第9卷第5期 2006年10月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol.9 No.5 Oct. 2006

模糊合作对策的 Shapley 值①

陈 雯，张 强
(北京理工大学管理与经济学院，北京 100081)

摘要：考虑合作对策中支付函数是模糊数的情形，利用模糊数学相关理论，对 Shapley 提出的三条公理进行拓广，并构造了模糊 Shapley 值．针对局中人在合作完成后需要对具体的联盟收益进行分配的情况，文中利用构造的模糊 Shapley 值隶属函数给出了确定的收益分配方案．最后将该方法应用到动态联盟伙伴企业收益分配的实例中．

关键词：(模糊)合作对策；模糊 Shapley 值；隶属函数
中图分类号：N94　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007－9807(2006)05－0050－06

0 引言与预备知识

合作对策是局中人共同取得尽可能大的利益的竞争决策分析模型，在合作对策过程中，局中人要考虑如何结成联盟以及如何重新分配联盟的支付．

二元组 (I, v) 称为局中人集合 $I = \{1,2,\cdots,n\}$ 上的合作对策，如果 v 是 I 的所有子集形成的集合 2^I 上的映射，即 $v: 2^I \to R$ 满足

(ⅰ) $v(\varnothing) = 0$

(ⅱ) 对于 $K, L \subset I$ 且 $K \cap L = \varnothing$，则有 $v(K \cup L) \geqslant v(K) + v(L)$

映射 v 称为支付函数，I 的任意子集 K 称为联盟．从测度论的观点看，v 是集合 2^I 上的一个超可加集函数．

合作对策有多种解的定义，Shapley 值是合作对策中最常用的一种解概念．1953 年，Shapley 提出了求解多人合作对策问题的一种公理化方法[1,2]，即首先设置了三个人们普遍接受的公理，

公理 1(对称性)　如果局中人 $i, j \in I$，对于任意的联盟 $K \subset I \setminus \{i,j\}$ 总有 $v(K \cup \{i\}) = v(K \cup \{j\})$，那么 $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$．

公理 2(有效性)　如果对于所有包含 i 的子集 K 都有 $v(K) = v(K - \{i\})$，则 $\varphi_i(v) = 0$，$\sum_{i \in I} \varphi_i(v) = v(I)$．

公理 3(可加性)　对于任意两个合作对策 (I, v_1) 和 (I, v_2)，如果存在一个合作对策 $(I, v_1 + v_2)$，对于任意的联盟 $K \subset I$ 总有 $(v_1 + v_2) \times (K) = v_1(K) + v_2(K)$，则 $\varphi_i(v_1 + v_2) = \varphi_i(v_1) + \varphi_i(v_2)$，$i \in I$．

然后，求出唯一满足这三个公理的各个局中人的支付值 $\varphi_i(v) \to R$，

$$\varphi_i(v) = \sum_{K \subset I} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!} \times (v(K) - v(K - \{i\})), \ \forall i \in I \tag{1}$$

其中：k 为联盟 K 中的人数，n 为局中人的个数．$\varphi(v) = (\varphi_i(v))_{i \in I}$ 为 Shapley 值向量，简称 Shapley 值，它是支付函数 v 的单调非减函数(证明见文献[1])，在具有超可加性的合作对策中表示一特定的分配．

Shapley 值是定义在经典合作对策理论上的一种解的形式，经典的合作对策基于两个假设：① 局中人完全参与到一个特定的联盟之中，即每个局中人要么参加某个联盟，要么不参加某个联盟，不存在局中人以一定的参与率或参与程度参加某

① 收稿日期：2005－03－18；修订日期：2006－07－16．
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70471063；70171036)．
作者简介：陈 雯(1978—)，女，河南人，博士生．Email：chenwen_1129@bit.edu.cn

个联盟的情况；② 局中人在合作之前完全清楚地知道不同的合作策略所产生的收益，以及自身参与特定联盟的所得分配．但是，现实中的对策问题原型往往不满足以上两个假设，现实中更多的情况是局中人分别以不同的参与率或参与程度参加多个联盟，并且在合作之前，他们对不同合作策略下的收益以及自己在特定联盟下的所得分配知道地不精确、不确定，甚至是不清楚．

