第10卷第1期
2007年2月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol.10 No.1
Feb. 2007

具有网络外部性的扩展Hotelling模型①

徐 兵[1,2]，朱道立[1]
(1.复旦大学管理学院，上海 200433；2. 南昌大学管理科学与工程系，南昌 330047)

摘要：将网络外部性引入线性运输成本下的Hotelling模型，研究了两家网络产品厂商首先选址，然后进行价格竞争的两阶段完全信息动态博弈问题，得到了厂商价格竞争均衡的存在性条件，推广了一般Hotelling模型的结论.由于网络外部性的存在，消费者效用是相互依赖的.网络产品的市场份额既是消费者选择的结果，又是消费者选择的依据.文章将交通流量分配技术和无穷维变分方法相结合，建立了刻画网络产品市场划分的模型——无穷维变分不等式，并研究了市场划分的存在性和唯一性问题.最后假定厂商定位在两端，分析了产品的网络外部性特征及单位运输成本对两个厂商竞争均衡情况的影响.

关键词：Hotelling模型；网络外部性；Nash均衡；无穷维变分不等式

中图分类号：F270　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007-9807(2007)01-0009-09

0 引 言

产品差异化问题是现代产业组织理论有关市场结构与市场竞争研究的重要内容.消费者通常依据自身偏好，通过比较不同产品的价格、质量等产品属性来选择某种产品，以最大化自身效用.网络外部性(network externality)是影响消费者选择网络产品(如:电话、传真机、办公软件等)的重要因素，也是网络产品厂商进行产品差异化竞争的重要手段.网络外部性在电信、铁路、民航、软件产业、服务业等行业中广泛存在，已成为经济、营销、管理等诸多方面的研究热点.网络外部性表现为消费者使用某种产品的价值，会随着使用该产品极其兼容产品的用户总量的增加而增加，即原有的用户免费得到了由于用户数量的增加而新增加的产品价值，却无需为这一部分的价值提供相应的补偿[1~4].例如使用WPS办公软件的用户越多，潜在的可相互交换信息的对象越多，WPS办公软件越有价值；随着可刷卡消费的商店增加，使用银行卡的消费者效用越大等.

Hotelling空间竞争模型是研究产品差异化竞争的经典模型，是分析企业选址、定价两阶段博弈的有效工具[5].文献[6]讨论了Hotelling模型中最优选址问题和价格均衡的存在性条件：在线性运输成本条件下，如果两家厂商定位太近，则不存在纯战略价格均衡；在二次运输成本条件下，厂商将选址为线性城市的两端，以最大化产品差异.20世纪年代之后，许多学者对Hotelling模型进行了多种形式的推广.文献[7,8]分别在交通费用函数为 $d(x)=bx^{\alpha}$、$d(x)=ax+bx^2$ 形式下对Hotelling模型进行了研究.文献[9]将信息交换费用引入厂商成本函数、文献[10]假定消费者在[0,1]区间非均匀分布，分别运用Hotelling模型研究了厂商选址和价格竞争的两阶段博弈问题.有关Hotelling模型的已有研究还包括单位运输成本为内生变量的研究[11]、厂商采取歧视性定价策略的分析[12]、存在消费者购买选择的Hotelling模型[13]等.

把网络外部性引入Hotelling模型，研究两家网络产品厂商的竞争问题，在经济和管理中是非常有意义的工作.部分学者在二次运输成本假

① 收稿日期：2004-08-23；修订日期：2006-03-29.
基金项目：国家自然科学基金重点项目(70432001).
作者简介：徐 兵(1972—)，男，江西南昌人，博士生，讲师.Email:xu_bing99@sina.com.

设[14,15]或厂商定位在线性城市两端情况[16]下进行了少量研究.对具有网络外部性的扩展Hotelling模型进行研究,首先要根据消费者选择理论求出产品的市场份额,从而获得厂商利润函数,据此再进行价格和选址决策分析.由于网络外部性的存在,消费者的选择依据又决定于产品的市场份额.因此必须用所谓的不动点定理[17]来求网络产品市场份额.现有研究网络外部性的文献,大多假定产品的网络外部性特征为特殊情况,如:产品完全不兼容且外部强度系数相同[14,15,18]等;并且通常在经济学中的理性预期假设下求网络产品市场份额:即假设消费者对产品销量有一个理性预期,从而得到消费者在预期销量情况下购买网络产品的效用,然后运用无差异曲线方法得到市场份额,再假设预期销量正好等于所求出的市场份额,从而确定市场划分[1~3,14~16,18].当市场上厂商个数较多,产品网络外部性特征为一般情况时,很难用此方法来求解网络产品市场划分.

文献[19]研究了具有多个指标以及无穷类别出行者的交通均衡问题,其中出行者对指标的偏好 α 服从某种分布.出行者由于不同的偏好而引起不同的广义出行费用,用无穷维变分不等式

$$\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) + \alpha \boldsymbol{G}, x - y \rangle \leqslant 0, \forall\, y \in \Omega(\alpha)$$

来刻画此交通均衡问题.其中,$\boldsymbol{G}$ 为道路使用货币支付(常向量),$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ 为道路通行时间向量(与道路流量 X 有关),α 相当于单位货币的时间转换当量.这是个带外部性的垂直差异化问题.文献[19]证明了这一类交通均衡问题解的存在性、唯一性,分析了解的性质及求解算法的收敛性.作者注意到,在具有网络外部性的Hotelling模型中,必须考虑消费者在空间中的不同分布而引起的不同交通费用,以及网络外部性的影响.本文将把空间分布的消费者对网络产品的选择问题转化为交通网络中无穷类别出行者的道路选择问题.从而网络产品市场划分可通过下面的无穷维变分不等式

$$\langle \boldsymbol{P} - \boldsymbol{U}_0 - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta}), x - y \rangle \leqslant 0, \quad \forall\, y \in \Omega(\theta)$$

来刻画.其中,$\boldsymbol{P}$ 为产品价格向量,$\boldsymbol{U}_0$ 为产品保留效用向量(常向量),$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ 为产品网络外部效应向量(与产品市场份额 X 有关),$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})$ 为交通费用函数向量,θ 为消费者位置.与文献[19]不同,本文研究的是个带外部性的水平差异化问题.

