

# 基于独立成分分解的多元波动率模型<sup>①</sup>

王明进, 陈奇志

(北京大学光华管理学院, 北京 100871)

**摘要:** 利用独立成分分解(ICA)提出了一类新的多元波动率模型——IC-GARCH模型. 通过研究上海A、B股以及亚洲5个股票市场等两个真实数据的例子, 进一步分析比较了该模型与Morgan在Riskmetrics™中使用的EWMA模型和基于主成分分解的O-GARCH模型的拟合效果.

**关键词:** 独立成分分解; IC-GARCH模型; O-GARCH模型; 条件相关系数

**中图分类号:** F830      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1007-9807(2006)05-0056-09

## 0 引言

对单个资产的波动率和多个资产之间的条件协方差矩阵(通常也称为多元波动率)的研究是当前金融计量学领域的重要内容, 其意义无论对投资组合、资产定价还是风险管理都是非常重要的. 目前, 对单个资产的波动率建立的时间序列模型主要分成两类, 一类是以GARCH模型为基础推广得到的一系列模型, 譬如, EGARCH、GJR-GARCH、APGARCH等; 另一类是随机波动率(stochastic volatility)模型及其相应的一些推广形式. 近十几年来, 对上述两类模型的理论和应用的研究都取得了很大进展<sup>[1]</sup>.

相比之下, 对多元波动率的研究还处在一个比较初期的阶段. 由于涉及到对协方差矩阵建立动态模型, 从技术上看主要的困难有两个. 首先, 由于 $k$ 个资产收益率的协方差矩阵就有 $k(k+1)/2$ 个自由变量, 原则上对每一个都可以构造一个时间序列模型, 这势必导致大量的参数要估计, 在现有的非线性优化和计算机技术下实现起来通常是非常困难的; 其次是如何对参数限定条件来保证协方差矩阵的正定性. 到目前为止, 主要的多元波动率模型有vech-GARCH模型、BEKK模型、常值条件相关系数(CCC)模型、动态条件相关系

数(DCC)模型、因子GARCH模型等. 关于这些模型的一个综述参见文献[2]. 对上述模型的估计方法通常都是基于极大似然估计.

然而, 在实际构造投资组合或者进行风险管理等金融决策中, 由于动辄需要同时考虑数十个甚至上百个资产, 对于它们的协方差矩阵的预测问题事实上很难通过上述几种模型来获得. 因此, 人们更倾向于使用一些比较简单的模型, 比如, Morgan在其Riskmetrics™研究报告<sup>[3]</sup>中为了预测多个资产的协方差矩阵使用了一个简单的指数平滑模型, 并将其广泛应用于计算各类投资组合的VaR. 除此之外, Alexander建议使用基于主成分分解的O-GARCH模型<sup>[4]</sup>. 该模型通过主成分分解将一组变量的条件协方差矩阵的问题化成了分别考虑它们的主成分的一元波动率的问题, 这样前面提到的各类一元波动率模型就可以很直接地应用过来. 由于主成分分析的技术实现起来非常简单, O-GARCH模型可以很方便地适用于大量资产的情形.

但是, 正如本文作者之一此前参与的一项研究<sup>[5]</sup>中所指出的, 尽管主成分之间是无条件不相关的, 但是它们不一定是条件不相关的. O-GARCH模型中采用的假设“主成分之间的条件协方差矩阵是对角阵”通常是不成立的. 这在应用上

① 收稿日期: 2005-03-07; 修订日期: 2006-07-11.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70201007).

作者简介: 王明进(1970—), 男, 山东惠民人, 博士, 副教授. Email: mjwang@gsn.pku.edu.cn

往往会导致错误的结果, 见文献[5]及本文后面给出的例子. 为此, Fan 等人提出了条件不相关成分 (conditionally uncorrelated component, CUC) 的概念并由此提出了 CUC-GARCH 模型<sup>[5]</sup>, 但是其中涉及到的理论比较复杂, 实现起来也不太方便.

本文利用目前在神经计算或者机器学习等领域中研究较多的“独立成分分析” (independent component analysis, ICA) 的概念, 提出了一种相对简单的多元波动率模型, 即 IC-GARCH 模型; 同时也进一步指出了 Riskmetrics<sup>TM</sup>所使用的模型和 O-GARCH 模型在应用中所存在的问题. 相比之下, IC-GARCH 模型不仅可以几乎同样方便地实施, 也弥补了这两个模型所出现的错误并且在很多实际例子中均显示出非常好的拟合效果.

## 1 EWMA 及 O-GARCH 模型

用  $r_t$  表示  $k$  个资产的收益率组成的向量, 用  $\Omega_t$  表示  $t$  时刻的信息集合. 在不考虑条件均值的情况下, 假定  $E\{r_t | \Omega_{t-1}\} = \theta$ ,  $Cov(r_t | \Omega_{t-1}) = H_t$ . 各种不同的多元波动率模型使用定义在  $\Omega_{t-1}$  上的不同函数形式来表达  $H_t = (h_{ij,t})_{k \times k}$ .

