参数不确定性下资产配置的动态均值—方差模型①

李仲飞, 袁子甲
(中山大学岭南(大学)学院, 广州 510275)

摘要: 现有关于资产配置的动态均值—方差模型的研究均假设投资者准确知道与资产收益率相关的参数, 从而忽略了参数不确定性对投资决策的影响. 本文研究引入参数不确定性和贝叶斯学习时的动态均值—方差模型, 使用鞅方法求解得出最优投资策略的解析表达式, 并导出了均值—方差有效边界. 在此基础上, 利用中国证券市场的实际数据进行了实证分析, 结果表明参数不确定性对最优投资策略以及投资效果有较大的影响.

关键词: 参数不确定性; 均值—方差模型; 动态投资组合选择; 贝叶斯学习; 有效边界
中图分类号: F830.9　　文献标识码: A　　文章编号: 1007－9807(2010)12－0001－09

0 引 言

Markowitz[1]提出了资产配置的均值—方差模型. 这项影响深远的研究一直被视为现代投资组合理论的开端和基石. 然而直到近年来, 均值—方差分析框架在动态情形下的研究才有所突破和发展. Li和 Ng[2]使用动态规划方法求解了离散时间多期均值—方差投资组合选择问题, Bajeux-Besnainou和 Portait[3], Zhou和 Li[4]则分别使用鞅方法和随机 LQ控制方法求解了连续时间情形下的动态均值—方差模型, 并且都得到了最优投资策略的解析表达式. 在此基础上, 很多研究通过引入金融市场中的一些现实因素对动态均值—方差模型进行推广, 例如, Li等[5]考虑了存在卖空限制时的动态均值—方差模型, Bielecki等[6]引入了破产限制, 而 Xie等[7]则求解了连续时间情形下存在负债时的均值—方差投资组合选择问题.

然而, 以上研究都假设投资者准确地知道与金融资产相关的各种参数 (例如资产收益率的期望和方差), 但这一假设在现实情形中难以满足. 投资者在进行投资决策时往往并不知道参数的真实取值, 而根据其可观测到的信息对参数进行估计, 与此同时产生的估计偏差会给投资组合选择带来估计风险 (estimation risk, 参见 Bawa et al.[8]), 忽视估计风险会导致投资决策处于非最优状态. 如何将这种参数不确定性 (parameter uncertainty)或估计风险引入到投资组合选择的决策模型中, 并分析其对最优投资策略产生的影响已成为近年学界的焦点. 本文的研究内容正是尝试将这一重要的现实因素引入到动态均值—方差模型当中.

国外已有的连续时间情形下考虑参数不确定性的投资组合研究包括: Gennotte[9]、Dothan和 Feldman[10]、Detemple[11]、Brennan[12]、Xia[13]和 Lakner[14]. 国内学者对于这一领域的研究也较为关注, 杨朝军和陈浩武[15]使用中国股票市场中的实际数据对参数不确定性下的静态资产配置问题进行了实证研究, 孟卫东和何朝林[16]研究了收益率的前两阶矩均存在参数不确定性时的最优动态投资组合选择问题, 郭文旌和雷鸣[17]则求解了一个股票价格过程带跳并且投资者只具有部分信息时的连续时间最优投资消费问题. 但是以上这些研究均假设投资者具有 CRRA型效用函数, 并且

① 收稿日期: 2008－12－18; 修订日期: 2009－10－28
基金项目: 教育部人文社会科学基金研究规划基金资助项目(07JA630031); 国家杰出青年科学基金资助项目(70825002).
作者简介: 李仲飞(1963－), 男, 内蒙古鄂尔多斯人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: lnslzf@mail.sysu.edu.cn

遵循期望效用最大化分析框架,而非实践中得到广泛应用的均值—方差模型.已有文献中与本文的模型设置最为接近的是 Xiong和 Zhou[18],但这项研究只给出了最优投资策略的数值解法.本文使用鞅方法[19-20]来求解连续时间情形下考虑参数不确定性时的均值—方差投资组合选择问题,并给出最优投资策略和均值—方差有效边界的解析表达式.在此基础上,我们利用中国证券市场中的实际数据分析了参数不确定性对最优投资策略产生的影响及其原因.最后,以夏普比例作为衡量投资效果的指标,通过比较发现在大多数情形下考虑参数不确定性时的投资效果优于忽视参数不确定性时的投资效果,从而进一步说明了参数不确定性在投资实践中的重要性.

1 市场设置

假设市场中存在两种可以在计划期 $[0, T]$ 内连续交易的金融资产.第一种资产为无风险的债券,它的价格过程 $S_0(t)$ 服从如下常微分方程

$$dS_0(t) = S_0(t)r dt \quad t \in [0, T] \tag{1}$$

其中常数 r 为无风险资产的利率.另一种资产为风险资产股票,其价格过程 $S(t)$ 满足如下随机微分方程

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dB(t)), \quad t \in [0, T] \tag{2}$$

其中参数 μ 和 σ 均为常数, $B(t)$ 是一个标准布朗运动.