1 网络外部性和扩展Hotelling模型

1.1 模型假设

如图1,假设存在一个长度为1的“线性城市”,消费者总数标准化为1,并沿城市均匀分布.用 θ 表示消费者所在位置,交通费用为线性函数,单位交通费用 $t > 0$.假定 a,$1-b$ 处存在厂商1和厂商2,提供除位置差异(即产品水平差异)及网络外部性差异之外的同质产品.两家厂商进行如下两阶段完全信息动态博弈:首先同时决定所处位置,满足 $a \geqslant 0, b \geqslant 0, a + b \leqslant 1$;然后同时决定产品价格 p_1, p_2.假设每个消费者只购买一件产品,且产品的保留效用 u_0 足够大,因而市场被完全覆盖.若不考虑网络外部性,可运用一般Hotelling模型来分析两个厂商的定位和价格博弈问题[6].

现在建立产品具有网络外部性的扩展Hotelling模型.假设产品 i 的外部强度系数为 α_i,满足 $1 \geqslant \alpha_i \geqslant 0$;产品 i 与产品 j 的兼容系数为 β_{ij},满足 $1 \geqslant \beta_{ij} \geqslant 0$,其中,$\beta_{ij} = 1$ 表示产品 i 完全兼容产品 j,$\beta_{ij} = 0$ 表示产品 i 不兼容产品 j.设 $x_i(\theta)$ 表示位置在 θ 的使用产品 i 的消费者人数,$X_i = \int_0^1 x_i(\theta)\mathrm{d}\theta$ 表示使用产品 i 的消费者总人数,即产品 i 的市场份额.记 $x(\theta) = (x_1(\theta), x_2(\theta))^{\mathrm{T}}$,$X = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}} = \int_0^1 x(\theta)\mathrm{d}\theta$.产品1,2的网络外部效应函数分别为 $f_1(X) = \alpha_1(X_1 + \beta_{12}X_2)$,$f_2(X) = \alpha_2(X_2 + \beta_{21}X_1)$.记 $\gamma_1 = \dfrac{\partial f_1(X)}{\partial X_1} - \dfrac{\partial f_2(X)}{\partial X_1} = \alpha_1 - \alpha_2\beta_{21}$,$\gamma_2 = \dfrac{\partial f_2(X)}{\partial X_2} - \dfrac{\partial f_1(X)}{\partial X_2} = \alpha_2 - \alpha_1\beta_{12}$,即 γ_i 是由于产品 i 的需求增加而引起的产品 i 与产品 j 的网络外部性的边际增加值之差.$\gamma_i \geqslant \gamma_j$ 等价于 $\alpha_i + \alpha_i\beta_{ij} \geqslant \alpha_j + \alpha_j\beta_{ji}$,即 γ_i, γ_j 的大小关系反映了产品 i 与产品 j 的网络外部性特征的大小关系,且 $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha_1(1 - \beta_{12}) + \alpha_2(1 - \beta_{21}) \geqslant 0$.位置在 θ 的消费者使用产品1,2的效用分别为

$$U_1(\theta, X) = u_0 + f_1(X) - p_1 - |\theta - a|\, t \tag{1}$$

$$U_2(\theta, X) = u_0 + f_2(X) - p_2 -$$

$$|1-b-\theta|t \tag{2}$$

记 $P=(p_1,p_2)$，$U_0=(u_0,u_0)$，$F(X)=(f_1(X),f_2(X))$，$G(\theta)=(|\theta-a|t,|1-b-\theta|t)$.

1.2 刻画网络产品市场划分的无穷维变分方法

给定厂商位置、产品价格及网络外部性特征，消费者将根据效用最大化原则选择产品. 由于存在网络外部性，消费者的效用是相互依赖的. 网络产品市场份额既是消费者选择的结果，又是消费者选择的依据. 因此网络产品市场份额的计算是个不动点问题. 将上述网络产品选择问题转化为交通网络中的出行者道路选择问题(如图2)：位置在 θ 的消费者(出行者)选择道路1，2从 O 到 D，所付费用分别为 $-U_1(\theta,X)$，$-U_2(\theta,X)$. 每个出行者都依据费用最小原则选择道路，流量 X 对应到产品市场份额. 利用文献[19]中无穷类别出行者的交通网络流量分配技术，网络产品市场份额计算等价于求：$x(\theta)\in\Omega(\theta)=\{x(\theta):x_1(\theta)+x_2(\theta)=1,x(\theta)\geqslant 0,\forall\theta\in[0,1]\}$，$X=\int_0^1 x(\theta)\mathrm{d}\theta$，满足无穷维变分不等式

$$\langle P-U_0-F(X)+G(\theta),x-y\rangle\leqslant 0$$
$$\forall y\in\Omega(\theta) \tag{3}$$

设变分不等式(3)的解(即市场划分)为 X，假定此时位置在 $\bar\theta$ 的人选择了产品1，即 $x(\bar\theta)=(1,0)^{\mathrm{T}}$，令 $y(\bar\theta)=(0,1)^{\mathrm{T}}$，代入式(3)，有 $U_1(\bar\theta,X)\geqslant U_2(\bar\theta,X)$ 对选择产品2的消费者有类似结论. 这表明变分不等式(3)的解，是消费者依据效用最大化原则选择产品所确定的市场划分. 网络产品的市场份额对应到上述交通问题的均衡流量，有

变分不等式(3)的经济解释是：当网络产品市场中消费者的产品选择(相当于所对应的交通问题中的道路选择)达到均衡时，在其他消费者不改变产品选择的情况下，单个消费者单独改变产品选择不可能使其效用变大.

