第10卷第3期 管 理 科 学 学 报 Vol.10 No.3
2007年6月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Jun. 2007

基于MVA分析的过程能力指数的置信区间研究①

何 桢[1]，孔祥芬[1,2]，宗志宇[1]，董延峰[1]
（1.天津大学管理学院工业工程系，天津 300072；2.中国民航大学航空工程学院工业工程系，天津 300300）

摘要：传统的过程能力分析假定过程存在单一变异源，在利用方差分量法估计嵌套型多变异源问题的总方差和各方差分量的基础上，给出了过程能力指数的估计方法，并推导了Cp的置信区间.案例应用表明：由于MVA方法对变异来源进行了充分分析和估计，所以能够科学合理的对过程进行评价.

关键词：多变异分析；置信区间；方差分析；过程能力指数

中图分类号：F273.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1007－9807(2007)03－0030－07

0 引 言

过程能力指数是衡量生产过程中的产品质量特性符合规格和接近目标值的能力[1].常常用来选择供应商和评估过程改进[2].最普遍使用的过程能力指数是 C_p[3] 和 C_{pk}[4]，$C_p = \dfrac{USL - LSL}{6\sigma}$，$C_{pk} = \min\left\{\dfrac{USL-\mu}{3\sigma}, \dfrac{\mu - LSL}{3\sigma}\right\}$，其中，$USL$ 和 LSL 分别是质量特征值的上、下规格限，μ 和 σ 分别是质量特性的均值和标准差.但是，如何正确使用 C_p、C_{pk}，仍是很值得讨论.首先，计算过程能力指数的前提条件是：① 质量特征值服从正态分布，② 质量特征值相互独立，③ 过程处于稳定受控状态，即过程质量特征值只受随机性变异的影响.其次，在实际应用中，由于 USL 和 LSL 已知，所要估计的参数就是总体均值和标准差，总体均值一般采用样本均值无偏估计，无所争议.但是估计标准差的方法很多，就其估计的准确性、合理性来讲，也是非常值得研究的.最后，所估计的 C_p、C_{pk} 均为点估计，不知道在一定条件下多次使用时其一致性程度如何，如果能够给出置信区间则更为可靠.

多变异分析(Multi-Vari Analysis, MVA)是用来分析工序过程质量特征值变异规律的一种重要方法[5]，它的作用就是通过方差分析，找到主要的随机性变异来源，以此指导如何进行合理地抽样，保证样本能捕获主要的随机性变异，然后计算出科学正确的方差.关于质量管理方面的MVA，国外的研究主要涉及到方差分量的计算以及各自分量的置信区间的计算.如Burdick和Graybill运用方差分析估计试验模型中的方差分量[6]，Borror等运用Satterthwaite方法[7]、有约束的极大似然方法以及MSL方法探讨了基于测量系统分析的重复性和再现性方差分量的置信区间[8~10].Adamec等研究了三个随机因素的测量系统分析中方差分量置信区间的求法[11].但是，这些研究多局限于交叉型的方差分析模型和测量系统之中，而对嵌套型模型和基于MVA的方差分量置信区间方面的研究涉及很少.国内的MVA研究，如何桢等[12]利用多变异分析的统计模型，以印刷电路板生产过程中对锡浆厚度的控制为例，提出了基于多变异分析的工序控制方法；孔祥芬等[13]结合7种典型生产情况对比了经过MVA计算的过程能力指数与没有MVA计算的过程能力指数，对过程不合格品率也做出了准确的计算，分析了在过程能力指数尚可的情况下，相应的不合格品却高出很多

① 收稿日期：2006－01－10；修订日期：2007－04－05.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70372062)；新世纪优秀人才资助计划(NCET－04－0240).
作者简介：何 桢(1967—)，男，河南人，博士，教授，Email:zhhe@public.tpt.tj.cn.