现实问题对合作对策理论提出的更高要求，促使国外许多学者展开了不确定环境下的对策理论研究，模糊合作对策的研究就是其中的方向之一，它的研究重点主要集中在：① 局中人参与联盟程度模糊化条件下合作对策解的求解；② 支付函数模糊化条件下合作对策解的求解．这些具有模糊信息的合作对策统可称为模糊合作对策．

对于研究重点 ①，Aubin[3~5] 首先提出了模糊合作对策的概念，指出局中人可以以不同的参与率参加多个联盟，这个参与率用一个介于[0, 1]之间的模糊数来表示；Butnariu[6~9] 在 Aubin 提出的模糊合作对策概念的基础上，定义了模糊 Shapley 值，然而他定义的模糊 Shapley 值与经典的 Shapley 值相比，既不单调非减又不连续，不能很好的适应现实的应用要求；Tsurumi 等[10] 在 Butnariu 的基础上构造了一个在 Choquet 积分上的模糊 Shapley 值，使其单调非减且连续．

对于研究重点 ②，Mareš[11~15] 于 1995 年拓展了模糊合作对策的概念，指出具有模糊支付函数的合作对策也是模糊合作对策的一种形式．Mareš 在文献[12, 13] 中仿照经典的 Shapley 值定义了模糊 Shapley 值

$$\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}) = \sum_{K\subset I}^{\oplus} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}(\tilde{v}(K) \oplus (-\tilde{v}(K-\{i\}))),\ \forall i \in I \tag{2}$$

其中：k 为联盟 K 中的人数，n 为局中人的个数，$\tilde{v}(K)$ 为模糊支付函数．然而他定义的模糊 Shapley 值很难满足 Shapley 提出的三条公理，Mareš 最终仅是求得 Shapley 值的模糊隶属函数，而没有给出具体的联盟收益分配方案．

另外，Aarts[16] 等人研究了单调集合对策的 Shapley 值，相比之下，模糊集合的 Shapley 值具有更广泛的研究意义．本文考虑合作对策中支付函数是模糊数的情形，利用模糊数学相关理论，对 Shapley 提出的三条公理进行拓广，构造了模糊 Shapley 值，并在此基础上给出了确定的联盟收益分配方案．

1 模糊合作对策的 Shapley 值

二元组$(I,\tilde{v})$ 称为局中人集合 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上的模糊合作对策，其中 $\tilde{v}$ 是定义在 2^I 上，取值在模糊数集合$\mathcal{R}$上的模糊支付函数，即 $\tilde{v}$: $2^I \to \mathcal{R}$ 且 $\tilde{v}(\varnothing) = 0$.

设 $\mu_{\tilde{v}(K)}(v)$ 是模糊数 $\tilde{v}(K)$ 的隶属函数，对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$，$\tilde{v}(K)$ 的 α 截集为$\tilde{v}_\alpha(K) = \{v \in R \mid \mu_{\tilde{v}(K)}(v) \geqslant \alpha\}$，这里，$\alpha$ 可以看作是置信水平或置信度．由模糊数的性质可知，$\tilde{v}(K)$ 的 α 截集可以用区间$[v_\alpha^L(K), v_\alpha^R(K)]$ 来表示．

定义 1 在模糊合作对策$(I,\tilde{v})$ 中，如果任意两个联盟 K, $L \subset I$, $K \cap L = \varnothing$, 对于给定的 $\alpha \in [0, 1]$ 总有

$$v_\alpha^R(K \cup L) \geqslant v_\alpha^R(K) + v_\alpha^R(L)$$
$$v_\alpha^L(K \cup L) \geqslant v_\alpha^L(K) + v_\alpha^L(L) \tag{3}$$

则称模糊支付函数具有 α - 超可加性．它们表示在置信水平 α 上，没有一个局中人愿意接受比自己单干所获收益少的合作策略[17,18].