Morgan 在它的 Riskmetrics<sup>TM</sup> 研究报告<sup>[3]</sup> 中提出的指数加权滑动平均 (exponentially weighted moving average, EWMA) 模型是一个非常简单和常用的关于高维协方差矩阵的预测模型, 其具体形式如下<sup>[3]</sup>:

$$\begin{aligned} H_t &= (1 - \alpha)r_{t-1}r_{t-1}^T + \alpha H_{t-1} \\ &\equiv (1 - \alpha) \sum_{j=1}^N \alpha^{j-1} r_{t-j} r_{t-j}^T \end{aligned} \quad (1)$$

这里 T 表示矩阵的转置. 不难看出, 在 EWMA 模型中, 第  $i$  个资产的波动率  $h_{ii,t}$  仅与该资产收益率  $r_{it}$  的历史值有关, 而其他资产的收益率变化无关; 类似地, 两个资产收益率之间的协方差也仅仅与这两个资产收益率交叉乘积的历史值有关, 与其他资产的变化无关. 显然, EWMA 模型是 Bollerslev 等人提出的如下形式的对角 (diagonal) vech-GARCH 模型<sup>[6]</sup> 的一个特例

$$H_t = C + \sum_{i=1}^q A_i \circ (r_{t-i} r_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^p B_j \circ H_{t-j} \quad (2)$$

这里  $C, A_i, B_j$  是  $k \times k$  矩阵,  $\circ$  表示矩阵的

Hadamard 乘积或元素对元素乘积运算.

当然, EWMA 模型中的参数可以通过极大似然估计得到. 但是在实际中, 人们通常直接采用 Riskmetrics<sup>TM</sup> 推荐的参数  $\alpha = 0.94$ , 参见文献[3] 第 2 章.

相比之下, O-GARCH 模型略微复杂些. 设  $r_t$  的无条件协方差矩阵存在并记为  $H$ , 记  $H$  的  $k$  个特征值分别为  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ , 它们各自对应的特征向量分别为  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , 易知有分解形式  $H = \Lambda V^T$ , 其中  $V = (v_1 v_2 \dots v_k)$  是正交矩阵,  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  是对角阵. 通常称  $y_{it} = v_i^T r_t$  为收益率向量  $r_t$  的第  $i$  个主成分,  $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{kt})^T$  为  $r_t$  的主成分向量. 显然,  $y_{it}$  的无条件方差就是  $\lambda_i$ , 且不同主成分之间的无条件协方差是零, 即  $Cov(y_t) = \Lambda$ , 因此, 不同主成分之间是无条件不相关的或者是相互正交的.

如果进一步假定上面得到的不同主成分之间同时也是条件不相关的, 即

$$Cov(y_t | \Omega_{t-1}) = \Lambda_t \equiv \text{diag}\{\lambda_{1t}, \lambda_{2t}, \dots, \lambda_{kt}\} \quad (3)$$

那么就可以用一元的 GARCH 模型来分别拟合各个主成分的波动率  $\lambda_{it}$

$$\lambda_{it} = \omega_i + \sum_{u=1}^q \alpha_{iu} y_{i,t-u}^2 + \sum_{v=1}^p \beta_{iv} \lambda_{i,t-v} \quad (4)$$

然后利用前面的分解得到原来收益率向量  $r_t$  的条件协方差矩阵为

$$H_t = V \Lambda_t V^T \quad (5)$$

按照上述方式得到的  $H_t$  的模型通常称为正交 GARCH 模型并简记为 O-GARCH 模型<sup>[4]</sup>.

由于主成分分解的技术比较成熟和简便, O-GARCH 模型是一个比较实用的方法. 但是, 各个主成分之间的无条件不相关性并不意味着它们也一定是条件不相关的<sup>[5]</sup>, 即假设(3) 通常并不成立, 这会在应用上导致错误的结果, 具体参见文献[5] 及本文后面的例子. 为了避免这种错误, Fan 等人<sup>[5]</sup> 提出了条件不相关成分 (CUC) 分解的概念以及 CUC-GARCH 模型并对其性质作了理论的探讨. CUC-GARCH 模型弥补了 O-GARCH 模型理论的缺陷, 但是估计方法比较复杂, 尤其对高维数据实现起来比较困难. 具体细节参见文献[5].

为了避免 O-GARCH 模型的上述错误, 本文尝试运用近几年来在神经计算等领域研究较多的独立成分分解 (ICA) 技术<sup>[7]</sup> 来建立  $H_t$  的模型. 尽管与主成分和条件不相关成分相比, “独立成分分

解”技术还缺乏严格的统计理论,但是正如后面的例子显示的,在很多具体情况下,使用基于独立成分分解的多元 GARCH 模型不仅可以避免 O-GARCH 模型中的上述错误,而且即便对于高维的收益率数据也可以非常便捷地实现,因此,在应用上该方法不失为一个比较好的选择。

## 2 独立成分分解及 IC-GARCH 模型

按照[7]给出的定义,对于给定的收益率向量  $r_t$ ,如果存在矩阵  $U$  以及  $k$  维向量  $s_t = (s_{1t}, s_{2t}, \dots, s_{kt})^T$ , 其中对每个时刻  $t$ ,  $s_{it}$  和  $s_{jt}$  ( $i \neq j$ ) 都是相互独立的,使得  $r_t = Us_t$ , 则称  $s_t$  是  $r_t$  的  $k$  个独立成分.  $U$  称为转换矩阵或混合矩阵 (mixing matrix). 事实上,可以将  $s_t$  理解为  $k$  个“潜在变量”(latent variable), 因此,每个观测到的收益率变量都是这些潜在变量的一个线性组合. 考虑到可辨识性,通常限定各个独立成分的无条件方差都是 1, 因此  $Cov(s_t) = I_k$ . 所谓的独立成分分解就是通过观测到的序列对这些潜在序列或者转换矩阵  $U$  进行估计的过程.