的真正原因，阐明了在进行计算过程能力指数之前，进行多变异分析的重要性．张黎[14]给出了多变异目标均值控制图的建立步骤，实现了小批量过程多变异的控制．何桢[15]介绍了求方差分量近似置信区间方法，只给出了产品内变异和产品间变异的近似置信区间，而对时间变异分量的置信区间并没有明确提及．以上国内外的研究并没有清楚而明确涉及MVA下的 C_p 的置信区间．所以本文的研究首先简要介绍一下MVA方法，给出MVA的线性统计模型．重点放在根据MVA后的方差分量估计总体方差的置信区间，以 C_p 为例，给出基于MVA方法的过程能力指数的置信区间．最后，结合一个案例进行应用说明．

1　MVA分析方法

多变异分析（MVA）将工序质量特征值的变异分为三类：产品内变异（Within Piece Variation 或成为 Positional Variation）、产品间变异（Piece to Piece Variation）和时间变异（Time to Time Variation）．若时间点和每个时间点样本的形成皆随机，则多变异分析问题可以看成一种随机效应的嵌套性试验．

假设选取了 a 个时间点，在每个时间点上连续抽取 b 个产品，每个产品上选 n 个不同的测量点，则 X_{ijk} 表示第 i 个时间点、第 j 个产品在第 k 个位置上的测量值[16]．多变异分析的线性统计模型为

$$X_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{(i)j} + \varepsilon_{(ij)k} \quad \begin{cases} i = 1,2,\cdots,a \\ j = 1,2,\cdots,b \\ k = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{1}$$

其中，τ_i 表示时间变异效应，$\tau_i \sim N(0,\sigma_\tau^2)$；$\beta_{(i)j}$ 表示产品间变异效应，$\beta_{(i)j} \sim N(0,\sigma_\beta^2)$；$\varepsilon_{(ij)k}$ 表示产品内变异效应（在模型中表示纯误差项），$\varepsilon_{(ij)k} \sim N(0,\sigma_e^2)$．假定各变异效应相互独立，且不存在交互影响．显然，总方差为

$$\sigma_{\text{Total}}^2 = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2 \tag{2}$$

令 $\bar{x}_{\cdots} = \dfrac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}}{abn}$，$\bar{x}_{i..} = \dfrac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}}{bn}$，$\bar{x}_{ij.} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}}{n}$，显然，离差平方和为

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x}_{\cdots})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}[(\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{\cdots}) + (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..}) + (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})]^2 \tag{3}$$

对式(2)右边进行展开推导，由于三个交互项等于零，则

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x}_{\cdots}) = bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{\cdots})^2 + n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2 \tag{4}$$

这说明，离差平方和等于时间效应方差、产品间效应方差与产品内方差的总和．式(4)可以象征性表示为

$$SS_{\text{Total}} = SS_{\text{Time}} + SS_{\text{Between}} + SS_{\text{Within}} \tag{5}$$

其中，SS_{Total} 的自由度为 $abn-1$，SS_{Time} 的自由度为 $a-1$，SS_{Between} 的自由度为 $a(b-1)$，SS_{Within} 的自由度为 $ab(n-1)$．式(5)右边的每一项除以它的自由度，结果就是每一项的均方差，两个均方差之比服从F分布．将其整理成表1更加清晰明朗．

表1　多变异方差分析表

Table 1 MVA variance analysis

变异源	离差平方和	自由度	均方差	方差分量	占总方差的百分比，%
时间	SS_{Time}	$a-1$	$MS_{\text{Time}} = \dfrac{SS_{\text{Time}}}{a-1}$	$\hat{\sigma}_\tau^2 = \max\left\{\dfrac{MS_{\text{Time}} - MS_{\text{Between}}}{bn}, 0\right\}$	$\dfrac{\hat{\sigma}_\tau^2}{\hat{\sigma}_{\text{TOTAL}}^2} \times 100\%$
产品间	SS_{Between}	$a(b-1)$	$MS_{\text{Between}} = \dfrac{SS_{\text{Between}}}{a(b-1)}$	$\hat{\sigma}_\beta^2 = \max\left\{\dfrac{MS_{\text{Between}} - MS_{\text{Within}}}{n}, 0\right\}$	$\dfrac{\hat{\sigma}_\beta^2}{\hat{\sigma}_{\text{TOTAL}}^2} \times 100\%$
产品内	SS_{Within}	$ab(n-1)$	$MS_{\text{Within}} = \dfrac{SS_{\text{Within}}}{ab(n-1)}$	$\hat{\sigma}_e^2 = MS_{\text{Within}}$	$\dfrac{\hat{\sigma}_e^2}{\hat{\sigma}_{\text{TOTAL}}^2} \times 100\%$
合计	SS_{Totall}	$abn-1$		$\hat{\sigma}_{\text{TOTAL}}^2 = \hat{\sigma}_\tau^2 + \hat{\sigma}_\beta^2 + \hat{\sigma}_e^2$	

2 C_p 的置信区间

用 MVA 方法计算的 $\hat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}}$ 估计标准差，则 $\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}}}$，$\hat{\sigma}_{\mathrm{TOTAL}} = \sqrt{\hat{\sigma}_e^2 + \hat{\sigma}_\beta^2 + \hat{\sigma}_\tau^2}$. 下面首先分别推导 σ_e^2、σ_β^2 和 σ_τ^2 的置信区间(其推导过程见附录 A)，然后推导 $\sigma_{\mathrm{TOTAL}}^2 = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2$ 的置信区间，最后推导 C_p 的置信区间.