定义 2 对于给定的 $\alpha \in [0, 1]$，如果分配 $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I}$ 满足

$$x_i \geqslant v_\alpha^L(\{i\}),\ \forall i \in I$$
$$v_\alpha^L(I) \leqslant \sum_{i\in I} x_i \leqslant v_\alpha^R(I) \tag{4}$$

则称 $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I}$ 为模糊合作对策$(I,\tilde{v})$ 的一个 α— 分配[17,18].

定义 3 对于模糊合作对策$(I,\tilde{v})$ 和给定的 $\alpha \in [0, 1]$，如果有联盟 $K \subset I$ 满足

$$\tilde{v}_\alpha(S \cap K) = \tilde{v}_\alpha(S),\ \forall S \subset I \tag{5}$$

则称 K 为模糊合作对策$(I,\tilde{v})$ 的 α - 承载．这时有 $\tilde{v}_\alpha^L(S \cap K) = \tilde{v}_\alpha^L(S)$ 且 $\tilde{v}_\alpha^R(S \cap K) = \tilde{v}_\alpha^R(S)$.

在定义了 α 截集上的上述模糊合作对策相关概念以后，可将经典 Shapley 值满足的三条公理拓广如下，

公设 1 (α - 对称性) 如果局中人 i, $j \in I$ ，对于任意的联盟 $K \subset I \setminus \{i,j\}$ 总有 $\tilde{v}_\alpha^L(K \cup \{i\}) = \tilde{v}_\alpha^L(K \cup \{j\})$，$\tilde{v}_\alpha^R(K \cup \{i\}) = \tilde{v}_\alpha^R(K \cup \{j\})$ ，那么

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}) = \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{jL}(\tilde{v}),\ \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v}) = \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{jR}(\tilde{v})$$

该公设表示,在置信水平 α 上,每人的分配与他被赋予的记号 i 无关.

公设 2 (α - 有效性) 如果对于所有包含 i 的子集 K 都有 $\tilde{v}_{\alpha}(K) = \tilde{v}_{\alpha}(K - \{i\})$,则

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}) = \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v}) = 0,\ 且 \sum_{i\in I}\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}) = \tilde{v}_{\alpha}^{L}(I),\ \sum_{i\in I}\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v}) = \tilde{v}_{\alpha}^{R}(I).$$

该公设表示,若成员 i 在置信水平 α 上对每个他参加的合作没有贡献,那么他不应从全体合作在置信水平 α 上的收益中获得报酬.另外在置信水平 α 上,各成员分配之和应等于全体合作的收益.

公设 3 (α - 可加性) 对于任意两个模糊合作对策 $(I,\tilde{v}_1)$ 和 $(I,\tilde{v}_2)$,如果存在一个模糊合作对策 $(I,\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)$,对于任意的联盟 $K \subset I$ 总有 $(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)_{\alpha}^{L}(K) = \tilde{v}_{1\alpha}^{L}(K) + \tilde{v}_{2\alpha}^{L}(K)$ 和 $(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)_{\alpha}^{R}(K) = \tilde{v}_{1\alpha}^{R}(K) + \tilde{v}_{2\alpha}^{R}(K)$,那么它们对应的 Shapley 值应满足

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2) = \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}_1) + \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}_2),$$

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2) = \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v}_1) + \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v}_2),\ \forall i \in I$$

该公设表示,当 n 人同时进行两项合作时,在置信水平 α 上,每人的分配是两项合作的分配之和.

定理 1 对给定的 $\alpha \in [0,1]$,存在唯一满足公设 1、2、3 的 Shapley 值 $\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v})$ 和 $\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v})$ 满足

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}) = \sum_{K\subset I}\frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}\times(\tilde{v}_{\alpha}^{L}(K) - \tilde{v}_{\alpha}^{L}(K-\{i\})),$$

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v}) = \sum_{K\subset I}\frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}\times(\tilde{v}_{\alpha}^{R}(K) - \tilde{v}_{\alpha}^{R}(K-\{i\})),\ \forall i \in I \quad (6)$$

其中:k 为联盟 K 中的人数,n 为局中人的个数.(定理 1 的证明方法与经典 Shapley 值满足三条公理的证明方法类似,详细的证明过程可参考文献[1].)

