j)\in p}((\overline{t}_{ij}-\underline{t}_{ij}).x+\underline{t}_{ij}) < t \Rightarrow$

$N(x) < t$

3) 根据定理 4，$N(x)$ 是连续并且递增的，所以结论成立.

推论 2 在式(7)成立的条件下，如果 $N(x^*) = t$，则 $P(x^*)$ 是一条 DBICP.

5 算法及算例

定理 4、定理 5 和推论 2 使得本文可以建立一个算法求解 DBICP，通过二分法，重复运用有向图最长路算法进行迭代即可获得 DBICP，具体思路如下：让 $x = 0$，如果 $N(x) > t$，那么 $p[0]$ 是 DBICP(性质 3)；否则让 $x = 1$，如果 $N(x)\leqslant t$，那么 $p[1]$ 是 DBICP(性质 2)；否则(7)成立，让 $x' = 0, x'' = 1$

令 $x = [x' + x'']/2$

如果 $N(x) > t$，那么 $x > \min_{p\in R_2}\frac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)}$(定理 5)，这时让 $x'' = x$

如果 $N(x) < t$,那么 $x < \min\limits_{p\in R_2}\dfrac{t-\underline{w}(p)}{\overline{w}(p)-\underline{w}(p)}$(定理5),这时让 $x' = x$

重复上述过程直到 $|N(x) - t| < \varepsilon$,ε 是一个小的正数.本节的定理使得上述算法能够收敛.具体算法步骤如下：

步骤1 让 $x = 0$,如果 $N(0) > t$ 那么 $p[0]$ 是 DBICP,否则转到步骤2.

步骤2 让 $x = 1$,如果 $N(1) \leqslant t$ 那么 $p[1]$ 是 DBICP,否则转到步骤3.1

步骤3.1 让 $x' = 0, x'' = 1$

步骤3.2 令 $x = [x' + x'']/2$,如果 $|N(x) - t| < \varepsilon$,那么 $p[x]$ 是 DBICP,停止.否则转步骤3.3

步骤3.3 如果 $N(x) > t$,那么令 $x'' = x$,否则令 $x' = x$.转步骤3.2.

定理6 上述算法求得的路径是 ICP.

证明 根据性质2、性质3以及定理3,定理6显然得证.

图1给出了一个算例说明所提算法.图1是一个11节点的区间数计划网络,在该网络中有一条实数路径 $v1 - v2 - v5 - v8 - v11$.假定完工期 $t = 40$,根据上述算法经过迭代,可以得到 $p^* = v1 - v3 - v6 - v10 - v11$ 为该计划网络的 DBICP,此时 $F(p^*, 40) = 0.875$.但是当 $t = 41$ 时,可以得到 $p^* = v1 - v3 - v4 - v7 - v9 - v10 - v11$ 为该计划网络的 DBICP,此时 $F(p^*, 41) = 0.941$.

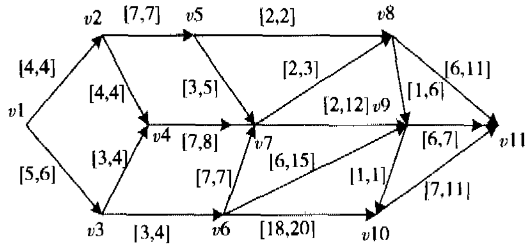

图1 11个节点的区间数计划网络

Fig. 1 Interval project network with 11 nodes

6 结 论

针对不确定计划网络,本文给出了求解 DBICP 的跌代算法.该算法拓展了 Stefan Chanas 和 Pawel Zielinski 关于 ICP 问题的研究成果[1],通过定理6,本文证明了所提算法不仅是 DBICP,而且还是 ICP.本文的研究还表明,网络中的 DBICP 依赖于限制期,限制期不同可能导致关键路(DBICP)有所差异.此外,本文提出的算法思路对解决相关交通网络问题[11,12]也具有一定的借鉴价值.

参 考 文 献:

[1]Chanas S, Zielinski P. The computational complexity of the criticality problems in a network with interval activity times[J]. European Journal of Operational Research, 2002, 136(4): 541—550.

[2]Tong S. Interval number and fuzzy number linear programming[J]. Fuzzy Set and Systems, 1994, 66(3): 301—306.

[3]Ishihuchi H, Tanaka M. Multi—objective programming in optimization of the interval objective function[J]. European Journal of Operational Research, 1990, 48 (2): 219—225.

[4]Okada S, Gen M. Order Relation between intervals and its application to shortest path problem[J]. Computers Industrial Engineering, 1994, 25(2): 147—150.