σ_e^2 在置信水平为 $1-\alpha$ 的情况下，其置信区间为 $\left[\frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}, \frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}\right]$，即 $\frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}} \leqslant \sigma_e^2 \leqslant \frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}$.

σ_β^2 在置信水平为 $1-\alpha$ 的情况下，其置信区间为

$$\left[\frac{MS_{\mathrm{Between}} - MS_{\mathrm{Within}} - \sqrt{V_{\beta L}}}{n}, \frac{MS_{\mathrm{Between}} - MS_{\mathrm{Within}} + \sqrt{V_{\beta U}}}{n}\right]$$

即

$$\frac{MS_{\mathrm{Between}} - MS_{\mathrm{Within}} - \sqrt{V_{\beta L}}}{n} \leqslant \sigma_\beta^2 \leqslant \frac{MS_{\mathrm{Between}} - MS_{\mathrm{Within}} + \sqrt{V_{\beta U}}}{n}.$$

其中，$V_{\beta L}$ 和 $V_{\beta U}$ 表示含义见附录 A.

σ_τ^2 在置信水平为 $1-\alpha$ 的情况下，其置信区间为

$$\left[\frac{MS_{\mathrm{Time}} - MS_{\mathrm{Between}} - \sqrt{V_{\tau L}}}{bn}, \frac{MS_{\mathrm{Time}} - MS_{\mathrm{Between}} + \sqrt{V_{\tau U}}}{bn}\right],$$

即

$$\frac{MS_{\mathrm{Time}} - MS_{\mathrm{Between}} - \sqrt{V_{\tau L}}}{bn} \leqslant \sigma_\tau^2 \leqslant \frac{MS_{\mathrm{Time}} - MS_{\mathrm{Between}} + \sqrt{V_{\tau U}}}{bn}$$

其中，$V_{\tau L}$ 和 $V_{\tau U}$ 表示含义见附录 A.

由于 $\sigma_\beta^2 = \frac{MS_{\mathrm{Between}} - MS_{\mathrm{Within}}}{n}$ 和 $\sigma_\tau^2 = \frac{MS_{\mathrm{Time}} - MS_{\mathrm{Between}}}{bn}$，可以看出，$\sigma_\beta^2$ 和 σ_τ^2 在推导过程中有可能出现负值. 这是因为在实际应用中，MS_{Between} 有可能小于 MS_{Within}，或者 MS_{Time} 有可能小于 MS_{Between}. 而 $\sigma_e^2 = MS_{\mathrm{Within}}$，所以 σ_e^2 永远大于等于零. 根据方差定义要求 $\sigma_\beta^2 \geqslant 0$，$\sigma_\tau^2 \geqslant 0$，所以可以对 $\sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2$ 的置信区间分为 4 种情况加以讨论.

① $\frac{MS_{\mathrm{Between}} - MS_{\mathrm{Within}} - \sqrt{V_{\beta L}}}{n} < 0$，$\frac{MS_{\mathrm{Time}} - MS_{\mathrm{Between}} - \sqrt{V_{\tau L}}}{bn} < 0$，此种情况只有一种变异源存在，就是产品内变异，那么，$\sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2$ 的置信下限为 $0 + 0 + \frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}} = \frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}$，$C_p$ 的置信上限为 $\frac{USL - LSL}{6\sqrt{\frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}}}$；

② $\frac{MS_{\mathrm{Between}} - MS_{\mathrm{Within}} - \sqrt{V_{\beta L}}}{n} < 0$，$\frac{MS_{\mathrm{Time}} - MS_{\mathrm{Between}} - \sqrt{V_{\tau L}}}{bn} > 0$，此种情况存在两种变异源，就是时间变异和产品内变异，那么，$\sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2$ 的置信下限为，

$$\frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}} + 0 + \frac{MS_{\mathrm{Time}} - MS_{\mathrm{Between}} - \sqrt{V_{\tau L}}}{bn} = \frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}} + \frac{MS_{\mathrm{Time}} - MS_{\mathrm{Between}} - \sqrt{V_{\tau L}}}{bn},$$