通过定理 1 可以得到不同置信水平 α 上的 Shapley 值左右端点 $\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v})$ 和 $\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v})$,以下的讨论中,则将左右端点形成的区间组成集合套,从而得到模糊 Shapley 值隶属函数.

引理 1 对于任意的 $\alpha_1,\ \alpha_2 \in [0,1]$ 且 $\alpha_1 > \alpha_2$,总有 $\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iL}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iR}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iR}(\tilde{v})$.

证明 由模糊数学集合套的性质可知,对于任意的 $\alpha_1,\ \alpha_2 \in [0,1]$ 且 $\alpha_1 > \alpha_2$,总有 $[v_{\alpha_1}^{L}(K), v_{\alpha_1}^{R}(K)] \subset [v_{\alpha_2}^{L}(K), v_{\alpha_2}^{R}(K)]$,即 $v_{\alpha_2}^{L}(K) < v_{\alpha_1}^{L}(K)$,$v_{\alpha_1}^{R}(K) < v_{\alpha_2}^{R}(K)$.再由 Shapley 值关于支付函数 v 单调非减的性质,有 $\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iL}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iR}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iR}(\tilde{v})$.

命题 1 如果对于任意的 $\alpha \in [0,1]$,都有 $\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v})$,则 $[\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v})]_{\alpha\in[0,1]}$ 构成集合套.

证明 对于任意两个 $\alpha_1,\ \alpha_2 \in [0,1]$ 且 $\alpha_1 > \alpha_2$,已知 $\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iR}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iR}(\tilde{v})$,且由引理 1 得 $\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iL}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iR}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iR}(\tilde{v})$,故 $[\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iL}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iR}(\tilde{v})] \subseteq [\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iL}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iR}(\tilde{v})]$,$[\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v})]_{\alpha\in[0,1]}$,构成集合套.

定义 4 如果存在 $\alpha \in [0,1]$,使 $\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}) > \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v})$,则令

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha \mid \alpha \in [0,1],使 \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}) > \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v})\}$$

命题 2 对于任意的 $\alpha,\ \alpha_0 \in [0,1]$ 且 $\alpha > \alpha_0$,总有 $\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}) > \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v})$.

证明 已知 $\alpha,\alpha_0 \in [0,1]$ 且 $\alpha > \alpha_0$,由引理 1 有 $\widetilde{\varphi}_{\alpha_0}^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_0}^{iR}(\tilde{v})$,再由定义 4 知 $\widetilde{\varphi}_{\alpha_0}^{iL}(\tilde{v}) > \widetilde{\varphi}_{\alpha_0}^{iR}(\tilde{v})$,故 $\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}) \geqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_0}^{iL}(\tilde{v}) > \widetilde{\varphi}_{\alpha_0}^{iR}(\tilde{v}) \geqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v})$,即 $\widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iL}(\tilde{v}) > \widetilde{\varphi}_{\alpha}^{iR}(\tilde{v})$.

命题 3 对于任意的 $\alpha_0,\ \alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$ 且 $\alpha_0 \leqslant \alpha_2 < \alpha_1$,有 $[\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iR}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iL}(\tilde{v})] \subset [\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iR}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iL}(\tilde{v})]$,即 $\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iR}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iR}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iL}(\tilde{v})$.

证明 已知 $\alpha_1,\ \alpha_2 \in [0,1]$ 且 $\alpha_1 > \alpha_2$,由引理 1 有 $\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iL}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iR}(\tilde{v}) \leqslant \widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iR}(\tilde{v})$.又知 $\alpha_1 > \alpha_2 \geqslant \alpha_0$,由命题 2 得 $\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iL}(\tilde{v}) > \widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iR}(\tilde{v})$,$\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iL}(\tilde{v}) > \widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iR}(\tilde{v})$,故 $[\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iR}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_2}^{iL}(\tilde{v})] \subset [\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iR}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{\alpha_1}^{iL}(\tilde{v})]$.