假设投资者可以从市场中观测到风险资产的价格 $S(t)$,并且准确地知道到参数 r 和 σ 的取值,但无法观测到瞬时期望漂移率 μ 的具体取值,从而也无法观测到布朗运动 $B(t)$②.所以投资者可观测到的信息集是由股票价格过程生成的域流

$$F^S =: \{F_t^S = \sigma(S(s), 0 \leqslant s \leqslant t)\}$$

该信息集小于包含市场中全部信息的信息集 $F =: \{F_t = \sigma(B(s), S(s), 0 \leqslant s \leqslant t)\}$.本文即是研究这种参数不确定情形下的投资组合选择问题,也称为部分信息下(partial information)的最优投资决策问题.

此外在投资者的决策过程中引入贝叶斯学习(Bayesian learning).假设投资者在期初具有如下信念(belief): μ 的先验分布为一个期望为 m_0、方差为 v_0 的正态分布.随着时间的推移和数据的增加投资者使用基于贝叶斯准则的卡尔曼滤波理论不断地更新其对 μ 的期望和方差的估计,进而将新增加的信息引入到投资决策当中.定义 μ 关于 F_t^S 的条件期望为

$$m(t) = E[\mu \mid F_t^S]$$

$m(t)$ 可以理解为投资者在时刻 t 根据其可观测到的信息对 μ 的期望的最优估计. $\theta = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$ 是风险的市场价格(夏普比例),由于其表达式中含有参数 μ,因此 θ 也是不可观测的.同样可以定义对 θ 期望的最优估计为如下条件期望

$$\theta(t) = E[\theta \mid F_t^S]$$

根据经典 Kalman-Bucy滤波理论(参见 Liptser和 Shiryayev[22]),可以得到 $\theta(t)$ 满足如下随机微分方程

$$d\theta(t) = \gamma(t)(dB(t) - \theta(t)dt),$$
$$\theta(0) = \theta_0 = \frac{m_0 - r}{\sigma} \tag{3}$$

其中 $\hat{B}(t) = B(t) + \theta t$, $\gamma(t) = E[(\theta - \theta(t))^2 \mid F_t^S]$ 是 θ 的条件方差,并且 $\gamma(t)$ 服从如下 Riccati方程

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -\gamma^2(t), \gamma(0) = \gamma_0 = \frac{v_0}{\sigma^2} \tag{4}$$

需要注意的是由于 $\dfrac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t) = r dt + \sigma d\hat{B}(t)$,并且 r 已知,所以随机过程 $\hat{B}$ 与股票价格过程 S 一样,对于投资者来说是可以观测到的随机过程.求解上述微分方程(3)和(4)可以得到 $\theta(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的显式表达式如下

$$\theta(t) = \frac{\theta_0 + \gamma_0 \hat{B}(t)}{\gamma_0 t + 1}, \gamma(t) = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 t + 1} \tag{5}$$

根据 Lakner[14] 中的定理 3.1还可以得出,参数不确定情形下投资者主观的状态价格密度

② 现有研究普遍认为统计方法可以较为准确地预测资产收益率的方差,而对收益率期望的预测效果较差(参见 Merton[21]).此外,如果投资者可以观测到 $B(t)$,则可以反推出瞬时期望收益率 μ.

$\zeta(t)$可以表示为

$$\zeta(t)=\exp\left\{-rt-\int_0^t\theta(u)\,dB(u)+\frac{1}{2}\int_0^t\theta(u)^2\,du\right\},\ \zeta(0)=1 \tag{6}$$

利用 Itô公式以及 $\theta(t)$和 $\gamma(t)$的表达式可以导出 $\zeta(t)$的显式表达式

$$\zeta(t)=\exp\left\{-rt-\frac{1}{2}\frac{\gamma_0 t+1}{\gamma_0}\theta(t)^2+\frac{1}{2}\ln(\gamma_0 t+1)+\frac{1}{2}\frac{(m_0-r)^2}{\gamma_0}\right\} \tag{7}$$

从式（6）可以看出，$\zeta(t)$的表达式的结构与完全信息情形下（μ已知）的状态价格密度过程是极为相似的. 状态价格密度显示表达式的导出为后文中最优投资策略的求解带来了方便.