C_p 的置信上限为

$$\frac{USL - LSL}{6\sqrt{\frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}} + \frac{MS_{\mathrm{Time}} - MS_{\mathrm{Between}} - \sqrt{V_{\tau L}}}{bn}}};$$

③ $\frac{MS_{\mathrm{Between}} - MS_{\mathrm{Within}} - \sqrt{V_{\beta L}}}{n} > 0$，$\frac{MS_{\mathrm{Time}} - MS_{\mathrm{Between}} - \sqrt{V_{\tau L}}}{bn} < 0$，此种情况存在两种变异源，就是产品内变异和产品间变异，那么，$\sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2$ 的置信下限为，

$$0 + \frac{MS_{\mathrm{Between}} - MS_{\mathrm{Within}} - \sqrt{V_{\beta L}}}{n} + \frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}} = \frac{MS_{\mathrm{Between}} - MS_{\mathrm{within}} - \sqrt{V_{\beta L}}}{n} + \frac{MS_{\mathrm{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}},$$

C_p 的置信上限为

$$\frac{USL-LSL}{6\sqrt{\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}}}{n}+\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}}};$$

④ $\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}}}{n}>0$，$\frac{MS_{\text{Time}}-MS_{\text{Between}}-\sqrt{V_{\tau L}}}{bn}>0$，此种情况存在三种变异源，就是时间变异和产品间变异以及产品内变异，那么，$\sigma_\tau^2+\sigma_\beta^2+\sigma_e^2$ 的置信下限为，

$$\frac{MS_{\text{Time}}-MS_{\text{Between}}-\sqrt{V_{\tau L}}}{bn}+\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}}}{n}+\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}$$

C_p 的置信上限为

$$\frac{USL-LSL}{6\sqrt{\frac{MS_{\text{Time}}-MS_{\text{Between}}-\sqrt{V_{\tau L}}}{bn}+\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}}}{n}+\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}}}.$$

不管是以上哪种情况，$\sigma_\tau^2+\sigma_\beta^2+\sigma_e^2$ 的置信上限都为

$$\frac{MS_{\text{Time}}-MS_{\text{Between}}+\sqrt{V_{\tau U}}}{bn}+\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}+\sqrt{V_{\beta U}}}{n}+\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}.$$

C_p 的置信下限为

$$\frac{USL-LSL}{6\sqrt{\frac{MS_{\text{Time}}-MS_{\text{Between}}+\sqrt{V_{\tau U}}}{bn}+\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}+\sqrt{V_{\beta U}}}{n}+\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}}}.$$

因此 $\sigma_\tau^2+\sigma_\beta^2+\sigma_e^2$ 的置信区间最长的情况就是只存在一种变异源，即

$$\left\{\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}},\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}+\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}+\sqrt{V_{\beta U}}}{n}+\frac{MS_{\text{Time}}-MS_{\text{Between}}+\sqrt{V_{\tau U}}}{bn}\right\};$$

$\sigma_\tau^2+\sigma_\beta^2+\sigma_e^2$ 的置信区间最短的情况就是三种变异源同时存在，即

$$\left\{\frac{MS_{\text{Withine}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}+\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}}}{n}+\frac{MS_{\text{Time}}-MS_{\text{Between}}-\sqrt{V_{\tau L}}}{bn},\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}+\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}+\sqrt{V_{\beta U}}}{n}+\frac{MS_{\text{Time}}-MS_{\text{Between}}+\sqrt{V_{\tau U}}}{bn}\right\}.$$

相应地，C_p 的置信区间最长的情况就是只存在一种变异源，即

$$\left\{\frac{USL-LSL}{6\sqrt{\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}+\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}+\sqrt{V_{\beta U}}}{n}+\frac{MS_{\text{Time}}-MS_{\text{Between}}+\sqrt{V_{\tau U}}}{bn}}},\frac{USL-LSL}{6\sqrt{\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}}}\right\}$$