近些年来,独立成分分解的各种算法在神经计算等文献中得到广泛的研究,例如文献[7~9]等;在工程领域,独立成分分解也称为信号的盲源分解 (Blind source separation), 被大量应用于语音或图象的处理. 此外,独立成分分解也类似于统计学文献中的投影追踪 (Projection pursuit) 技术<sup>[10]</sup>. 将独立成分分解应用在金融数据分析当中的例子可参见文献[11, 12]等.

利用对收益率向量  $r_t$  的独立成分分解形式

$$r_t = Us_t \quad (6)$$

如果进一步假定每个独立成分  $s_{it}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  都服从一元 GARCH 模型, 即

$$s_{it} = \pi_{it}^{1/2} a_{it}, \quad a_{it} \sim \text{i. i. d.} (0, 1) \quad (7)$$

$$\pi_{it} = \omega_i + \sum_{u=1}^q \alpha_{iu} s_{i,t-u}^2 + \sum_{r=1}^p \beta_{ir} \pi_{i,t-r} \quad (8)$$

于是,收益率向量的条件协方差矩阵  $H_t$  可以表示为

$$H_t = U \Pi_t U^T \quad (9)$$

其中,  $\Pi_t = \text{diag}\{\pi_{1t}, \pi_{2t}, \dots, \pi_{kt}\}$ . 本文称由式(6)~(9)组成的模型为基于独立成分分解的多元 GARCH 模型, 简记为 IC-GARCH 模型.

类似于 O-GARCH 模型, 由式(9)易知  $H_t$  的正定性自动得到满足, 而且, 对其中涉及到的参数的

估计可以分步完成, 并将协方差矩阵的问题化成了多个一维问题来处理, 因此非常适合处理高维金融数据. 与 O-GARCH 模型不同的是, 这里的  $s_t$  是相互独立的成分, 因此其条件协方差矩阵  $\Pi_t$  在构造上就是一个对角矩阵. 这与前面式(5)中假设主成分的条件协方差矩阵  $\Lambda_t$  是对角阵的处理方式是不同的. 在后面会看到, 由于这种差距, IC-GARCH 模型在实际问题中的拟合效果要比 O-GARCH 模型好得多.

根据这种构造, 对 IC-GARCH 模型的估计包括两部分, 即对转换矩阵  $U$  的估计以及对各个独立成分的 GARCH 模型的估计. 下面分别给予分析.

首先看对转换矩阵  $U$  的估计. 由于每个独立成分的无条件方差存在并且都为 1, 易知  $E\{\Pi_t\} = I_k$ . 根据式(9), 收益率向量的无条件协方差矩阵应该满足  $H \triangleq E\{r_t r_t^T\} = E\{H_t\} = U U^T$ . 考虑到  $H$  的特征分解,  $H = V \Lambda V^T = (V \Lambda^{1/2})(V \Lambda^{1/2})^T$ , 因此  $U$  与  $V \Lambda^{1/2}$  之间相差一个正交变换, 即存在正交矩阵  $A$  使得

$$U = U \Lambda^{1/2} A \equiv G A \quad (10)$$

其中,  $G = V \Lambda^{1/2}$ . 显然, 通过对收益率序列的样本协方差矩阵的特征分解即可获得矩阵  $G$  的一个相合估计.

对  $A$  估计则要复杂一些. 沿用上一节对  $r_t$  主成分的定义, 设  $x_t = G^{-1} r_t \equiv \Lambda^{-1/2} y_t$ , 易知  $Cov(x_t) = I$ , 即  $x_t$  是经标准化的主成分向量. 考虑到独立成分向量满足式(6), 容易推知

$$s_t = U^{-1} r_t = A^T G^{-1} r_t = A^T x_t \quad (11)$$

因此, 独立成分向量应该是将标准化的主成分向量进行某种旋转得到的. 如果将 O-GARCH 模型中的主成分改为标准化的主成分(相应的转换矩阵也改为  $G$ ), 那么显然 IC-GARCH 模型与 O-GARCH 模型在形式上的区别就在于前者多了一个旋转矩阵  $A$ .

因此, 对于旋转矩阵  $A$  的估计是 IC-GARCH 模型中关键的部分. 尽管原则上可以通过假定收益率服从一定的条件分布而对包括  $A$  在内的全部参数同时进行极大似然估计, 比如最近 Lanne 和 Saikkonen 就一种类似的因子 GARCH 模型进行的研究<sup>[13]</sup>. 但是, 极大似然估计在高维情况下实施起来是很困难的. 为了应用上的方便, 这里建议运用一些直接针对独立成分分解的估计方法<sup>[7]</sup>.