2　均值 —方差模型及其求解 ——鞅方法

均值 —方差模型下投资者偏向于选择终端财富期望较高和方差较低的投资策略，最优投资策略应在这两个目标中达到平衡. 记 $\pi(t)$表示时刻 t投资于风险资产股票的财富份额，那么在自融资投资策略下投资者的财富过程 $W(t)$满足如下随机微分方程[23-24]

$$\begin{cases} dW(t)=W(t)\{[\pi(t)(\mu-r)+r]\,dt+\\ \qquad \pi(t)\sigma\,dB(t)\} \\ W(0)=W_0\geqslant 0 \end{cases} \tag{8}$$

其中 W_0为初始时刻财富. 上节中的式（7）给出了投资者主观状态价格密度的表达式，根据 Lakner[14]，$\zeta(t)W(t)$在域流 F^S下是一个鞅，也就是有下述等式成立

$$E[\zeta(T)W(T)\mid F_t^S]=\zeta(t)W(t)$$

参数不确定性下的动态均值 —方差投资组合选择问题可以表示为

$$(P)\begin{cases} \min\limits_{\pi} Var[W(T)\mid F_0^S] \\ s.t.\ \ E[W(T)\mid F_0^S]=z \\ \qquad dW(t)=W(t)\{[\pi(t)(\mu-r)+r]\\ \qquad\quad dt+\pi(t)\sigma\,dB(t)\} \\ \qquad W(0)=W_0 \end{cases}$$

这里参数 μ对于投资者来说是无法观测并需要不断进行估计的，F_0^S代表的是投资者在时刻 0可观测到的信息集. 投资者将选择终端财富的期望等于 z时的最小方差策略③. 对应于 z的不同取值，将得到不同的最优投资策略.

采用鞅方法[19-20]求解上述投资组合选择问题（P）. 鞅方法的主要思想是将原问题分解成两个子问题，第一个子问题是在所有可达到的终端财富中寻找最优的终端财富 $W^*(T)$，第二个子问题则是求解出可以复制出 $W^*(T)$的动态投资策略 π^*.

根据 Lakner[14]，上述动态投资组合选择问题（P）可以转化为如下静态投资组合选择问题

$$(P')\begin{cases} \min\limits_{W(T)} Var_0[W(T)] \\ s.t.\ \ E_0[W(T)]=z \\ \qquad E_0[\zeta(T)W(T)]=W_0 \end{cases} \tag{9}$$

求解问题（P'）可以得到最优可达终端财富. 假设该静态投资组合选择问题存在最优解 $W^*(T)$，那么需要找出投资策略 π^*满足如下方程

$$\begin{cases} dW(t)=W(t)\{[\pi(t)(\mu-r)+r]\,dt+\\ \qquad \pi(t)\sigma\,dB(t)\} \\ W(T)=W^*(T) \end{cases} \tag{10}$$

利用 Bielecki et al.[6]中定理 2.1的证明方法可以说明通过求解问题（9）和（10）得到的投资策略 π^*就是均值 —方差动态投资组合问题（P）的最优解. 下面将分别求解上述两个子问题.

2.1　静态投资组合问题（P'）的求解

定理 1　问题（P'）的最优解为

$$W^*(T)=\lambda_1+\lambda_2\zeta(T) \tag{11}$$

其中常数 λ_1和 λ_2为

$$\lambda_1=\frac{zE_0[\zeta(T)^2]-W_0E_0[\zeta(T)]}{Var_0[\zeta(T)]},$$

$$\lambda_2=-\frac{zE_0[\zeta(T)]-W_0}{Var_0[\zeta(T)]} \tag{12}$$

证明　事实上问题（P'）是一个静态投资组合问题. 利用标准拉格朗日方法可以得出，如果 $W^*(T)$最优化问题 P'，那么 $W^*(T)$也最优化如下问题

③　为了表达方便，后文中 $E_0[\cdot]$表示 $E[\cdot\mid F_0^S]$，$Var_0[\cdot]$表示 $Var[\cdot\mid F_0^S]$，而 $E_t[\cdot]$则表示 $E[\cdot\mid F_t^S]$.

$$\min_W E_0[W^2 - 2\lambda_1 W - 2\lambda_2\zeta(T)W]$$

通过一阶条件可以求得

$$W^*(T) = \lambda_1 + \lambda_2\zeta(T)$$

其中常数 λ_1 和 λ_2 需要满足如下等式

$$\begin{cases} E_0[\lambda_1 + \lambda_2\zeta(T)] = z \\ E_0[\zeta(T)(\lambda_1 + \lambda_2\zeta(T))] = W_0 \end{cases}$$

求解该方程组可以得到式(12)成立.

从式(12)中可以看出, 为了得到 $W^*(T)$ 的显示表达式, 还需要通过下述引理来给出 $E_0[\zeta(T)]$、$E_0[\zeta(T)^2]$ 和 $\mathrm{Var}_0[\zeta(T)]$ 的计算公式.