C_p 的置信区间最短的情况就是三种变异源同时存在，即

$$\left\{\frac{USL-LSL}{6\sqrt{\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}+\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}+\sqrt{V_{\beta U}}}{n}+\frac{MS_{\text{Time}}-MS_{\text{Between}}+\sqrt{V_{\tau U}}}{bn}}},\right.$$

$$\left.\frac{USL-LSL}{6\sqrt{\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}+\frac{MS_{\text{Between}}-MS_{\text{Within}}-\sqrt{V_{\beta L}}}{n}+\frac{MS_{\text{Time}}-MS_{\text{Between}}-\sqrt{V_{\tau L}}}{bn}}}\right\}$$

3 案例应用

某电子产品制造企业前线采用表面封装技术(SMT)生产其所需的电路板,电路板锡浆厚度的工艺规格要求为5.5 ~ 8.5 mil(测量单位,1 mil = 千分之一英寸).在工序过程稳定后,选择4个时间点,每个时间点连续抽取3块PCB板,在每块PCB板上任选了5个点(四个角点与中央点)测量,工程师采用三维激光测厚仪进行测量,其测量结果见表2.

表2 试验数据 (mil)

Table 2 Experiments data (mil)

产品间 \ 时间 / 产品内	8:00AM			10:00AM			12:00AM			14:00AM		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	6.4	6.8	6.3	6.1	6.4	6.6	6.3	6.4	6.3	6.7	6.6	6.8
2	7.0	6.4	7.1	6.8	6.9	6.0	6.9	5.6	6.7	5.9	7.0	6.2
3	6.4	6.4	6.5	5.9	6.8	6.1	6.6	6.2	6.6	5.8	6.5	6.5
4	6.4	6.3	6.4	5.8	6.5	6.2	6.2	6.0	6.4	6.3	6.4	6.2
5	7.1	6.5	7.0	6.0	6.9	5.9	6.8	5.8	6.3	6.2	7.1	5.8

表3 试验数据的方差分析表

Table 3 Variance analysis of experiments data

变异源	离差平方和	自由度	均方差	方差分量	占总方差的百分比,%	标准差
时间	0.718 0	3	0.239 3	0.00	0.00	0.00 0
产品间	2.853 3	8	0.356 7	0.052	34.63	0.228
产品内	4.692 0	48	0.097 8	0.098	65.37	0.313
合计	8.263 3	59		0.150		0.387

MVA 分析结果如表3所示,由于

$$\frac{MS_{\text{Between}} - MS_{\text{Within}} - \sqrt{V_{\beta L}}}{n} = \frac{0.356\,7 - 0.097\,8 - 0.203\,0}{5} = 0.011\,2 > 0$$

$$\frac{MS_{\text{Time}} - MS_{\text{Between}} - \sqrt{V_{\tau L}}}{bn} = \frac{0.239\,3 - 0.356\,7 - 0.956\,6}{3 \times 5} = -0.071\,6 < 0$$

属于本文研究中的第3部分的第③种情况,存在产品内变异和产品间变异.假设置信水平为95%,根据本文推导的公式可以得出 $\sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_e^2$ 的置信区间为 [0.079,0.444], $\hat{\sigma}_{\text{TOTAL}} = \sqrt{\hat{\sigma}_e^2 + \hat{\sigma}_\beta^2 + \hat{\sigma}_\tau^2}$ 的置信区间为[0.281, 0.667], C_p 的置信区间为[0.750, 1.777],

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}_{\text{TOTAL}}} = \frac{8.5 - 5.5}{6 \times 0.387} = 1.292$$

没有经过 MVA 的, $\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6s} = \frac{8.5 - 5.5}{6 \times 0.374} = 1.336$, C_p 的置信区间为

$$\left[\hat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}{n-1}}, \hat{C}_p\sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}{n-1}}\right] = [1.336 \times 0.820,\ 1.336 \times 1.180] = [1.095,\ 1.576].$$

4 结 论

MVA 分析通过方差分析对质量特征值的变异来源进行了充分分析和估计,可以科学合理的计算过程能力指数,为工序控制指明了方向.同时,适当的置信区间提供了置信的依据.需要注意的是,经过 MVA 分析的 C_p 的置信区间的长度与抽样方案密切相关,也就是抽样时间 a,每个时间点抽样的个数 b,每个产品测量的位置 n 的确定直接影响着 C_p 的置信区间.具体来说,样本含量越大,经过 MVA 分析的 C_p 的置信区间的长度应该越准确.也就是说,抽样时间越多,每个时间点抽样的产品数量越多,每个产品测量的位置越多,经过 MVA 分析的 C_p 的置信区间的长度应该越准确.但是,通常

情况下，抽样越多，成本越高．所以生产企业要根据 时间情况进行抽样以及评估过程能力．

参考文献：

[1]Kotz S, Lovelace C. Process Capability Indices in Theory and Practice[M]. Arnold: London, 1998.