推论 若 $\alpha_0 = 0$,则 $[\widetilde{\varphi}_{1-\alpha}^{iR}(\tilde{v}),\widetilde{\varphi}_{1-\alpha}^{iL}(\tilde{v})]_{\alpha\in[0,1]}$ 构成集合套.

以上构成集合套的情况讨论后,根据表现定理可刻画模糊 Shapley 值隶属函数如图 1 所示.

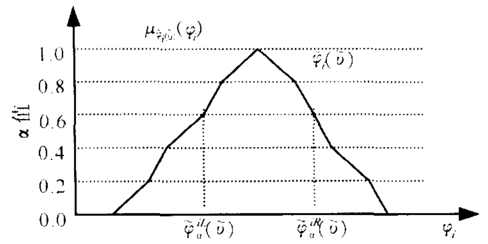

图1 $\tilde{\varphi}_\alpha^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \tilde{\varphi}_\alpha^{iR}(\tilde{v})$ 时模糊 Shapley 值隶属函数

Fig.1 The membership function of fuzzy Shapley value when $\tilde{\varphi}_\alpha^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \tilde{\varphi}_\alpha^{iR}(\tilde{v})$ for any $\alpha \in [0,1]$

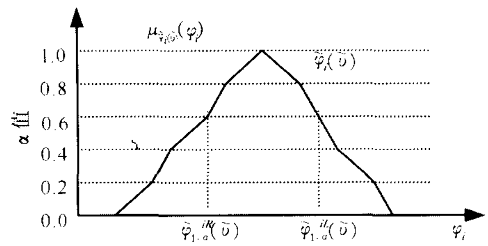

图2 $\tilde{\varphi}_\alpha^{iL}(\tilde{v}) > \tilde{\varphi}_\alpha^{iR}(\tilde{v})$ 时模糊 Shapley 值隶属函数

Fig.2 The membership function of fuzzy Shapley value when $\tilde{\varphi}_\alpha^{iL}(\tilde{v}) > \tilde{\varphi}_\alpha^{iR}(\tilde{v})$ for any $\alpha \in [0,1]$

2 基于模糊 Shapley 值的分配方案的确定

对于一个具体的联盟收益，局中人仅仅接受前面所得的模糊 Shapley 值隶属函数是不满意的，合作的结束要求将联盟获得的具体收益以确定的形式分配给各个盟员，因此，必须根据求得的模糊 Shapley 值隶属函数设计确定的收益分配方案.

根据模糊隶属函数的特点可知，在一个联盟 K 中，对于任意给定的收益值 $v(K)^*$，总有一个隶属度，也就是置信度 α^* 相对应. 由前面的分析讨论可知，如果对于任意的 $\alpha \in [0,1]$，都有 $\tilde{\varphi}_\alpha^{iL}(\tilde{v}) \leqslant \tilde{\varphi}_\alpha^{iR}(\tilde{v})$，则根据前面构造的模糊 Shapley 值隶属函数（图1）找到与 α^* 相对应的分配值 $\tilde{\varphi}_{\alpha^*}^{iL}(\tilde{v})$ 和 $\tilde{\varphi}_{\alpha^*}^{iR}(\tilde{v})$，并在 $\tilde{\varphi}_{\alpha^*}^{iL}(\tilde{v})$ 和 $\tilde{\varphi}_{\alpha^*}^{iR}(\tilde{v})$ 中选取与 $v(K)^*$ 同侧（相对于模糊隶属函数的核心来说，隶属度不等于1的模糊变量要么处在核心的左边，要么处在核心的右边）的数作为 φ_i^*；如果对于任意 $\alpha \in [0,1]$，都有 $\tilde{\varphi}_\alpha^{iL}(\tilde{v}) > \tilde{\varphi}_\alpha^{iR}(\tilde{v})$，则根据前面构造的模糊 Shapley 值隶属函数（图2）找到与 $1-\alpha^*$ 相对应的分配值 $\tilde{\varphi}_{\alpha^*}^{iL}(\tilde{v})$ 和 $\tilde{\varphi}_{\alpha^*}^{iR}(\tilde{v})$，并在 $\tilde{\varphi}_{\alpha^*}^{iL}(\tilde{v})$ 和 $\tilde{\varphi}_{\alpha^*}^{iR}(\tilde{v})$ 中选取与 $v(K)^*$ 异侧的数作为 φ_i^*. 这里的 φ_i^* 就是联盟收益 $v(K)^*$ 所对应的 Shapley 值.