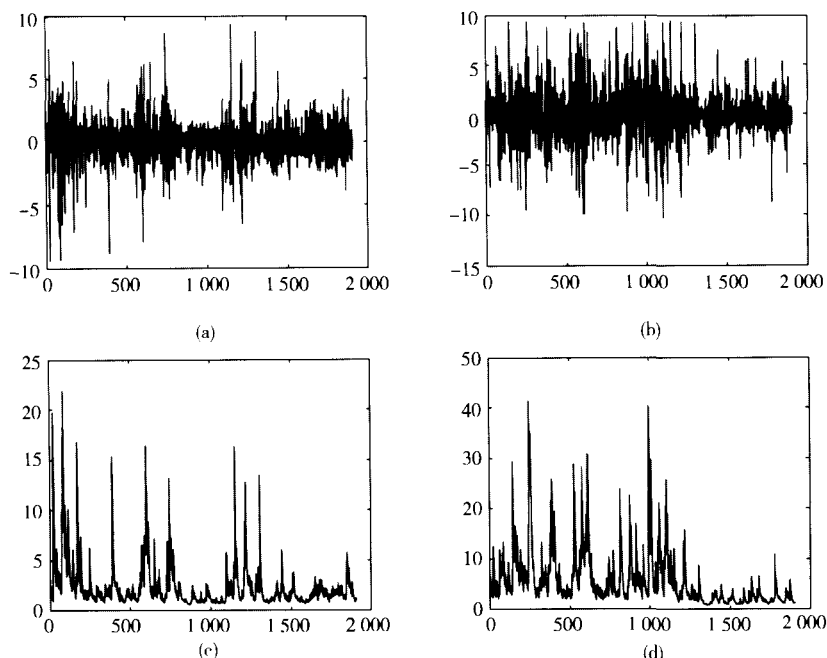


图 1 (a) 上海 A 股指数日收益率, 从 1997 年 1 月 3 日到 2004 年 12 月 15 日; (b) 同期的上海 B 股指数日收益率; (c) 由 IC-GARCH 模型拟合得到的 A 股波动率; (d) B 股的波动率  
Fig. 1 (a) Daily return of Shanghai A share, from Jan 3, 1997 to Dec 15, 2004. (b) Daily return of B share over the same period. Fitted volatility of A share (c) and B share (d) by IC-GARCH model

在目前常用的独立成分分解的算法中, 人们往往借助于优化非正态性(非高斯性)的度量来获得矩阵  $A$  的估计<sup>②</sup>. 常用的非正态性度量包括峰度以及负熵(negentropy)等. 对于一个均值为零的随机变量  $Z$ , 其峰度定义为

$$\text{Kurt}(z) = E\{z^4\} - 3(E\{z^2\})^2 \quad (12)$$

易知正态分布的随机变量峰度为零. 按照前面的分析, 独立成分分解过程即寻找形如  $z_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_i$ ,

$i = 1, 2, \dots, k$  的一组线性组合, 使得  $|\text{Kurt}(z_i)|$  最大. 譬如, 第一组向量  $\mathbf{a}_1$  可以直接由

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \arg \max_{\mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1} |\text{Kurt}(\mathbf{a}^T \mathbf{x}_i)| \quad (13)$$

获得; 第 2 组向量  $\mathbf{a}_2$  则在上述优化过程的基础上增加一个约束条件  $\mathbf{a}_2^T \hat{\mathbf{a}}_1 = 0$ . 后面的依此类推. 即便对于比较高维的数据, 上述优化过程也可以通过所谓的不动点算法<sup>[8]</sup> 快捷地实现. 关于独立成分分解的有关性质及其它算法可参考文献[7].

表 1 对两组收益率数据的统计描述  
Table 1 Statistical description of the return series

	上海 A 股	上海 B 股	HS	JN	SH	ST	TW
观测值	1 909	1 909	1 349	1 349	1 349	1 349	1 349
平均数	0.019	0.011	-0.020	-0.048	0.018	-0.008	-0.040
标准差	1.547	2.405	2.182	1.738	1.540	1.878	1.986
最小值	-9.399	-10.287	-14.735	-9.015	-8.728	-9.154	-9.936
最大值	9.400	9.456	20.208	8.888	8.849	19.556	9.787
偏度	-0.059	0.347	0.642	0.138	0.186	0.911	0.135
峰度	9.080	6.364	14.400	5.089	8.431	15.206	5.408
J-B	2 945.30	938.47	7 397.29	249.57	1 665.7	8 561.48	330.04
Q(10)	15.201	42.606***	32.225***	8.847	12.937	28.694***	16.972*
Q(20)	40.473***	57.588***	46.165***	19.151	26.926	40.722***	28.466*
$\Psi^*(5)$	-0.077	2.922***	-0.211	-1.953*	0.355	2.221**	1.683*
$\Psi^*(10)$	-0.013	2.962***	-0.076	-1.745*	0.396	1.679*	0.929

注: J-B 表示 Jarque-Bera 正态分布检验统计量;  $Q(k)$  表示 Ljung-Box 自相关性检验统计量;  $\Psi^*(k)$  表示具有对异方差稳健性质的 Lo-MacKinlay 方差比统计量, 其中  $k$  为滞后期. \*\*\*、\*\* 及 \* 分别表示在 1%、5% 及 10% 水平下显著.

② 对这类估计的原理可作如下理解: 通常一个独立成分的线性组合往往比每一个独立成分本身都更加接近正态分布, 或者说具有更强的正态性. 对于  $\mathbf{x}_i$  的线性组合来说, 显然都成立  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i = (\mathbf{A}^T \mathbf{c})^T \mathbf{s}_i$ , 其中  $\mathbf{c}$  是一个单位向量. 那么, 当  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{A}$  的一列向量相等(平行)时,  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i$  正好等于一个独立分量; 否则它就仍是这些独立分量的一个线性组合, 从而比前面一种情况具有更强的正态性. 因此, 极大化  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i$  的一种非正态性度量即可以获得  $\mathbf{A}$  的一个估计.