引理 1 对于任意常数 k, 有如下关于 $\zeta(T)^k$ 的条件期望的计算公式成立

$$E_t[\zeta(T)^k] = \frac{G(T)}{\sqrt{2cd+1}}\exp\left\{-\frac{c}{2cd+1}\theta(t)^2\right\} \tag{13}$$

其中 $G(T) = \exp\left\{k\left(-rT + \frac{1}{2}\ln(\gamma_0 T + 1) + \frac{1}{2}\frac{(m_0 - r)^2}{\gamma_0}\right)\right\}$,

$$c = -\frac{1}{2}k\frac{\gamma_0 T + 1}{\gamma_0},\quad d = \frac{\gamma_0^2(T-t)}{(\gamma_0 t + 1)(\gamma_0 T + 1)}.$$

证明 已知

$$\theta(t) = \frac{\theta_0 + \gamma_0 B_t}{\gamma_0 t + 1}$$

其中 B_t 在概率测度 (P, F^S) 下是一个布朗运动[14], 从而根据 Itô 公式有

$$\theta(T) \mid F_t^S \sim N\left(\theta(t), \frac{\gamma_0^2(T-t)}{(\gamma_0 t + 1)(\gamma_0 T + 1)}\right)$$

又根据式(7)有

$$\zeta(t) = \exp\left\{-rt - \frac{1}{2}\frac{\gamma_0 t + 1}{\gamma_0}\theta(t)^2 + \frac{1}{2}\ln(\gamma_0 t + 1) + \frac{1}{2}\frac{(m_0 - r)^2}{\gamma_0}\right\}$$

因此

$$E_t[\zeta(T)^k] = \frac{G(T)}{\sqrt{2\pi d}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-cx^2 - \frac{(x - \theta(t))^2}{2d}\right\}dx$$

$$= \frac{G(T)}{\sqrt{2\pi d}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\frac{d}{2cd+1}}\left(x - \frac{\theta(t)}{2cd+1}\right)^2 - \frac{c}{2cd+1}\theta(t)^2\right\}dx$$

$$= \frac{G(T)}{\sqrt{2cd+1}}\exp\left\{-\frac{c}{2cd+1}\theta(t)^2\right\}$$

其中 $G(T) = \exp\left\{k\left(-rT + \frac{1}{2}\ln(\gamma_0 T + 1) + \frac{1}{2}\times\frac{(m_0 - r)^2}{\gamma_0}\right)\right\}$, $c = -\frac{1}{2}k\frac{\gamma_0 T + 1}{\gamma_0}$, $d = \frac{\gamma_0^2(T-t)}{(\gamma_0 t + 1)(\gamma_0 T + 1)}$.

对式(13)取 $t = 0$, k 分别为 1 和 2 可以得到 $E_0[\zeta(T)]$ 和 $E_0[\zeta(T)^2]$ 的计算公式, 并且可以得到 $E_0[\zeta(T)] = e^{-rT}$, 这一结果也验证了 $\zeta(T)$ 就是投资者主观的状态价格密度. 此外, $\mathrm{Var}_0[\zeta(T)]$ 可以通过 $\mathrm{Var}_0[\zeta(T)] = E_0[\zeta(T)^2] - E_0[\zeta(T)]^2$ 来进行计算.

2.2 最优动态投资策略的求解

在上一小节中, 已经得到了最优终端财富的表达式. 根据鞅方法求解思路的第 2 步: 找出一个可以复制最优终端财富 $\lambda_1 + \lambda_2\zeta(T)$ 的可行投资策略, 该策略就是动态均值 – 方差模型下的最优投资策略 $\pi^*(t)$.

定理 2 动态均值 – 方差模型下的最优投资策略 $\pi^*(t)$ 为

(i) 当 $z \leqslant W_0/E_0[\zeta(T)]$ 时, $\pi^*(t) = 0$, 也即是将全部财富一直投资于无风险资产;

(ii) 当 $z > W_0/E_0[\zeta(T)]$ 时,

$$\pi^*(t) = \varphi(t)\frac{\theta(t)}{\sigma} = \varphi(t)\frac{m(t) - r}{\sigma^2} \tag{14}$$

其中

$$\varphi(t) = \frac{\lambda_2 E_t[\zeta(T)^2]}{\lambda_1 E_t[\zeta(T)] + \lambda_2 E_t[\zeta(T)^2]}\cdot\frac{1}{1 - 2\frac{\gamma_0 T + 1}{\gamma_0 t + 1}},$$

$E_t[\zeta(T)]$ 和 $E_t[\zeta(T)^2]$ 的具体表达式由引理 1 给出.