[5]Soroush H M. The most critical path in a PERT network: A heuristic approach[J]. European Journal of Operational Research, 1994, 78(1): 93—105.

[6]Ragsdale C. The current state of the network simulation in project management theory and practice[J]. OMEGA, 1989, 17(1): 21—25.

[7]Maccrimmon K R, Ryavec C A. An analytical study of the PERT assumptions[J]. Operational Research, 1964, 12(1): 16—37.

[8]Anklesaria K P, Drezner Z. A multivariate approach to estimating the completion times for PERT networks[J]. Journal of the Operational Research Society, 1986, 37(8): 811—815.

[9]刘春林，何建敏．给定限制期条件下最关键路的求取算法[J]．管理工程学报，2000，14(2)：22—25.

Liu Chunlin, He Jianmin. An algorithm for selection of most critical path by a given deadline[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2000, 14(2): 22—25.(in Chinese)

[10]刘春林．应急系统中紧急物资调度的模型与方法研究[D]．南京：东南大学，2000．41—53.

Liu Chunlin. Models and Approaches for the Material Dispatch Problem in Emergency Management[D]. Nanjing: Southeast University, 2000. 41—53. (in Chinese)

[11]吴文祥，黄海军. 平行路径网络中信息对交通行为的影响研究[J]. 管理科学学报，2003，6(2)：12—16.

Wu Wenxiang，Huang Haijun. Study on behavior impacts caused by travel information systems in parallel route network[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(2): 12—16. (in Chinese)

[12]黄海军. 公共与个体竞争交通系统的定价研究[J]. 管理科学学报，1998，1(1)：17—23.

Huang Haijun. Pricing and modal split in a competitive system of mass transit and highway[J]. Journal of Management Sciences in China, 1998, 1(1): 17—23. (in Chinese)

Critical path for an interval project network

LIU Chun-lin[1]，*CHEN Hua-you*[2]

1. School of Business, Nanjing University, Nanjing 210093, China;

2. Graduate School of Management Science and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093, China

Abstract: According to the characteristics of interval plan network, this paper introduces the concept of interval critical path (DBICP). By proposing some relevant theorems, we give an algorithm for DBICP, which extends the researches on interval critical path by Stefan Chanas and Pawel Zielinski.

Key words: critical path; interval number; plan network

附录 证明定理4

"对 $\forall x \in [0,1]$，$N(x)$ 是连续递增的"

1) 如果 $x_1 < x_2$，那么

$$
\begin{aligned}
N(x_2) - N(x_1) &= \sum_{(i,j)\in p(x_2)} ((\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) . x_2 + \underline{t}_{ij}) - \\
&\quad \sum_{(i,j)\in p(x_1)} ((\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) . x_1 + \underline{t}_{ij}) \geqslant \\
&\quad \sum_{(i,j)\in p(x_1)} ((\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) . x_2 + \underline{t}_{ij}) - \\
&\quad \sum_{(i,j)\in p(x_1)} ((\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) . x_1 + \underline{t}_{ij}) = \\
&\quad \sum_{e\in p(x_1)} (\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) . (x_2 - x_1) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

因此 $N(x)$ 是一个递增函数

2) 如果 $x_2 \geqslant x_1$

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant |N(x_2) - N(x_1)| &= N(x_2) - N(x_1) = \\
&\quad \sum_{(i,j)\in p(x_2)} ((\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) . x_2 + \underline{t}_{ij}) - \\
&\quad \sum_{(i,j)\in p(x_1)} ((\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) . x_1 + \underline{t}_{ij}) \leqslant \\
&\quad \sum_{(i,j)\in p(x_2)} ((\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) . x_2 + \underline{t}_{ij}) - \\
&\quad \sum_{(i,j)\in p(x_2)} ((\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) . x_1 + \underline{t}_{ij}) = \\
&\quad (x_2 - x_1) \sum_{(i,j)\in p(x_2)} (\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) \leqslant \\
&\quad (x_2 - x_1) \max_{p\in P(n)} \sum_{(i,j)\in p} (\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) \to 0
\end{aligned}
$$

当 $x_2 \to x_1+$

如果 $x_2 < x_1$时，运用同样的思路，有

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant |N(x_2) - N(x_1)| &= N(x_1) - N(x_2) \leqslant \\
&\quad (x_1 - x_2) \sum_{(i,j)\in p(x_1)} (\bar{t}_{ij} - \underline{t}_{ij}) \to 0
\end{aligned}
$$

当 $x_2 \to x_1-$，因此 $N(x)$ 是连续的.