[2]Chou Y. Selecting a better supplier by testing process capability indices[J]. Quality Engineering, 1994, 6(3): 427—438.

[3]Juarn J M, Gryna F M, Bingham RS Jr. Quality Control Handbook[M]. New York: McGraw-Hill, 1974.

[4]Kane V E. Process capability indices[J]. Journal of Quality Technology, 1986, 18(1): 41—52.

[5]何 桢，李国春，石春桥．工序质量分析与控制种的多变异分析方法[J]．系统工程理论与实践，2000，20(5)：42—46.
He Zhen, Li Guo-chun, Shi Jin-qiao. Multi-vari analysis in process quality analysis and control[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2000, 20(5): 42—46. (in Chinese)

[6]Burdick R K, Graybill F A. Confidence Intervals on Variance Components[M]. New York: Marcel Dekker, 1992.

[7]Satterthwaite. An approximate distribution of estimates of variance components[J]. Biometric Bull, 1946, (2): 110—114.

[8]Montgomery D C, Runger G C. Gauge capability and designed experiments[J]. Basic Methods, Quality Engineering, 1993, (6): 115—135.

[9]Montgomery D C, Runger G C. Gauge capability and designed experiments[J]. Experiments Design Models and Variance Component Estimation, Quality Engineering, 1993, (6): 289—305.

[10]Borror C M, Montgomery D C, Runger G C. Confidence intervals for variance components from gauge capability studies[J]. Quality and Reliability Engineering International, 1997, (13): 361—369.

[11]Eric Adamec, Burdick R K. Confidence intervals on ratios of linear combinations of non-disjoint sets of expected mean squares[J]. Stat. Planning Inference, 1995, 48: 215—227.

[12]何 桢，刘 豹，齐二石．基于多变异分析的工序控制方法研究[J]．管理工程学报，2002，16(2)：1—4.
He Zhen, Liu Bao, Qi, Er-shi. A study on process control based on multi-vari analysis[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2002, 16(2): 1—4. (in Chinese)

[13]孔祥芬，何 桢，宗志宇．基于多变异分析方法检验常用的过程能力指数[J]．组合机床与自动化加工技术，2006，4：15—17.
Kong Xiangfen, He Zhen, Zong Zhiyu. Testing process capability using the general indices based multi-vari analysis[J]. Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique, 2006, 4: 15—17. (in Chinese)

[14]张 黎．小批量过程多变异控制图技术研究[J]．现代制造工程，2005，5：1—4.
Zhang Li. The study on multi-vari control chart in producing process of small batch[J]. Modern Manufacturing Engineering, 2005, 5: 1—4. (in Chinese)

[15]何 桢，刘小亮．多变异分析的方差分量置信区间[J]．天津大学学报(社会科学版)，2006，8(6)：401—404.
He Zhen; Liu Xiao-liang. Confidence intervals for variance components based on multi-vari analysis[J]. Journal of Tianjin University(Social Sciences), 2006, 8(6): 401—404. (in Chinese)

[16]Montgomery D C. Design and Analysis of Experiments[M]. 5th edition. New York: John Wiley and Sons, 2001.

Confidence interval study on process capability indices based on MVA

HE Zhen[1], *KONG Xiang-fen*[1,2], *ZONG Zhi-yu*[1], *DONG Yan-feng*[1]

1.Department of Industrial Engineering, Management School of Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2.Aeronatical Mechanics & Avionics Engineering College, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China

Abstract: Traditional process capability analysis takes assumption that there is only a variation source in production/process quality characteristics. This paper presents a method for estimating process capability indices, which roots in nested mode of experiment design, and uses variance components to estimate total variance as well as each variance component. In addition, the confidence interval of Cp is derived based on MVA. A case is studied, and it is shown that MVA is good at analyzing the process variation patterns, so the method can remark the process scientifically and rationally.