证明 我们的证明思路便是寻找可以复制最优终端财富 $\lambda_1 + \lambda_2\zeta(T)$ 的可行投资策略. 根据期望财富水平 z 取值的不同可以分为以下几种情形进行讨论:

当 $z = W_0/E_0[\zeta(T)]$ 时, 根据式(12)可以得到 $\lambda_1 = W_0/E_0[\zeta(T)]$ 和 $\lambda_2 = 0$. 由于 $E_0[\zeta(T)] = e^{-rT}$, 所以 $\lambda_1 = W_0 e^{rT}$, 从而此时有 $W^*(T) = W_0 e^{rT}$. 显然这种情形下最优投资策略为 $\pi^*(t) = 0$, 也即是将全部财富在整个计划期 $[0, T]$ 一直投

资于无风险资产.

当 $z < W_0/E_0[\zeta(T)]$ 时,对于任何可行投资策略 π,总是可以得到 $Var_0[W^\pi(T)] \geqslant 0$ 和 $E_0[W^\pi(T)] = z < W_0 e^{rT}$,因此对于均值—方差型投资者来说,在这种情形下 $\pi^*(t) = 0$ 仍是最优投资策略.

对于 $z > W_0/E_0[\zeta(T)]$ 的情形,最优投资策略的求解要稍显复杂一些. 由于投资者的财富过程 $W(t)$ 与状态价格密度 $\zeta(t)$ 的乘积在域流 F^S 是一个鞅,从而对应于 $W^*(T) = \lambda_1 + \lambda_2\zeta(T)$ 的财富过程为

$$W(t) = \frac{1}{\zeta(t)}E_t[\zeta(T)W^*(T)] = \frac{\lambda_1 E_t[\zeta(T)]}{\zeta(t)} + \frac{\lambda_2 E_t[\zeta(T)^2]}{\zeta(t)}$$

利用性质 1,可以计算出 $\frac{E_t[\zeta(T)]}{\zeta(t)} = e^{-r(T-t)}$,

$$\frac{E_t[\zeta(T)^2]}{\zeta(t)} = f(t)\exp\left\{\frac{1}{2}\circ\frac{1}{1-2\frac{\gamma_0 T+1}{\gamma_0 t+1}}\frac{\gamma_0 t+1}{\gamma_0}\theta(t)^2\right\}$$

其中 $f(t) = \frac{\exp(-r(T-t))}{\sqrt{2cd+1}}\sqrt{\frac{\gamma_0 T+1}{\gamma_0 t+1}}$ 是关于 t 的一个确定性函数,这样得到了 $W(t)$ 的表达式,它是一个关于 t 和 $\theta(t)$ 的函数.

根据 Itô 公式和式(3)可以得到 $\frac{\partial W(t)}{\partial\theta(t)}\gamma(t)$ 为 $dW(t)$ 的表达式中 $dB(t)$ 前的系数. 而与此同时根据式(8),$W(t)\pi(t)\sigma$ 也是 $dW(t)$ 的表达式中 $dB(t)$ 前的系数,因此通过比较有如下等式成立

$$\frac{\partial W(t)}{\partial\theta(t)}\frac{\gamma_0}{\gamma_0 t+1} = W(t)\pi(t)\sigma$$

将 $W(t)$ 的表达式代入上式,可以得到

$$\frac{E_t[\lambda_2\zeta(T)^2]}{\zeta(t)}\frac{1}{1-2\frac{\gamma_0 T+1}{\gamma_0 t+1}}\theta(t) = W(t)\pi(t)\sigma$$

稍作整理可以得到 $\pi(t)$ 满足式(14).　　证毕.

3　均值—方差有效边界

本节将推导出参数不确定性下的均值—方差有效边界. 根据 Markowitz[22],可以给出均值—方差有效边界的定义. 用 $W^\pi(T)$ 表示投资策略 π 下的终端财富.

定义 1　一个可行投资策略 π 被称为均值—方差有效策略,如果不存在其他可行投资策略 π′ 满足如下不等式组

$$Var_0[W^{\pi'}(T)] \leqslant Var_0[W^\pi(T)],$$
$$E_0[W^{\pi'}(T)] \geqslant E_0[W^\pi(T)]$$

并且其中至少有一个不等式严格成立. 对于任意有效策略 π,$(E_0[W^\pi(T)], Var_0[W^\pi(T)]) \in R^2$ 称为一个有效点,所有的有效点构成的集合称为均值—方差有效边界.

定理 3　参数不确定性下的均值—方差有效边界可以表示成如下带参数的方程组

$$\begin{cases} E_0[W(T)] = z \\ Var_0[W(T)] = \lambda_1(z)z + \lambda_2(z)W_0 - z^2, \\ z \geqslant \frac{W_0}{E_0[\zeta(T)]} \end{cases} \tag{15}$$

其中 $\lambda_1(z)$ 和 $\lambda_2(z)$ 由式(12)给出.