3 模糊 Shapley 值在动态联盟企业收益分配中的应用

在动态联盟中，原本相互独立的企业彼此进行核心能力的优化整合，以追求整体经济利益的最大化，因此，动态联盟的经济活动可看成是多人合作对策，联盟伙伴的收益分配可看成是多人合作对策的收益分配问题. 在模糊 Shapley 值的模型中，I 为 n 个企业的联盟体，K 为 I 中若干企业合作的联盟子集，$\tilde{v}(K)$ 为联盟 K 产生的收益，$\tilde{v}(K-\{i\})$ 为联盟 K 中除去企业 i 产生的收益. 现假设有 A、B、C 三家企业（分别代表1,2,3三个局中人）欲合作一个工程项目，如单干则每企业获利约5万元，如 A、B 联合则可获利约35万元，如 A、C 联合，则可获利约25万元，B、C 联合则可获利约20万元，如 A、B、C 联合则可获利约50万元. 上述支付函数用模糊数表示为

$$\mu_{\tilde{v}\{1\}}(v) = \mu_{\tilde{v}\{2\}}(v) = \mu_{\tilde{v}\{3\}}(v) = \begin{cases} v-4, & v \in [4,5] \\ 6-v, & v \in (5,6] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{v}\{1,2\}}(v) = \begin{cases} \frac{v}{5}-6, & v \in [30,35] \\ \frac{38}{3}-\frac{v}{3}, & v \in (35,38] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{v}\{1,3\}}(v) = \begin{cases} \frac{v}{2}-\frac{23}{2}, & v \in [23,25] \\ \frac{27}{2}-\frac{v}{2}, & v \in (25,27] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{v}\{2,3\}}(v) = \begin{cases} \frac{v}{5}-3, & v \in [15,20] \\ \frac{23}{3}-\frac{v}{3}, & v \in (20,23] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{v}\{1,2,3\}}(v) = \begin{cases} \frac{v}{5}-9 & v \in [45,50] \\ 11-\frac{v}{5}, & v \in (50,55] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

以0.2为单位在[0, 1]区间上改变置信水平

α，可得模糊支付函数的 α 截集如表 1 所示.

表 1　模糊支付函数的 α 截集

Table 1 The α-level sets of fuzzy payoff functions

	α = 0.8	α = 0.6	α = 0.4	α = 0.2
$v\{1\}$	[4.8, 5.2]	[4.6, 5.4]	[4.4, 5.6]	[4.2, 5.8]
$v\{2\}$	[4.8, 5.2]	[4.6, 5.4]	[4.4, 5.6]	[4.2, 5.8]
$v\{3\}$	[4.8, 5.2]	[4.6, 5.4]	[4.4, 5.6]	[4.2, 5.8]
$v\{1, 2\}$	[34.0, 35.6]	[33.0, 36.2]	[32.0, 36.8]	[31.0, 37.4]
$v\{1, 3\}$	[24.6, 25.4]	[24.2, 25.8]	[23.8, 26.2]	[23.4, 26.6]
$v\{2, 3\}$	[19.0, 20.6]	[18.0, 21.2]	[17.0, 21.8]	[16.0, 22.4]
$v\{1, 2, 3\}$	[49.0, 51.0]	[48.0, 52.0]	[47.0, 53.0]	[46.0, 54.0]

通过公式(6)，计算不同置信水平 α 上 Shapley 值的取值区间，如表 2 所示.