Key words: multi-vari analysis; confidence interval; analysis of variance; process capability indices

附录 A

由于$\frac{n_3 MS_{\text{Within}}}{\sigma_e^2} \sim \chi^2(n_3)$,所以$\sigma_e^2$在置信水平为$1-\alpha$的情况下,其置信区间为$\left[\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}}, \frac{MS_{\text{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}\right]$,即

$$\frac{MS_{\text{Within}}}{F_{\alpha/2:n_3,\infty}} \leqslant \sigma_e^2 \leqslant \frac{MS_{\text{Within}}}{F_{1-\alpha/2:n_3,\infty}}.$$

由于$\frac{n_2 MS_{\text{Within}}}{\sigma_e^2 + n\sigma_\beta^2} \sim \chi^2(n_2)$,所以$\sigma_\beta^2$在置信水平为$1-\alpha$的情况下,其置信区间为

$$\left[\frac{MS_{\text{Between}} - MS_{\text{Within}} - \sqrt{V_{\beta L}}}{n}, \frac{MS_{\text{Between}} - MS_{\text{Within}} + \sqrt{V_{\beta U}}}{n}\right]$$

即

$$\frac{MS_{\text{Between}} - MS_{\text{Within}} - \sqrt{V_{\beta L}}}{n} \leqslant \sigma_\beta^2 \leqslant \frac{MS_{\text{Between}} - MS_{\text{Within}} + \sqrt{V_{\beta U}}}{n}.$$

其中:

$$V_{\beta L} = G_2^2 MS_{\text{Between}}^2 + H_3^2 MS_{\text{Within}}^2 + G_{23} MS_{\text{Between}} MS_{\text{Within}}$$

$$V_{\beta U} = H_2^2 MS_{\text{Between}}^2 + G_3^2 MS_{\text{Within}}^2 + H_{23} MS_{\text{Between}} MS_{\text{Within}}$$

$$G_l = 1 - \frac{1}{F_{\alpha/2:n_l,\infty}} \quad (l = 2,3)$$

$$H_l = \frac{1}{F_{1-\alpha/2:n_l,\infty}} - 1 \quad (l = 2,3)$$

$$G_{23} = \frac{(F_{\alpha/2:n_2,n_3} - 1)^2 - G_2^2 F_{\alpha/2:n_2,n_3}^2 - H_3^2}{F_{\alpha/2:n_2,n_3}}$$

$$H_{23} = \frac{(1 - F_{1-\alpha/2:n_2,n_3})^2 - H_2^2 F_{1-\alpha/2:n_2,n_3}^2 - G_3^2}{F_{1-\alpha/2:n_2,n_3}}$$

由于$\frac{n_1 MS_{\text{Time}}}{\sigma_e^2 + n\sigma_\beta^2 + bn\sigma_\tau^2} \sim \chi^2(n_1)$,所以$\sigma_\tau^2$在置信水平为$1-\alpha$的情况下,其置信区间为,

$$\left[\frac{MS_{\text{Time}} - MS_{\text{Between}} - \sqrt{V_{\tau L}}}{bn}, \frac{MS_{\text{Time}} - MS_{\text{Between}} + \sqrt{V_{\tau U}}}{bn}\right]$$

即

$$\frac{MS_{\text{Time}} - MS_{\text{Between}} - \sqrt{V_{\tau L}}}{bn} \leqslant \sigma_\tau^2 \leqslant \frac{MS_{\text{Time}} - MS_{\text{Between}} + \sqrt{V_{\tau U}}}{bn}$$

其中:

$$V_{\tau L} = G_1^2 MS_{\text{Time}}^2 + H_2^2 MS_{\text{Between}}^2 + G_{12} MS_{\text{Time}} MS_{\text{Between}}$$

$$V_{\tau U} = H_1^2 MS_{\text{Time}}^2 + G_2^2 MS_{\text{Between}}^2 + H_{12} MS_{\text{Time}} MS_{\text{Between}}$$

$$G_l = 1 - \frac{1}{F_{\alpha/2:n_l,\infty}} \quad (l = 1,2)$$

$$H_l = \frac{1}{F_{1-\alpha/2:n_l,\infty}} - 1 \quad (l = 1,2)$$

$$G_{12} = \frac{(F_{\alpha/2:n_1,n_2} - 1)^2 - G_1^2 F_{\alpha/2:n_1,n_2}^2 - H_2^2}{F_{\alpha/2:n_2,n_3}}$$

$$H_{12} = \frac{(1 - F_{1-\alpha/2:n_1,n_2})^2 - H_1^2 F_{1-\alpha/2:n_1,n_2}^2 - G_2^2}{F_{1-\alpha/2:n_1,n_2}}$$