证明　对应于 $E_0[W(T)] = z$,式(11)给出了参数不确定性情形下使得方差最小的终端财富 $W^*(T)$,此时有

$$\begin{aligned} Var_0[W^*(T)] &= E_0[W^*(T)^2] - z^2 \\ &= E_0[(\lambda_1(z) + \lambda_2(z)\zeta(T))W^*(T)] - z^2 \\ &= \lambda_1(z)E_0[W^*(T)] + \lambda_2(z)\times \\ &\quad E_0[\zeta(T)W^*(T)] - z^2 \\ &= \lambda_1(z)z + \lambda_2(z)W_0 - z^2 \end{aligned}$$

将式(12)中 $\lambda_1(z)$ 和 $\lambda_2(z)$ 的表达式代入上式得到

$$\begin{aligned} Var_0[W^*(T)] &= \frac{1}{Var_0[\zeta(T)]}[z^2(E_0[\zeta(T)^2] - \\ &\quad Var_0[\zeta(T)]) - 2zW_0E_0[\zeta(T)] + W_0^2] \\ &= \frac{1}{Var_0[\zeta(T)]}[z^2(E_0[\zeta(T)])^2 - \\ &\quad 2zW_0E_0[\zeta(T)] + W_0^2] \end{aligned}$$

不难看出,当 $z \geqslant \frac{W_0}{E_0[\zeta(T)]}$ 时,$Var_0[W^*(T)]$ 是关于 z 的严格递增函数,而当 $z < \frac{W_0}{E_0[\zeta(T)]}$ 时,$Var_0[W^*(T)]$ 是关于 z 的严格递减函数. 因此根据均值—方差有效边界的定义,只需考虑 $z \geqslant$

$\frac{W_0}{E_0[\zeta(T)]}$的部分,从而参数不确定性下的均值—方差有效边界可以由式(15)给出.　　证毕.

至此,完整地求解了参数不确定性下的动态均值—方差投资组合选择问题,得到了最优投资策略和均值—方差有效边界的解析表达式.下一节中将利用中国金融市场中的历史数据,就参数不确定性和贝叶斯学习对最优投资策略以及投资效果的影响进行比较静态分析.

4 最优投资策略和投资效果分析

4.1 参数不确定性对最优投资策略的影响

在本节中使用中国证券市场中的真实数据来说明参数不确定性对最优投资策略的影响.选择上海证券交易所股票价格综合指数代表风险资产,其收益率数据来自于Wind数据库.无风险利率则选择银行间同业拆借市场名义利率,数据来自于中经网统计数据库.根据1997年1月份至2009年1月份之间的历史数据所进行的估计得到$r=0.015$, $\mu=0.0807$, $\sigma=0.264$④.此外,假设初始信念m_0的取值与μ相同,投资者终止时刻的目标期望财富$z=1.1$,投资计划期长度$T=2$.图1给出了初始时刻投资于风险资产的比例$\pi^*(0)$随投资计划期长度T的变化而变化的图形.图中实线代表的是考虑参数不确定性的情形($\gamma_0=0.0243$),而虚线代表的是忽略参数不确定性的情形($\gamma_0=0$).从图中可以看出:引入参数不确定性和学习之后初始时刻投资于股票的最优财富比例总是小于忽略参数不确定性的情形.

在股票价格服从几何布朗运动的假设下,如果不考虑参数不确定性和估计风险,投资者主观认为在时刻T股票的对数收益率服从期望为$T\mu$、方差为$T\sigma^2$的正态分布.在引入参数不确定性和学习之后,投资者一旦观测到较高的真实收益率会提高其对未来收益率期望的估计.所以从投资者的角度来看,股票前后不同期的收益率并不是相互独立的,而是存在正的序列相关性.这样投资者主观认为收益率的方差大于$T\sigma^2$,并且随着T增加而增加的速度超过线性增长速度.因此,对于均值—方差型投资者来说,股票资产的风险显得更大了,从而投资于股票的财富比例小于忽略参数不确定性的情形,它们之间的差称作由参数不确定性引致的对冲需求(hedge demand).