由假设，有 $x_2(\theta)=1-x_1(\theta)$，$X_2=1-X_1$. 经简单推算，变分不等式(3)可化为：求 $x_1(\theta)\in\Omega_1(\theta)=\{x_1(\theta):1\geqslant x_1(\theta)\geqslant 0,\forall\theta\in[0,1]\}$，$X_1=\int_0^1 x_1(\theta)\mathrm{d}\theta$，满足变分不等式

$$\langle p_2-p_1-\gamma_2+(\gamma_1+\gamma_2)X_1+(|1-b-\theta|-|\theta-a|)t,\ x_1(\theta)-y_1(\theta)\rangle\geqslant 0,$$
$$\forall y_1(\theta)\in\Omega_1(\theta) \tag{4}$$

定义1 当 $a+b=1$，$\beta_{12}=\beta_{21}=1$，$p_1-p_2=\alpha_1-\alpha_2$(特别 $p_1=p_2$，$\alpha_1=\alpha_2$ 时，变分不等式(4)左边恒为零，此时称变分不等式(4)为退化的，否则称变分不等式(4)为非退化的.

令 $\Omega_1=\{x_1\in L(0,1):1\geqslant x_1(\theta)\geqslant 0,\forall\theta\in[0,1]\}$，$\overline{\Omega}_1=\{X_1\in R:1\geqslant X_1\geqslant 0\}$. 记

$$H(X_1)=p_2-p_1-\gamma_2+(\gamma_1+\gamma_2)X_1$$
$$M(\theta)=(|1-b-\theta|-|\theta-a|)t=\begin{cases}(1-b-a)t & 当\ \theta\in[0,a)\\(1-b+a-2\theta)t & 当\ \theta\in[a,1-b]\\-(1-b-a)t & 当\ \theta\in(1-b,1)\end{cases}$$

因此 $H(X_1)$ 是 $\overline{\Omega}_1$ 上的连续有界增函数，$M(\theta)$ 是 $[0,1]$ 上的连续有界减函数.

变分不等式(4)只要求对任意 $\theta\in[0,1]$ 几乎处处成立，即不满足变分不等式(4)的 θ 的测度为零. 所以变分不等式(4)等价于求 $x_1\in\overline{\Omega}_1$，满足下面的无穷维变分不等式

$$\langle H(X_1)+M(\theta),x_1-y_1\rangle_L\geqslant 0,$$
$$\forall y_1\in\Omega_1 \tag{5}$$

其中：$\langle\rangle_L$ 为 $L(0,1)$ 空间内积，即：$\langle\Phi,\Psi\rangle_L=\int_0^1\langle\Phi(\theta),\Psi(\theta)\rangle\mathrm{d}\theta$.

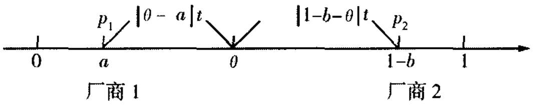

图1 Hotelling模型图示
Fig.1 Diagram of Hotelling model

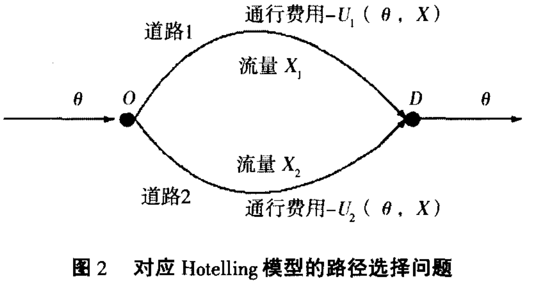

图2 对应Hotelling模型的路径选择问题
Fig. 2 Path choice problem transformed from Hotelling model

2 厂商竞争分析

用后退归纳法，分析两家网络产品厂商间的选址、定价两阶段完全信息动态博弈的纯策略

Nash 均衡问题. 首先要计算两种产品的市场份额.

2.1 网络产品诵场划分的存在性与唯一性

通过研究变分不等式(4)或(5)解的存在性和唯一性,来分析网络产品市场划分的情况.

定义2 设Ω为Banach空间V的子集,V^*是V的对偶空间,J是从Ω到V^*的映射.如果J在Ω上有界,对Ω中任意弱收敛于$x\in\Omega$的序列$\{x^k\}$,若$\lim\sup_k\langle J(x^k),x^k-x\rangle\leqslant 0$,有$\lim\inf_k\langle J(x^k),x^k-y\rangle\leqslant\langle J(x),x-y\rangle$,则称$J$为Lions意义上的伪单调映射[21].

文献[21]中给出了如下结论:

(A) 设Ω为Banach空间的非空有界闭凸子集,若J为Ω上的Lions意义上的伪单调映射,则至少存在一点$x^*\in\Omega$,满足变分不等式$\langle J(x^*),x^*-y\rangle\leqslant 0,\forall y\in\Omega$.

定理1 由已知条件,无穷维变分不等式(5)存在均衡解,也即给定厂商位置、产品价格及网络外部性特征,则一定存在对应的市场划分.

定理1的证明方法与文献[19]的定理2.2类似,只要证明变分不等式(5)满足结论(A)所需要的条件.因为篇幅所限,本文省略证明过程.进一步,市场划分存在三种可能情况:

情况1 产品1完全占有市场,即$x_1(\theta)=1$,$\forall\theta\in[0,1]$,$X_1=1$,由式(4),充要条件为

$$p_2-p_1+\gamma_1+(|1-b-\theta|-|\theta-a|)t>0,\forall\theta\in[0,1]\Leftrightarrow$$
$$p_1<p_2+\gamma_1-(1-b-a)t \tag{6}$$

情况2 产品2完全占有市场,即$x_1(\theta)=0$,$\forall\theta\in[0,1]$,$X_1=0$,由式(4),充要条件为

$$p_2-p_1-\gamma_2+(|1-b-\theta|-|\theta-a|)t<0,\forall\theta\in[0,1]\Leftrightarrow$$
$$p_2<p_1+\gamma_2-(1-b-a)t \tag{7}$$