一旦获得  $A$  或者  $U$  的估计之后,独立成分向量  $s_i$  就可以相应地得到,因此,针对各个独立分量的一维 GARCH 模型(7)、(8)中的参数就可以通过拟最大似然估计(QMLE)方法分别获得。

与 O-GARCH 模型相比,IC-GARCH 模型使用的是对  $r_t$  的独立成分分解,尽管这种“独立性”只是近似的,但是可以预期这种“独立成分”的条件协方差矩阵比主成分的条件协方差矩阵更加接近对角阵,从而避免在 O-GARCH 模型假设中的错误。

### 3 对所用数据的描述

下面用两组数据来分析一下 IC-GARCH 模型的拟合效果.本节先给出数据的基本统计性质,模型分析的结果在下一节.第 1 组是上海证券市场 A、B 股指数的日收益率数据,时间从 1997 年 1 月 2

日到 2004 年 12 月 15 日,数据来自 DataStream;第 2 组数据是关于亚洲 5 个证券市场的指数收益率<sup>[5]</sup>,分别是香港恒生指数(记为 HS)、日本 Nikkei 225 指数(JN)、上海证券市场综合指数(SH)、新加坡海峡时报指数(ST)、台湾加权指数(TW),时间从 1997 年 8 月 1 日到 2003 年 12 月 30 日,数据来自 Yahoo!Finance,已经按照分红和股票拆细进行了调整.收益率均按对数收益率计算并以百分数计。

图 1(a) 和(b)给出了上海 A、B 股收益率的图形.表 1 中列出了两组数据的基本统计量.从该时段看,A 股的平均收益要高于 B 股,且标准差显示其风险也小一些.对于第 2 组数据,在该时段里只有上海市场的平均收益率大于零,而且,其风险也是最小的.峰度系数和 J-B 统计量表明各个收益率都显示尖峰肥尾的背离正态分布的性质。

表 2 对上海 A、B 股数据的估计结果

Table 2 Estimation result for Shanghai A & B share data

		转换矩阵		$\omega_i$	$\beta_i$	$\alpha_i$
标准化	$x_1$	0.166	0.352	0.073 (0.019)	0.764 (0.040)	0.163 (0.032)
主成分	$x_2$	-0.754	0.355	0.016 (0.005)	0.876 (0.020)	0.107 (0.031)
独立	$s_1$	0.408	-0.500	0.015 (0.005)	0.821 (0.029)	0.164 (0.031)
成分	$s_2$	0.655	-0.009	0.049 (0.014)	0.796 (0.035)	0.155 (0.033)

注:这里主成分的转换矩阵为  $G^{-1}$ ,独立成分的转换矩阵为  $U^{-1}$ .旋转矩阵  $A$  可由  $G^{-1}U$  给出.括号中给出的是相应的 Bollerslev-Wooldridge 标准误差.

为了检测数据中的自相关性,表 1 同时给出了 Ljung-Box 的  $Q(k)$  统计量和具有对异方差稳健性质的 Lo-MacKinlay 方差比统计量  $\Psi^*(k)$ <sup>[14]</sup>.前者在“收益率序列连续  $k$  个自相关函数为零”的假设下服从  $\chi_k^2$  分布,后者在收益率序列中无自相关性的假设下服从标准正态分布.综合两种检验结果可以看出,上海 B 股的日收益率数据中有较强的自相关性,SH 和 TW 中也表现出较强的自相关性.为了去除数据中的自相关性,对每个数据分别拟合了一个 AR(3) 模型,对残差序列进行同样的检验表明都已经没有了自相关性.以下分析就是针对滤波后的数据进行的.为方便起见,仍采用原来的记号表示每个序列.当然,对未经滤波的原始数据进行的同样分析,结果并没有显示出本质的区别。

### 4 模型的比较分析

为了比较不同模型的拟合效果,先介绍两类

不同的残差检验.其一是基于回归模型的残差检验.具体来说,令  $\hat{H}_t$  是拟合得到的  $r_t$  的条件协方差矩阵,记残差向量为  $\hat{\epsilon}_t = \hat{H}_t^{-1/2}r_t$ .如果对  $H_t$  的模型选择合适,可以预期对每一个  $i$ ,所有残差序列的历史值都不再对预测  $\hat{\epsilon}_{it}^2$  提供有用的信息.因此,可以构造一个以  $\hat{\epsilon}_{it}^2$  为因变量以所有残差序列(包括第  $i$  个)最近的  $\ell$  个历史值的平方及它们的交叉乘积为自变量的回归模型(含常数项),并通过常规的  $F$  检验来判断是否所有的自变量前面系数为零,其中  $\ell$  为滞后期.该检验曾被 Engle 用于检验他的 DCC 模型<sup>[15]</sup>.

其二是针对残差的交叉乘积的 Box-Pierce 检验.具体来说,设第  $i$  个收益率序列的残差(不同于前者)是  $\hat{\epsilon}_{it} = r_{it}/\hat{h}_{it}^{1/2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  定义

$$C_{ij,t} = \begin{cases} \hat{\epsilon}_{it}^2 - 1, & i = j \\ \hat{\epsilon}_{it}\hat{\epsilon}_{jt} - \hat{\rho}_{ij,t}, & i \neq j \end{cases} \quad (14)$$

其中:  $\hat{\rho}_{ij,t} = \hat{h}_{ij,t}/(\hat{h}_{it}\hat{h}_{jt})^{1/2}$  是  $r_{it}$  和  $r_{jt}$  之间估计的条件相关系数.如果  $H_t$  的模型选择合适,那么