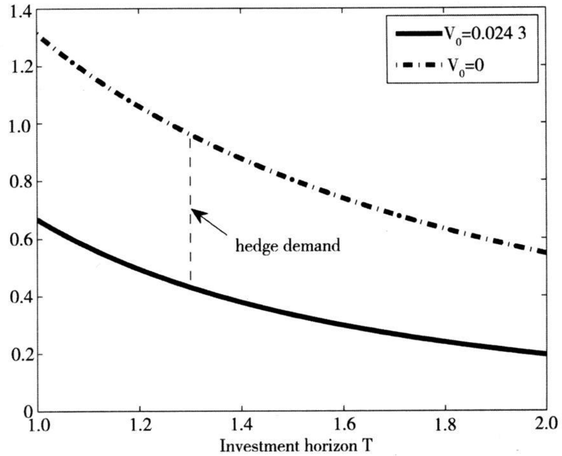

图1 参数不确定性对最优投资组合的影响

Fig. 1 The effect of parameter uncertainty on optimal portfolio

4.2 考虑参数不确定性对投资效果的影响

本小节将分析均值—方差模型下考虑参数不确定性对投资效果的影响,选择夏普比例(Sharpe's ratio)作为衡量投资效果的指标

$$Sharpe=\frac{\bar{E}[W_T]-W_0e^{rT}}{\sqrt{\overline{Var}[W_T]}} \tag{16}$$

这里$\bar{E}[\cdot]$和$\overline{Var}[\cdot]$分别代表资产收益率在真实概率分布下的无条件期望算子和方差算子.

假设有两类投资者,第Ⅰ类投资者考虑参数不确定性,随着信息的增加不断重新估计μ的取值;而第Ⅱ类投资者则忽略参数不确定性,他们在整个投资计划期中认为瞬时期望收益率就是m_0.下述指标可用于衡量考虑参数不确定性对投资效果产生的影响

$$\Delta S=\frac{\bar{E}[W_T^{\mathrm{I}}]-W_0e^{rT}}{\sqrt{\overline{Var}[W_T^{\mathrm{I}}]}}-\frac{\bar{E}[W_T^{\mathrm{II}}]-W_0e^{rT}}{\sqrt{\overline{Var}[W_T^{\mathrm{II}}]}} \tag{17}$$

其中W_T^{I}为考虑参数不确定性的投资者在终止时刻的财富,也就是式(11)所给出的$\lambda_1+\lambda_2\zeta(T)$.

④ 实证研究表明在1997年前后中国股票市场收益率的变化规律发生较大变化,为了避免指数收益率数据在时间序列上的结构性转变,只选择1997年至今的数据进行分析.

而 W_T^{II} 代表的是忽略参数不确定性的投资者在终止时刻的财富. 当 $\Delta S>0$ 时第Ⅰ类投资者的投资效果较好，当 $\Delta S<0$ 时则说明第Ⅱ类投资者的投资效果更好.

由于难以求出 ΔS 的解析表达式，使用模拟方法对 ΔS 进行近似计算⑤. 模拟方法如下：对经济体进行 100 000次模拟，对于每一条生成的路径，可以得到标准布朗运动在投资期终止时刻 T 的一个取值 $B(T)$，从而结合式（5）、（7）和（13）可以计算出对应路径的 $\zeta(T)$、$E_0[\zeta(T)]$ 和 $\mathrm{Var}_0[\zeta(T)]$ 的取值. 然后通过式（11）和（12）计算出相应的终端财富的取值 $W^I(T)$. 这样得到了 $W^I(T)$ 的一个样本数量为 100 000的样本空间. 该样本空间的均值便是 $\bar{E}[W_T^I]$ 的近似值，而样本空间的方差则是 $\overline{\mathrm{Var}}[W_T^I]$ 的近似值. 类似地，可以计算出不考虑参数不确定性时的终端财富 $W^{II}(T)$ 在真实概率下的期望和方差. 这样通过式（17）可以计算出 ΔS 的近似值.

图 2给出了 ΔS 随初始信念 m_0 取值的变化而发生变化的图形⑥. 从图中可以看出，只要当 m_0 与 μ 存在一个较小的偏差时便有 $\Delta S>0$ 成立，考虑参数不确定性可以带来投资效果的显著提高. 这是因为与第Ⅱ类投资者相比，第Ⅰ类投资者可以通过不断学习新增信息和重新估计来提高对 μ 估计的准确性，进而带来投资效果的改善. 只有在 m_0 与 μ 的真实取值十分接近时，第Ⅰ类投资者的投资效果反而较差，此时他们考虑了并不需要考虑的估计风险.

图 3可用于分析投资计划期长度 T 对投资效果的影响. 从图 3中可以看出，当 m_0 与 μ 存在一个较小的偏差时，对应投资期限较长的曲线位于对应投资期限较短的曲线的上方. 这意味着投资期限越长，考虑参数不确定性带来投资效果的改善更为显著. 事实上，随着 T 不断增大，第Ⅰ类投资者在整个投资过程中可以利用的新信息更多. 因而在投资期的后半部分，对参数的估计也更为准确，从而会带来投资效果更为明显的提高. 这说明，对于投资计划期较长的投资者来说，考虑参数不确定性是更为重要的.