情况3 产品1,2同时占有市场,充要条件为

$$\gamma_1-(1-b-a)t\leqslant p_1-p_2\leqslant(1-b-a)t-\gamma_2 \tag{8}$$

定义两种产品的水平差异为两家厂商的距离,即为$1-b-a$.由上述分析可知,对非网络产品(此时$\gamma_1=\gamma_2=0$),产品i要独占市场,其价格要低于对手的价格减去两个厂商位置差异所引起的交通费用.而对网络产品,如果$\gamma_i\geqslant(1-b-a)t$,即产品$i$的网络外部性较大,而两种产品的水平差异较小,此时即使其价格比对手高,产品i仍然可能独占市场;如果$\gamma_i<0$,即产品i的网络外部性较低,由$\gamma_1+\gamma_2\geqslant 0$可知,其竞争产品的网络外部性较高,此时产品$i$要以更低的价格才能占有市场.这能部分解释Windows操作系统的高价高市场占有率,及中国联通的低价策略.

下面进一步分析厂商定位与产品网络外部性特征对市场划分的影响.

(ⅰ) 若变分不等式(4)为退化的,则$\Omega_1(\theta)$中的任意元素均满足式(4),即其有无穷多个解.此时消费者对两种产品的选择是无差异的,因此市场划分存在多种可能.

(ⅱ) 若$2(1-b-a)t<\gamma_1+\gamma_2$,则式(8)不可能成立,即由于两种产品的水平差异小于网络外部效应的作用,市场将被一家厂商独占.进一步,如果存在价格p_1,p_2同时满足式(6)和式(7),此时变分不等式(4)有两个解$X_1=1$和$X_1=0$,说明市场划分存在两种可能情况.市场最终由哪家厂商独占,取决于两种产品的网络外部性的相对大小及初始销量(又称为安装基础).所以网络产品市场中,厂商经常在初始竞争阶段采用低价甚至亏损策略来扩大市场份额,提高其产品网络外部效应,从而将竞争对手挤出市场.例如,移动通信业中采用的入网并预存话费即送手机活动,就是一种扩大市场份额的策略.

(ⅲ) 若$2(1-b-a)t\geqslant\gamma_1+\gamma_2$,则市场划分只能是式(6),(7),(8)中的一种情况.如果两种产品同时占有市场,且变分不等式(4)非退化,则二者的市场份额可唯一确定.

由上述分析,有下面的命题1和定理2成立,其中命题1的证明见文章附录.

命题1 设$a+b<1$,且产品1,2同时占有市场,则存在$\bar\theta\in[a,1-b]$,有$x_1(\theta)=\begin{cases}1,当\ \theta\in[0,\bar\theta]\\0,当\ \theta\in(\bar\theta,1]\end{cases}X_1=\int_0^1 x_1(\theta)\mathrm{d}\theta=\bar\theta$满足变分不等式(4).若$t\neq\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)$,则

$$\bar\theta=\frac{p_2-p_1-\gamma_2+(1-b+a)t}{2t-\gamma_1-\gamma_2} \tag{9}$$

定理2 设变分不等式(4)非退化,若$2(1-b-a)t\geqslant\gamma_1+\gamma_2$,则无穷维变分不等式(4)存在

唯一解，即此时市场划分被唯一确定．

2.2　厂商价格竞争

假定厂商位置及产品网络外部性特征给定，研究两家厂商进行价格竞争的均衡情况．设 $2(1-b-a)t \geqslant \gamma_1+\gamma_2$，且 $t \neq \frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)$，综合市场划分的三种情况，得到两种产品的市场份额及两家厂商的利润函数分别为

$$X_1(p_1,p_2)=\begin{cases}\dfrac{p_2-p_1-\gamma_2+(1-b+a)t}{2t-\gamma_1-\gamma_2} & \gamma_1-(1-b-a)t \leqslant p_1-p_2 \leqslant (1-b-a)t-\gamma_2 \\ 1 & p_1 < p_2+\gamma_1-(1-b-a)t \\ 0 & p_1 > p_2+(1-b-a)t-\gamma_2\end{cases}$$

$$X_2(p_1,p_2)=1-X_1(p_1,p_2)$$
$$\Pi_1(p_1,p_2)=p_1X_1(p_1,p_2)$$
$$\Pi_2(p_1,p_2)=p_2X_2(p_1,p_2)$$

在厂商生产成本为零的假设下，如果 $(1-b-a)t < \max\{\gamma_1,\gamma_2\}=\gamma_i$，则对任意 $p_j \geqslant 0$，存在 $0<\varepsilon_0<\gamma_i-(1-b-a)t$，若厂商 i 选取价格 $0<p_i=p_j+\gamma_i-(1-b-a)t-\varepsilon_0$，此时式(6)或式(7)成立，产品 i 将完全占有市场．这说明如果产品水平差异过小，则网络外部性强的产品将完全占有市场，即出现所谓的“赢者通吃”现象．所以有如下命题2成立．

命题2　两家厂商进行价格竞争，同时占有市场的必要条件为 $(1-b-a)t \geqslant \max\{\gamma_1,\gamma_2\}$．两家厂商之间的价格竞争是非合作博弈，均衡价格 p_1^*, p_2^* 为二者竞争的 Nash 均衡解，满足

$$\begin{cases}\Pi_1(p_1^*,p_2^*) \geqslant \Pi_1(p_1,p_2^*),\ \forall p_1 \geqslant 0 \\ \Pi_2(p_1^*,p_2^*) \geqslant \Pi_2(p_1^*,p_2),\ \forall p_2 \geqslant 0\end{cases}$$

定理3　设 $(1-b-a)t \geqslant \max\{\gamma_1,\gamma_2\}$，且 $t \neq \frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)$ 有