表 2　不同置信水平上 Shapley 值的取值区间

Table 2 The intervals of Shapley values

	α = 0.8	α = 0.6	α = 0.4	α = 0.2
$\varphi_1(v)$	[19.8, 20.3]	[19.5, 20.6]	[19.3, 20.9]	[19.1, 21.2]
$\varphi_2(v)$	[17.0, 17.9]	[16.4, 18.3]	[15.9, 18.7]	[15.4, 19.1]
$\varphi_3(v)$	[12.3, 12.8]	[12.0, 13.1]	[11.8, 13.4]	[11.6, 13.7]

根据表 2 的结果，刻画局中人 1，2 和 3 的模糊 Shapley 值隶属函数，如图 3 所示.

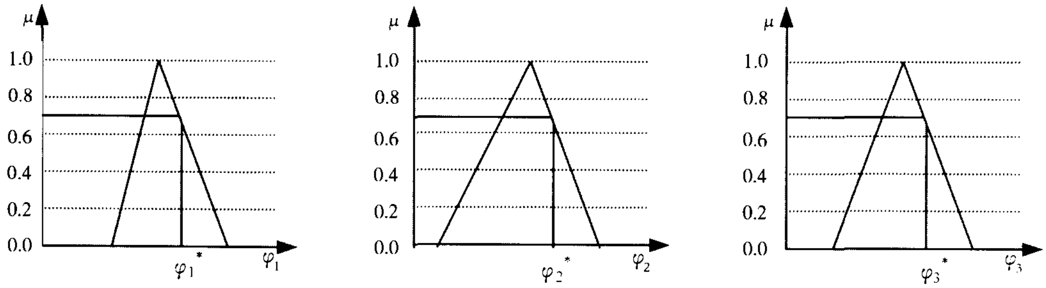

图 3　局中人 1，2 和 3 的模糊 Shapley 值隶属函数

Fig.2 The fuzzy Shapley membership functions of player 1, 2 and 3

为了选择适宜的合作策略，局中人需要根据上面得到的模糊 Shapley 值隶属函数进行决策. 以局中人 1 为例，假设他希望决策具有较高的置信水平，选取 α = 0.8，且保守的认为不同联盟的收益以及自己的所得分配应该取置信水平 0.8 的下限. 由此可得 $\varphi^L_{0.8}(\tilde{v})$ = [19.8, 17.0, 12.3]，局中人 1 选取的合作策略是与局中人 2、3 共同结成联盟. 同理，局中人 2、3 通过类似局中人 1 的方法得到联盟 K = {1, 2, 3} 是他们的最优策略. 这样，联盟 K = {1, 2, 3} 就组建了.

当联盟 K = {1, 2, 3} 合作结束时，联盟的实际收益 $v^*\{1, 2, 3\}$ = 51.5，通过计算可得，实际收益 $v^*\{1, 2, 3\}$ 对应于模糊支付函数 $\tilde{v}\{1,2,3\}$ 的隶属度为 α^* = 0.7，处于隶属函数核心的右侧，通过图 3 可以找到隶属度为 0.7，且与 $v^*\{1, 2, 3\}$ 同侧的 Shapley 值分别为

$$\varphi_1^* = 20.45 \quad \varphi_2^* = 18.10 \quad \varphi_3^* = 12.95$$

以上的计算结果就是在联盟结束时，对于动态联盟总体收益为 51.5 万元时每个盟员的所得分配，其中局中人 1 分得 20.45 万元，局中人 2 分得 18.10 万元，局中人 3 分得 12.95 万元.