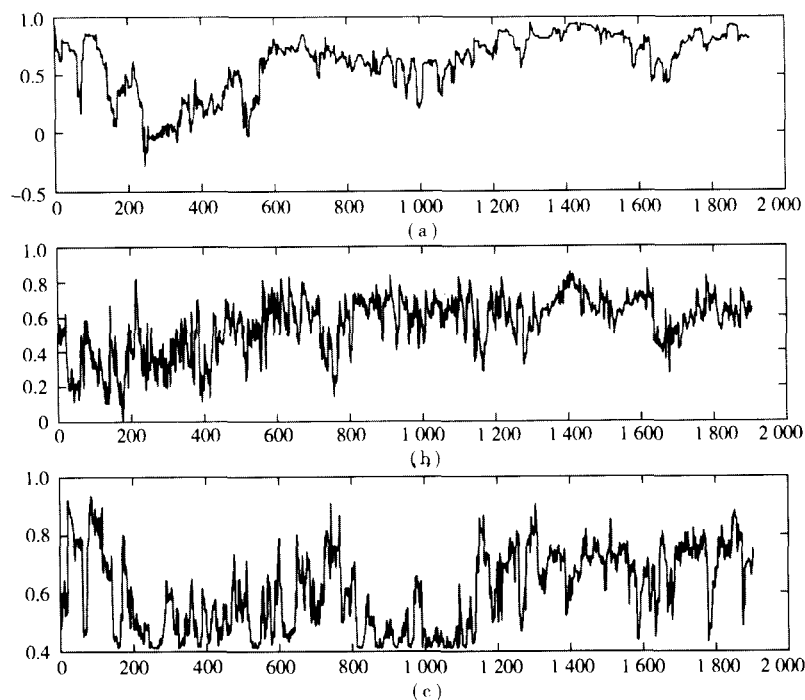


图 2 三种模型拟合得到的上海 A 股和 B 股的动态相关系数, 从上至下分别为 (a) EWMA 模型, (b) O-GARCH 模型, (c) IC-GARCH 模型。

Fig. 2 Fitted dynamic correlations between A share and B share of Shanghai stock market by (a) EWMA model, (b) O-GARCH model and (c) IC-GARCH model, respectively.

对任何  $i$  和  $j$ ,  $\{C_{ij,t}, t \geq 1\}$  都应没有任何自相关性. 可以用 Box- Pierce 的  $Q$  统计量度量这种自相关性

$$Q(ij, M) = T \sum_{l=1}^M r_{ij,l}^2 \quad (15)$$

这里  $r_{ij,l}$  是  $C_{ij,t}$  的第  $l$  个样本自相关函数, 为了检验“前  $M$  个自相关函数都为零”的假设可以仍然借用  $\chi_M^2$  分布<sup>[16]</sup>.

先看第 1 组数据. 这里针对该数据分别使用了 EWMA、O-GARCH 和 IC-GARCH 模型, 其中 EWMA 模型中的参数设为  $\alpha = 0.94$ , 独立成分分解或者矩阵  $A$  的估计则是使用了 FastICA 程序<sup>③</sup>. O-GARCH 模型和 IC-GARCH 模型的估计结果在表 2 中给出, 为了对比的一致性, 在 O-GARCH 模型中使用的是经标准化的主成分向量  $x_t$ , 因此  $Cov(x_t) = Cov(s_t) = I$ . 表 2 给出的对主成分的转换矩阵为  $G^{-1}(x_t = G^{-1}r_t)$ ; 对独立成分的转换矩阵为  $U^{-1}(s_t = U^{-1}r_t)$ . 尽管没有直接给出旋转矩阵  $A$  的估计, 但是根据式(10) 易知

$$\hat{A} = \hat{G}^{-1}\hat{U} = \begin{bmatrix} -0.716 & -0.699 \\ 0.699 & -0.716 \end{bmatrix}$$

通过比较两个转换矩阵或者是通过  $A$ , 不难看出(标准化的) 主成分和独立成分之间的确存在着较大的差异. 这里得到的第 1 个独立成分差不多是两个收益率之差, 而第 2 个独立成分则基本就是 A 股的收益率. 表 2 同时也给出了相应的各个分量的 GARCH(1, 1) 模型系数的估计值. 显然, 两个独立成分的  $\alpha_i + \beta_i$  都相对比较大, 说明它们的波动持续性 (volatility persistence) 要强一些; 相比之下, 第一个主成分中的波动率持续性要弱一些. 图 1(c) 和 (d) 分别给出了由 IC-GARCH 模型拟合得到的 A、B 股的波动率; 显然 B 股的波动率多大于 A 股.

尤其值得一提的是, 上述 3 种模型给出的 A、B 股收益率之间的动态相关系数存在着很大的差别, 分别见图 2(a)、(b) 和 (c). 无论是在变化的幅度上还是形态上, 3 种结果的差距都是明显的. 比如, 在 1997 年后期到 1998 年中期东南亚金融危机期间, 尽管 3 种模型都揭示出 A、B 股之间处在较低的相关水平上, 但是 EWMA 模型给出的数值显示此时两者之间几乎是不相关的, 而 O-GARCH 模型给出的结果略高于该水平, 而 IC-GARCH 模型

③ 该程序来自 <http://www.cis.hut.fi/projects/ica/fastica>. 参见文献[7].

给出的值要再高一些, 尽管仍然在这 8 年之中最低的水平上. 另外, 容易从前两种模型的结果中看到一个上升的趋势, 而 IC-GARCH 模型给出的是一个 W 型的变化趋势, 显示从 2000 年 6 月到 2001 年 10 月两个市场的相关性又曾一度下降至 8 年来的最低点. 通过计算 3 种模型得到的动态相关系数之间的相关系数可知, O-GARCH 模型和 IC-GARCH 模型得到的结果之间的相关系数是 -0.114, 说明两种模型得到关于动态相关系数是差别很大的. 由此不难想象, 利用这两种模型进行投资决策得到的结果也会有一定的差距.