1）若 $a+b=1$，两家厂商进行价格竞争，存在唯一均衡点 $p_1^*=p_2^*=0$；

2）若 $a+b<1$，两家厂商进行价格竞争，均衡价格存在的充分必要条件为

$$\frac{[(3-b+a)t-\gamma_1-2\gamma_2]^2}{2t-\gamma_1-\gamma_2} \geqslant 3[(4b+2a)t+\gamma_1-\gamma_2] \tag{10}$$

$$\frac{[(3+b-a)t-2\gamma_1-\gamma_2]^2}{2t-\gamma_1-\gamma_2} \geqslant 3[(2b+4a)t-\gamma_1+\gamma_2] \tag{11}$$

如果条件成立，对应的厂商均衡价格和利润分别为

$$\begin{cases}p_1^*=\frac{1}{3}[(3-b+a)t-\gamma_1-2\gamma_2] \\ p_2^*=\frac{1}{3}[(3+b-a)t-2\gamma_1-\gamma_2]\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases}\Pi_1^*=\dfrac{[(3-b+a)t-\gamma_1-2\gamma_2]^2}{9(2t-\gamma_1-\gamma_2)} \\ \Pi_2^*=\dfrac{[(3+b-a)t-2\gamma_1-\gamma_2]^2}{9(2t-\gamma_1-\gamma_2)}\end{cases} \tag{13}$$

定理3表明，如果厂商定位太近，即两种产品的水平差异过小时，则不存在纯战略价格均衡．进一步，有如下推论：

推论1　情况1．两种产品是非网络产品：即 $\alpha_1=\alpha_2=\beta_{12}=\beta_{21}$；

情况2 两种产品完全兼容且网络外部强度系数相同：即 $\alpha_1=\alpha_2, \beta_{12}=\beta_{21}=1$．

针对上述两种情况均有如下结论：

若 $a+b=1$，两家厂商进行价格竞争，存在唯一均衡点：$p_1^*=p_2^*=0$；

若 $a+b<1$，两家厂商进行价格竞争，存在均衡价格的充分必要条件为

$$\left(1+\frac{a-b}{3}\right)^2 \geqslant \frac{4}{3}(a+2b)$$
$$\left(1+\frac{b-a}{3}\right)^2 \geqslant \frac{4}{3}(2a+b)$$

如果上述条件成立，对应的厂商均衡价格和利润分别为

$$p_1^*=t\left(1+\frac{a-b}{3}\right), p_2^*=t\left(1-\frac{a-b}{3}\right)$$
$$\Pi_1^*=\frac{t}{2}\left(1+\frac{a-b}{3}\right)^2,$$
$$\Pi_2^*=\frac{t}{2}\left(1-\frac{a-b}{3}\right)^2$$

推论1中针对情况1的结论，正是一般 Hotelling 模型[6] 的结论，所以本文具有网络外部性的扩展 Hotelling 模型是文献[6]的推广．情况2

说明,如果两种网络产品完全兼容且网络外部强度系数相同,也即在网络外部性方面二者是无差异的,此时与非网络产品结论一样,均衡价格的存在性条件完全由产品的水平差异决定.

2.3 厂商选址决策

由推论 1 及文献[6],对于非网络产品,如果厂商选址在中心以极小化产品水平差异,此时两种产品的均衡价格及两个厂商的利润均为零,得到 Betrand 悖论.如果产品存在很小的水平差异,两个厂商间不存在价格竞争均衡.只有当产品水平差异足够大时,才能保证均衡价格存在.假如只考虑对称定位(即 $a = b$)情况,均衡价格存在的充分必要条件为 $a = b \leqslant \frac{1}{4}$.

由定理 3,对于网络产品,如果厂商选址在中心以极小化产品水平差异,此时两种产品要同时占有市场,其网络外部性特征必须完全相同,即两种产品是完全同质产品(否则网络外部性强的产品将独占市场),此时两个厂商的利润为零,同样得到 Betrand 悖论.只有当产品的水平差异足够大,才能保证两个厂商同时占有市场,并存在均衡价格.进一步,厂商的选址决策与网络外部性特征和单位交通费用 t 的相对大小有关.由命题 2,两个厂商要同时占有市场,单位交通费用 t 必须满足

$$t \geqslant \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$$

假如只考虑产品对称定位决策(即 $a = b$)及 $\gamma_1 = \gamma_2$ 情况,均衡价格存在的充分必要条件为

$$a = b \leqslant \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\gamma_1}{t}\right) \tag{14}$$

特别,当 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ 时,有 $a = b \leqslant \frac{1}{4}$.所以非网络产品的竞争均衡问题是网络产品竞争问题的特殊情况.另一方面,在式(10),(11)成立的条件下,有 $\frac{\partial \Pi_1(p_1^*, p_2^*)}{\partial a} > 0$, $\frac{\partial \Pi_2(p_1^*, p_2^*)}{\partial b} > 0$,即厂商有向中心定位的倾向.在式(14)约束下,两个厂商的最佳选址为 $a = b = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\gamma_1}{t}\right)$

3 市场结构分析

为简化起见,以 $a = b = 0, \beta_{12} = \beta_{21} = \beta$ 这一种情况为例,研究不同市场情况下 $t, \alpha_1, \alpha_2, \beta$ 对产品市场份额、均衡价格及厂商利润的影响.假设 $t \geqslant \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$,且 $t \neq \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$,可以证明此时式(10),(11)自然满足,即保证了两家厂商能同时占有市场.厂商均衡价格及利润由式(12),(13)给出,其中:$\gamma_1 = \alpha_1 - \alpha_2\beta, \gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_1\beta$.