4　结　论

与经典的 Shapley 值方法相比，本文提出的方法将支付函数用模糊数来表示，更加贴近现实；与 Mareš 的方法相比，本文的方法计算量相对较小，且在得到模糊 Shapley 值的基础上，进一步给出了确定的收益分配方案，更加具有应用价值. 然而，在本文的研究中发现，若在 $\alpha, \alpha_0 \in [0, 1]$ 且 $\alpha < \alpha_0$ 的条件下，存在不等式 $\tilde{\varphi}^{iL}_{\alpha}(\tilde{v}) \leqslant \tilde{\varphi}^{iL}_{\alpha_0}(\tilde{v})$，$\tilde{\varphi}^{iR}_{\alpha_0}(\tilde{v}) \leqslant \tilde{\varphi}^{iR}_{\alpha}(\tilde{v})$，$\tilde{\varphi}^{iR}_{\alpha_0}(\tilde{v}) \leqslant \tilde{\varphi}^{iL}_{\alpha_0}(\tilde{v})$ 同时成立但不构成集合套的情况，因此如何解决模糊 Shapley 值的构造与集合套的矛盾，将成为以后研究的重点. 此外，在后续的研究中，将同时考虑局中人参与联盟程度模糊化和支付函数模糊化的情形[15]，对模糊合作对策解的求得展开更深入的研究.

参 考 文 献：

[1] Shapley L S. A value for n-persons games[J]. Annals of Mathematics Studies, 1953, 28: 307—318.

[2]Aumann R J, Shapley L S. Values of Non-Atomic Games[M]. Princeton: Princeton University, 1974.

[3]Aubin J P. Coeur et Valeur des Jeux Flous à Paiements Latéraux[C]. Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l' Académie des Sciences, 1974, A (279): 891—894.

[4]Aubin J P. Mathematical Methods of Game and Economic Theory[M]. Amsterdam: North-Holland Press, 1980.

[5]Aubin J P. Cooperative fuzzy games[J]. Mathematical Operation Research, 1981, 6: 1—13.

[6]Butnariu D. Fuzzy games: A description of the concept[J]. Fuzzy Set and System, 1978, 1: 181—192.

[7]Butnariu D. Stability and Shapley value for an n-persons fuzzy games[J]. Fuzzy Set and System, 1980, 4: 63—72.

[8]Butnariu D, Klement E P. Triangular Norm-Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions[M]. Dordrecht: Kluwer Press, 1993.

[9]Butnariu D, Klement E P. Core, value and equilibria for market games: On a problem of Aumann and Shapley[J]. International Journal of Game Theory, 1996, 18: 149—160.

[10]Tsurumi M, Tanino T, Inuiguchi M. A Shapley function on a class of cooperative fuzzy games[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129: 596—618.

[11]Mareš M. Coalition Forming Motivated by Vague Profits[C]. In Proceedings of the Transactions, Mathematical Methods in Economy, Ostrava, 1995. 114—119.

[12]Mareš M. Fuzzy Coalition Forming[C]. In Proceedings of 7th IFSA World Congress, Prague, 1997. 70—73.

[13]Mareš M. Fuzzy coalition structures[J]. Fuzzy Set and System, 2000, 114: 23—33.

[14]Mareš M. Fuzzy Shapleu Value[C]. In Proceedings of Transactions of IPMU 2000, Madrid, 2000. 1368—1372.

[15]Mareš M. Fuzzy Cooperative Games: Cooperation with Vague Expectations[M]. New York: Physica-Verlag Press, 2001.

[16]Arts H, Hoede C, Funaki Y. A marginalisitc value for monotonic set games[J]. International Journal of Game Theory, 1997, 26: 97—111.

[17]Nishizaki I, Sakawa M. Fuzzy cooperative games arising from linear production programming problems with fuzzy parameters[J]. Fuzzy Set and System, 2000, 114: 11—21.

[18]Nishizaki I, Sakawa M. Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution[M]. New York: Physica-Verlag Press, 2001.

Shapley value for fuzzy cooperative games

CHEN Wen, *ZHANG Qiang*

Department of Management and Economics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract: In this paper, we make a study of the Shapley values with the fuzzy characteristic functions from the viewpoint that the payoff of each coalition are often only imprecisely or ambiguously known to the players. Axioms of the fuzzy Shapley value are extended on the basis of the deterministic one. From the viewpoint that the allocation for each player should be a crisp value rather than a fuzzy membership function at the end of cooperation, we proposed a crisp allocation scheme based on fuzzy Shapley values. Finally, we apply the method to profit allocation scheme among partners in virtual enterprises.

Key words: (fuzzy) cooperative games; fuzzy Shapley value; membership function