表 3 的第 1 部分给出了对上海 A、B 股数据三种模型的残差检验结果. 显然, EWMA 模型无论从哪种检验的结果来看拟合效果都是最差的, O-GARCH 模型对 B 股波动率拟合得不够好, 从两种检验的结果来看 IC-GARCH 模型都是最好的; 而且, 不难看出, 无论是  $F$  统计量还是  $Q$  统计量, IC-GARCH 得到的值都要小于由另外两个模型得出的相应的值. 这也进一步说明了 EWMA 模型和 O-GARCH 模型在应用中存在的问题. 回到刚才对三种模型给出的 A、B 股动态相关系数的分析, 现

在不难在三者之间进行取舍了. 残差分析的结果显示出, IC-GARCH 模型给出的动态相关性变化更为可靠一些.

再来看第 2 组数据的分析结果. 具体转换矩阵及各分量的 GARCH 系数的估计结果均在表 4 中. 对矩阵  $A$  的估计可以用同前面例子一样的方法获得, 其具体值略去. 类似地, 在该例子中, 无论是从转换矩阵还是各个分量的 GARCH 系数来看, O-GARCH 模型的结果与 IC-GARCH 模型都有较大区别.

从拟合效果来看, 由于表 3 给出的  $F$  检验的结果都不显著, 似乎显示三种模型对数据拟合得都还可以, 但是仔细比较一下  $F$  值的大小就会发现, IC-GARCH 模型给出的值几乎都是最小的; 另外, Box-Pierce 检验的结果更加清楚地揭示了前两种模型拟合的不足. 比如对恒生指数波动率的拟合以及对上海与新加坡的相关性的拟合, 前面两个模型显然都不够充分, 因为相应的残差中还存在着一定的自相关性. 相比之下, IC-GARCH 模型对所有序列的拟合效果都是比较理想的.

表 3 三种模型的残差检验结果比较

Table 3 Residual checking for the three models

	上海 A、B 股数据			亚洲五市场数据		
	EWMA	O-GARCH	IC-GARCH	EWMA	O-GARCH	IC-GARCH
$F_1$	3.051***	1.351	1.034	0.515	1.127	0.744
$F_2$	4.557***	3.046***	0.391	0.448	0.305	0.314
$F_3$				0.456	0.306	0.338
$F_4$				0.495	0.344	0.156
$F_5$				0.460	0.341	0.290
$Q(1,1)$	47.708***	13.399	4.694	19.659***	51.480***	15.529
$Q(2,2)$	55.098***	16.440*	6.113	13.440	12.580	10.968
$Q(3,3)$				39.665***	8.582	11.905
$Q(4,4)$				20.761**	15.168	2.8390
$Q(5,5)$				11.826	16.949*	13.267
$Q(1,2)$	28.388***	3.871	3.791	11.236	7.919	3.922
$Q(1,3)$				10.201	3.419	3.236
$Q(1,4)$				15.331	15.945	6.428
$Q(1,5)$				6.443	8.627	6.044
$Q(2,3)$				12.806	9.548	10.974
$Q(2,4)$				7.454	5.556	3.561
$Q(2,5)$				13.656	6.181	5.404
$Q(3,4)$				18.595**	16.013*	7.911
$Q(3,5)$				7.720	1.990	2.284
$Q(4,5)$				9.754	5.451	4.157

注:  $F_i$  表示的是针对第  $i$  个残差序列作回归检验(即第 1 类残差检验)中的  $F$  统计量, 其中滞后期选为 5;  $Q(i, j)$  表示的是对第  $i$  和  $j$  个残差数列的乘积进行第 2 类残差检验得到的  $Q$  统计量, 其中滞后期取为 10. \*\*\*、\*\* 及 \* 分别表示在 1%、5% 及 10% 水平下显著.

## 5 结论

本文使用独立成分分解(ICA)的技术,提出了一类新的多元波动率模型,即 IC-GARCH 模型.相比常用的基于主成分分解的 O-GARCH 模型来说,由于独立成分中的近似“独立性”,使得它们的条件协方差矩阵比主成分的条件协方差矩阵更加接近对角矩阵,从而避免了 O-GARCH 模型的错误假设带来的拟合中的诸多问题.另外,由于独立成分分解的算法方便快捷,这使得 IC-GARCH 模型的

估计几乎可以像 O-GARCH 模型一样地快速实现,从而避免了其他多元波动率模型中复杂的计算过程.

借助两种残差检验方法,本文对两组实际数据分析比较了 Morgan 的 EWMA 模型、O-GARCH 模型和 IC-GARCH 模型的拟合效果,发现 IC-GARCH 模型在两个例子中均显著地好于另外两个模型,并且在有时会与 O-GARCH 模型的结果存在明显的差异.上述结果提醒在应用中要注意到前两个模型适用性,同时也显示在很多情况下,IC-GARCH 模型可能是一个更好的选择.