3.1 一般市场结构分析

1) 网络外部强度系数大的产品,其市场份额、价格和利润均较高.因为

$$X_1^* - X_2^* = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(1 + \beta)}{3[2t - (\alpha_1 + \alpha_2)(1 - \beta)]}$$

$$p_1^* - p_2^* = \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha_2)(1 + \beta)$$

$$\Pi_1^* - \Pi_2^* = \frac{1}{3}(\alpha_1 - \alpha_2)(1 + \beta)$$

2) 产品均衡价格随兼容系数的增加而增加,随竞争产品的外部强度系数的增加而减小;当 $1 \geqslant \beta \geqslant 1/2$ 时,产品均衡价格随自身的外部强度系数的增加而增加,当 $0 \leqslant \beta < 1/2$ 时,产品均衡价格随自身的外部强度系数的增加而减小.因为对 $i, j = 1,2, i \neq j$,有

$$\frac{\partial p_i^*}{\partial \beta} = \frac{2\alpha_i + \alpha_j}{3} \geqslant 0, \frac{\partial p_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{\beta - 2}{3} < 0,$$

$$\frac{\partial p_i^*}{\partial \alpha_i} = \frac{2\beta - 1}{3}$$

3.2 完全不兼容市场结构分析($\beta = 0$),此时有

$$\begin{cases} p_1^* = t - \dfrac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} \\ p_2^* = t - \dfrac{2\alpha_1 + \alpha_2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_1^* = \dfrac{[3t - (\alpha_1 + 2\alpha_2)]^2}{9[2t - (\alpha_1 + \alpha_2)]} \\ \Pi_2^* = \dfrac{[3t - (2\alpha_1 + \alpha_2)]^2}{9[2t - (\alpha_1 + \alpha_2)]} \end{cases}$$

1) 产品均衡价格和厂商利润随自身的外部强度系数的增加而减小,随竞争产品的外部强度系数的增加而减小.因为对 $i, j = 1,2, i \neq j$,有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_i^*}{\partial \alpha_i} = -\dfrac{1}{3} < 0 \\ \dfrac{\partial p_i^*}{\partial \alpha_j} = -\dfrac{2}{3} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_i^*}{\partial \alpha_i} = \dfrac{[3t - (\alpha_i + 2\alpha_j)](\alpha_i - t)}{9[2t - (\alpha_1 + \alpha_2)]^2} \leqslant 0 \\ \dfrac{\partial \Pi_i^*}{\partial \alpha_j} = \dfrac{[3t - (\alpha_i + 2\alpha_j)](3\alpha_i + 2\alpha_j - 5t)}{9[2t - (\alpha_1 + \alpha_2)]^2} \leqslant 0 \end{cases}$$

2）厂商利润随 t 的增加（相当于产品水平差异变大）而增加（要求 u_0 充分大）. 因为

$$\frac{\partial \Pi_1^*}{\partial t} = \frac{[(3t-(\alpha_1+2\alpha_2)](6t-4\alpha_1-2\alpha_2)}{9[2t-(\alpha_1+\alpha_2)]^2} \geqslant 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2^*}{\partial t} = \frac{[(3t-(2\alpha_1+\alpha_2)](6t-2\alpha_1-4\alpha_2)}{9[2t-(\alpha_1+\alpha_2)]^2} \geqslant 0$$

3.3 完全兼容市场结构分析（$\beta = 1$），此时有

$$\begin{cases} p_1^* = t + \dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{3} \\ p_2^* = t + \dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi_1^* = \dfrac{(3t+\alpha_1-\alpha_2)^2}{18t} \\ \Pi_2^* = \dfrac{(3t+\alpha_2-\alpha_1)^2}{18t} \end{cases}$$

1）产品均衡价格和厂商利润随自身的外部强度系数的增加而增加，随竞争产品的外部强度系数的增加而减小. 因为对 $i,j=1,2,i\neq j$，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_i^*}{\partial \alpha_i} = \dfrac{1}{3} < 0 \\ \dfrac{\partial p_i^*}{\partial \alpha_j} = -\dfrac{1}{3} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi_i^*}{\partial \alpha_i} = \dfrac{3t+\alpha_i-\alpha_j}{9t} > 0 \\ \dfrac{\partial \Pi_i^*}{\partial \alpha_j} = -\dfrac{3t+\alpha_i-\alpha_j}{9t} < 0 \end{cases}$$

2）厂商利润随 t 的增加（相当于产品水平差异变大）而增加（要求 u_0 充分大）. 因为

$$\frac{\partial \Pi_1^*}{\partial t} = \frac{\partial \Pi_2^*}{\partial t} = \frac{(3t+\alpha_1-\alpha_2)(3t-\alpha_1+\alpha_2)}{18t^2} > 0$$

4 结论与进一步研究工作

本文将网络外部性引入线性运输成本下的 Hotelling 模型，针对产品网络外部性特征为一般情况，研究了两家网络产品厂商首先进行选址，然后进行价格竞争的完全信息动态博弈问题，得到了厂商价格竞争的均衡存在性条件，推广了一般 Hotelling 模型的结论. 因为网络外部性作用，消费者的效用是互相依赖的. 消费者选择网络产品的过程会改变产品网络外部性的大小，从而反过来影响到消费者选择. 网络产品市场份额的计算是个不动点问题. 本文利用无穷类别出行者的交通流量分配技术，用无穷维变分方法来刻画网络产品市场划分，并给出了网络产品市场划分的存在性与唯一性条件. 最后针对厂商定位在两端，且两种产品的兼容系数相同这一情况，分析了产品网络外部强度系数、兼容系数及单位运输成本对一般市场、完全兼容市场及完全不兼容市场中两家厂商均衡价格和利润的影响. 本文假定消费者对网络外部性的偏好完全相同. 可进一步将本文方法推广到空间 Hotelling 模型和消费者对网络外部性的偏好不相同情况的研究. 特别是，利用无穷维变分方法对存在多个厂商的市场划分及厂商竞争问题进行研究，将更能显现本文方法的有效性和意义.

参考文献：

[1]Katz M, Shapiro C. Network externalities, competition, and compatibility[J]. American Economic Review, 1985, 75 (3): 424—440.

[2]Katz M, Shapiro C. Technology adoption in the presence of network externalities[J]. Journal of Political Economy, 1986, 94: 824—841.

[3]Katz M, Shapiro C. Systems competition and network effects[J]. Journal of Economic Prespectives, 1994, 8: 93—115.

[4]张铭洪. 网络外部性及其相关概念辨析[J]. 广东工业大学学报, 2002, 2 (4): 88—90.
Zhang Minghong. Analyzing the network externality and correlative concepts[J]. Journal of Guangdong University of Technology(Social Sciences Edition), 2002, 2(4): 88—90. (in Chinese)

[5]Hotelling H. Stability in competition[J]. Economic Journal, 1929, 39 (153): 41—57.

[6]Aspremont C D, Gabszewicz J J, Thisse J F. On Hotelling's "Stability in competition"[J]. Econometrica, 1979, 47 (5): 1145—1150.

[7]Economides N. Minimal and maximal product differentiation in Hotelling's duopoly[J]. Economics Letters, 1986, 21: 67—71.

[8]Gabszewicz J J, Thisse J F. On the nature of competition with differentiated products[J]. Economic Journal, 1986, 96: 160—172.

[9]Mai C C, Peng S K. Cooperation vs competition in a spatial model[J]. Regional Science and Urban Economics, 1999, 29: 463—472.

[10]顾 锋，黄培清，周东生．消费者不均匀分布时企业的最小产品差异策略[J]．系统工程学报，2002，17 (5)：32—37.
Gu Feng, Huang Peiqing, Zhou Dongsheng. Strategy of minimum product differentiation with heterogeneity[J]. Journal of Systems Engineering, 2002, 17(5): 32—37. (in Chinese)
[11]曹辒建．运输成本内生化的三阶段 Hotelling 模型[J]．管理工程学报，2002，16 (1)：5—7.
Cao Yunjian. A three stage Hotelling model with endogenous transportation costs[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2002, 16(1): 5—7. (in Chines)
[12]曹辒建，顾新一．歧视性定价下的两阶段水平差异模型[J]．管理科学学报，2002，5 (2)：56—61.
Cao Yunjian, Gu Xinyi. Two-stage horizontal differentiation model with discriminatory pricing[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(2): 56—61. (in Chinese)
[13]顾 锋，薛 刚，黄培清．存在消费者购买选择的企业定价选址模型[J]．系统工程理论方法应用，1999，8 (4)：32—37.
Gu Feng, Xue Gang, Huang Peiqing. Hotelling's competition with consumer's choice[J]. Systems Engineering—Theory Methodology Applicaions, 1999, 8(4): 32—37. (in Chinese)
[14]汪淼军，厉 斌．网络外部性、竞争和产品差异化[J]．经济学(季刊)，2003，2 (2)：355—378.
Wang Miaojun, Li Bin. Network externalities, competition, and product's differentiation[J]. China Economic Quarterly, 2003, 2 (2): 355—378. (in Chinese)
[15]曹辒建，顾新一．一类存在网络外部性的水平差异模型[J]．管理科学学报，2002，5 (1)：59—64.
Cao Yunjian, Gu Xinyi. Horizontal differentiation model with network externality[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(1): 59—64. (in Chinese)
[16]王国才，朱道立．网络经济下企业兼容性选择与用户锁定策略研究[J]．中国管理科学，2004，12 (6)：91—95.
Wang Gaocai, Zhu Daoli. Study on the choice of compatibility and lock-in tactics under network economics[J]. Chinese Journal of Management Science, 2004, 12(6): 91—95. (in Chinese)
[17]Aubin J P. Optima and Equilibria[M]. New York: Springer-Verlag Press, 1998.
[18]Lambertini L, Orsini R. Existence of equalibrium in a differented duopoly with network externalities[J]. Japanese Economic Review, 2005, 56: 55—66.
[19]Marcotte P, Zhu D L. "Equilibrium with infinitely many differentiated classes of customers" in complementarity and variational problems[A]. In Pang J S, Ferris M, ed. Proceedings of the 13th International Conference on Complementarity Problems: Engineering and Economics and Applications and Computational Methods. SIAM, Philadelphia, 1997. 234—258.
[20]黄海军．城市交通网络平衡分析——理论与实践[M]．北京：人民交通出版社，1994.
Huang Haijun. Urban transportation network equilibrium analysis: Theory and practice[J]. Beijing: People Traffic Publishing Company, 1994. (in Chinese)
[21]Lions J L. Quelques Methods de Resolution des Problemes aux Limites non Lineaires (Solving Method for Nonlinear Limited Problem)[M]. Paris: Dunod, 1969.

Extended Hotelling model with network externality

XU Bing[1,2], *ZHU Dao-li*[1]
1. Management School, Fudan University, Shanghai 200433, China;
2. Management Science and Engineering Department, Nanchang University, Nanchang 330047, China

Abstract: Hotelling model with network externality and linear transportation cost functions is analyzed. Two firms, providing network products, play a two-stage dynamic game with perfect information. Firstly, they simultaneously choose their location, then they compete in price. The conditions for equilibrium price are obtained. One customer's utility is dependent on the others' products choice because of network externality. Customer choice determines the market share of network products. Meanwhile the market share reversely influences customer choice. By using of transportation flow distribution and infinite dimensional variational inequality method, the market share model of network products, i. e. infinite dimensional variational inequality, is set up. Its existence and uniqueness is studied. Finally, the influence of network externality character and unit transportation cost on the firms' competition equilibrium is analyzed under the assumption that two firms choose the location at the two ends.

Key words: Hotelling model; network externality; Nash equilibrium; infinite dimensional variational inequality

附录

命题1的证明：

证明　因为 $H(X_1)$ 是单调递增函数，$M(\theta)$ 是单调递减函数，且产品1，2同时占有市场，所以存在市场划分点 $\bar{\theta}\in(0,1)$，在 $\bar{\theta}$ 左侧的消费者都选择产品1，在 $\bar{\theta}$ 右侧的消费者都选择产品2，而 $\bar{\theta}$ 为无差异点，此时 $X_1=\bar{\theta}$. 令 $y_1(\theta)=\begin{cases}0,当\ \theta\in[0,\bar{\theta}]\\1,当\ \theta\in(\bar{\theta},1]\end{cases}$ 代入变分不等式(4).