表4 对亚洲5个市场数据的估计结果

Table 4 Estimation result for Asian 5 markets data

		转换矩阵					$\omega_i$	$\beta_i$	$\alpha_i$
标准化 主成分	$x_1$	-0.218	-0.128	-0.021	-0.173	-0.138	0.074 (0.024)	0.834 (0.039)	0.093 (0.032)
	$x_2$	0.216	0.065	0.005	0.099	-0.526	0.009 (0.005)	0.938 (0.016)	0.053 (0.014)
	$x_3$	-0.010	0.017	0.647	-0.070	-0.009	0.056 (0.019)	0.791 (0.048)	0.153 (0.043)
	$x_4$	-0.128	0.627	-0.049	-0.276	-0.027	0.064 (0.027)	0.854 (0.044)	0.082 (0.028)
	$x_5$	-0.549	0.166	0.055	0.631	-0.086	0.024 (0.011)	0.896 (0.026)	0.080 (0.019)
独立 成分	$s_1$	0.206	-0.127	0.074	0.394	-0.017	0.037 (0.012)	0.824 (0.030)	0.139 (0.028)
	$s_2$	0.524	0.073	0.052	-0.467	-0.255	0.021 (0.007)	0.912 (0.019)	0.067 (0.020)
	$s_3$	0.252	-0.624	-0.167	-0.092	0.080	0.067 (0.029)	0.862 (0.044)	0.070 (0.023)
	$s_4$	-0.014	-0.162	0.617	-0.074	0.099	0.061 (0.022)	0.797 (0.048)	0.141 (0.037)
	$s_5$	-0.181	-0.072	0.089	0.364	-0.472	0.069 (0.032)	0.865 (0.046)	0.066 (0.021)

注:其中主成分和独立成分的转换矩阵分别为  $G^{-1}$  和  $U^{-1}$ , 旋转矩阵  $A$  由  $G^{-1}U$  给出. 括号中是相应的 Bollerslev-Wooldridge 标准误差.

当然,目前对几种模型的比较研究还仅限于在统计学意义上,对于 IC-GARCH 模型是否真正能够为各类投资决策提供比上述两个模型更好的支持,将是进一步需要研究的课题.

## 参考文献:

- [1] Tsay R S. Analysis of Financial Time Series[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [2] Bauwens L, Laurent S, Rombouts J V K. Multivariate GARCH models: A survey[J]. Journal of Applied Econometrics, 2006, 21: 79—109.
- [3] Morgan/Reuters J P. Riskmetrics™—Technical Document[M]. 4th Edition, New York: Morgan Guaranty Trust Company, 1996.
- [4] Alexander C. Orthogonal GARCH. In Mastering Risk (II). London: Financial Times-Prentice Hall, 2001.
- [5] Fan J, Wang M, Yao Q. Modeling Multivariate Volatilities Via Conditional Uncorrelated Components[R]. Department of Statistics, London School of Economics and Political Science, 2004. <http://stats.lse.ac.uk/q.yao/qyao.links/paper/fwy05.pdf>



- [6] Bollerslev T, Engle R F, Wooldridge J M. A capital asset pricing model with time-varying covariances[J]. *Journal of Political Economy*, 1988, 99: 116—131.
- [7] Hyvärinen A, Karhunen J, Oja E. *Independent Component Analysis*[M]. New York: Wiley, 2001.
- [8] Hyvärinen A, Oja E. A fast fixed-point algorithm for independent component analysis[J]. *Neural Computation*, 1997, 9: 1483—1492.
- [9] Robert S, Everson R. *Independent Component Analysis: Principles and Practice*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [10] Huber P J. Projection pursuit[J]. *The Annals of Statistics*, 1985, 13: 435—475.
- [11] Back A D, Weigend A S. A first application of independent component analysis to extracting structure from stock returns[J]. *International Journal on Neural Systems*, 1998, 8: 473—484.
- [12] Kiviluto K, Oja E. Independent Component Analysis for Parallel Financial Time Series[C]. In Proc. ICONIP'98, Tokyo, 1998, 2: 895—898.
- [13] Lanne M, Saikkonen P. A Multivariate Generalized Orthogonal Factor GARCH Model[R]. School of Business and Economics, University of Helsinki, 2005. [http://www.core.ucl.ac.be/archives/CORE\\_ETRICSfiles/2005-06/lanne.pdf](http://www.core.ucl.ac.be/archives/CORE_ETRICSfiles/2005-06/lanne.pdf).
- [14] Lo A, MacKinlay A C. Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test[J]. *Review of Financial Studies*, 1988, 1: 41—66.
- [15] Engle R F. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models[J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 2002, 20: 339—350.
- [16] Tse Y K, Tsui A K C. A note on diagnosing multivariate conditional heteroscedasticity models[J]. *Journal of Time Series Analysis*, 1999, 20: 679—691.

## Multivariate volatilities modeling based on independent components

WANG Ming-jin, CHEN Qi-zhi

Guanghua School of Management, Peking University, Beijing 100871, China

**Abstract:** Multivariate volatility model play an important role in portfolio construction, asset pricing and risk management. In practice, since a large number of assets are considered simultaneously, the two most common models are the exponential weighted moving average (EWMA) model suggested in J. P. Morgan's Riskmetrics<sup>TM</sup> and orthogonal GARCH (O-GARCH) model based on principal component analysis (PCA) of the return series. However, the assumptions used in both models are too restrictive. For instance, principal components (PCs) are unconditionally uncorrelated but not necessarily conditionally correlated, so their conditional covariance matrix may not be diagonal and O-GARCH model is not reliable in this sense. This paper puts forward a new multivariate volatility model, i. e., IC-GARCH model, based on the so-called independent component analysis (ICA). It is expected that the conditional covariance matrix of ICs may look more like a diagonal one than that of PCs, which hopefully can remedy the defect of O-GARCH model. Two real data sets are used to illustrate the power of IC-GARCH model. The results from two mis-specification tests both demonstrate the advantage of IC-GARCH model over EWMA and O-GARCH models.

**Key words:** independent component analysis (ICA); IC-GARCH model; O-GARCH model; conditional correlation coefficient