1) 若 $\bar{\theta}\in(0,a)$，当 $\bar{\theta}<\theta<a$ 时，有 $p_2-p_1-\gamma_2+(\gamma_1+\gamma_2)\bar{\theta}+(1-b-a)t\leqslant 0$，此时式(7)成立，即产品2将独占市场，矛盾.

2) 若 $\bar{\theta}\in(1-b,1)$，当 $1-b<\theta<\bar{\theta}$ 时，有 $p_2-p_1-\gamma_2+(\gamma_1+\gamma_2)\bar{\theta}-(1-b-a)t\geqslant 0$，此时式(6)成立，即产品1将独占市场，矛盾.

所以 $\bar{\theta}\in[a,1-b]$. 此时 $x(\bar{\theta})=1$ 及 $x(\bar{\theta})=0$ 均满足变分不等式(4)，有

$$p_2-p_1-\gamma_2+(\gamma_1+\gamma_2)\bar{\theta}+(1-b+a-2\bar{\theta})t=0$$

若 $t\neq\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)$，有式(9)成立.　　证毕.

定理3的证明：

证明　1) 若 $a+b=1$，则 $\gamma_1=\gamma_2=0$，有 $\alpha_1=\alpha_2$，$\beta_{12}=\beta_{21}=1$，即两种产品是完全同质产品，厂商进行 Betrand 竞争，因此 $p_1^*=p_2^*=0$.

2) 若 $a+b<1$，先证必要性. 因为 $(1-b-a)t\geqslant\max\{\gamma_1,\gamma_2\}$，两个厂商进行价格竞争，则均衡价格一定满足式(8). 而在式(8)所确定的范围内，$\Pi_1(p_1,p_2)$ 是 p_1 的可微凹函数，$\Pi_2(p_1,p_2)$ 是 p_2 的可微凹函数，由一阶条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Pi_1(p_1^*,p_2^*)}{\partial p_1}=\\ \qquad\dfrac{p_2^*-2p_1^*-\gamma_2+(1-b+a)t}{2t-\gamma_1-\gamma_2}=0\\ \dfrac{\partial\Pi_2(p_1^*,p_2^*)}{\partial p_2}=\\ \qquad 1-\dfrac{2p_2^*-p_1^*-\gamma_2+(1-b+a)t}{2t-\gamma_1-\gamma_2}=0\end{cases}$$

可得到式(12)，再代入厂商利润函数，得到式(13). 因为厂商利润函数不是连续函数(图3)，p_1^*,p_2^* 是均衡解，必须满足

$$\begin{cases}\Pi_1(p_1^*,p_2^*)\geqslant\Pi_1(p_2^*+\gamma_1-(1-b-a)t-\varepsilon,p_2^*)\\ \Pi_2(p_1^*,p_2^*)\geqslant\Pi_2(p_1^*,p_1^*+\gamma_2-(1-b-a)t-\varepsilon)\end{cases}$$

等价于式(10)，(11).

再证充性. 假设式(10)和式(11)成立，由上述过程，只要证明式(12)的 p_1^*,p_2^* 满足式(8). 用反证法. 由式(10)，(11)，有

$$(p_1^*)^2\geqslant[2t-\gamma_1-\gamma_2][p_2^*+\gamma_1-(1-b-a)t]\quad(15)$$

$$(p_2^*)^2\geqslant[2t-\gamma_1-\gamma_2][p_1^*+\gamma_2-(1-b-a)t]\quad(16)$$

若 $p_1^*<p_2^*+\gamma_1-(1-b-a)t$，由式(15)，有

$$p_1^*>2t-\gamma_1-\gamma_2\Rightarrow(3+b-a)t<2\gamma_1+\gamma_2$$

与假设矛盾；若 $p_2^*<p_1^*+\gamma_2-(1-b-a)t$，由式(16)，有

$$p_2^*>2t-\gamma_1-\gamma_2\Rightarrow(3-b+a)t<\gamma_1+2\gamma_2$$

与假设矛盾. 所以 p_1^*,p_2^* 满足式(8).　　证毕.

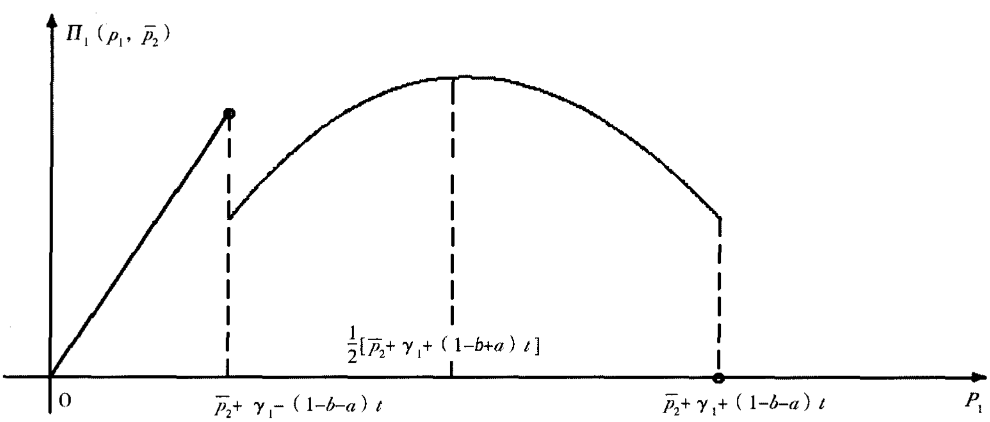

图3　厂商1的利润函数图示

Fig.3 Diagram of the profits function of manufacturer 1