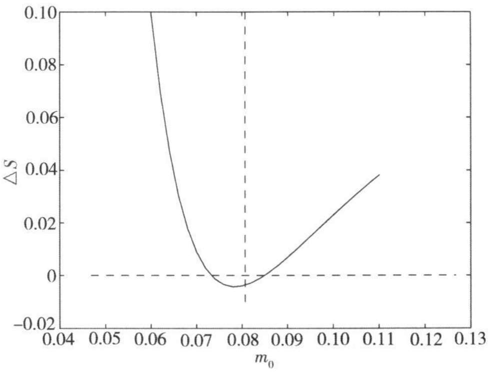

图 2　初始信念 m_0 对投资效果的影响

Fig. 2 The effect of belief m_0 on portfolio performance

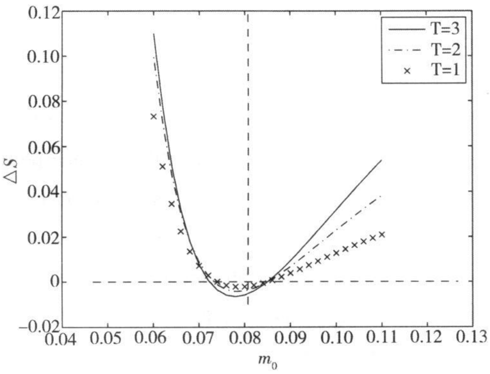

图 3　投资计划期长度 T 对投资效果的影响

Fig. 3 The effect of investment horizon T on portfolio performance

5　结束语

本文研究了连续时间情形下引入参数不确定和学习时投资组合选择的动态均值−方差模型，使用鞅方法导出了最优投资策略和均值−方差有效边界的解析表达式. 在此基础上，深入讨论了参数不确定性对最优投资策略和投资效果产生的影响及其原因，并以此说明了参数不确定性在投资实践中的重要性. 后续的研究工作可以围绕以下两个方面展开：首先，从资产配置到资产定价是

⑤　计算过程中仍然使用根据中国证券市场实际数据进行估计所得到的参数：$r=0.015$，$\mu=0.0807$，$\sigma=0.26$，并且假设第Ⅰ类投资者的初始信念 v_0 的取值为 0.0243，而第Ⅱ类投资者不考虑参数不确定性，自然有 $v_0=0$.

⑥　投资计划期长度 $T=2$.

金融学中常见的研究思路,参数不确定性将如何影响均衡状态下的资产价格具有十分重要的研究意义;其次,本文可以看作是对标准投资组合理论引入现实因素的初步探讨,如何进一步引入收益率的可预测性、投资者非理性的信念、交易成本、收益率的非正态性等现实因素以及将这些因素综合考虑无疑都将是未来金融学领域的重要研究方向.

参 考 文 献:

[1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. The Journal of Finance, 1952, 7: 77—91.

[2] Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multi-period mean-variance formulation[J]. Mathematical Finance, 2000, 10(3): 387—406.

[3] Bajeux-Besnainou I, Portait R. Dynamic asset allocation in a mean-variance framework[J]. Management Science, 1998, 44: 79— 95.

[4] Zhou X Y, Li D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework[J]. Applied Mathematics and Optimization, 2000, 42: 19—33.

[5] Li X, Zhou X Y, Lim A E B. Dynamic mean-variance portfolio selection no-shorting constraints[J]. SIAM J. Control Optim., 2001, 40: 1540— 1555.

[6] Bielecki T R, Jin H Q, Pliska S R, Zhou X Y. Continuous-time mean-variance portfolio selection with bankruptcy prohibition [J]. Mathematical Finance, 2005, 15(2): 213—244.

[7] Xie S X, Li Z F, Wang S Y. Continuous-time portfolio selection with liability: Mean-variance model and stochastic LQ approach[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42: 943— 953.

[8] Bawa V S, Brown S, Klein R W. Estimation Risk and Optimal Portfolio Choice[M]. Amsterdam: North-Holland, 1979.

[9] Gennotte G. Optimal portfolio choice under incomplete information[J]. The Journal of Finance, 1986, 41: 733—746.

[10] Dothan M U, Feldman D. Equilibrium interest rates and multiperiod bonds in a partially observable economy[J]. The Journal of Finance, 1986, 41: 369—382.

[11] Detemple J B. Asset pricing in a production economy with incomplete information[J]. The Journal of Finance, 1986, 41: 383—391.

[12] Brennan M J. The role of learning in dynamic portfolio decisions[J]. European Finance Review, 1998, 1: 295—306.

[13] Xia Y H. Learning about predictability: The effects of parameter uncertainty on dynamic asset allocation[J]. The Journal of Finance, 2001, 56: 205— 246.

[14] Lakner P. Optimal trading strategy for an investor: The case of partial information[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1998, 76: 77—97.

[15] 杨朝军, 陈浩武. 参数不确定性对投资者最优资产组合的影响:基于中国的实证[J]. 中国管理科学, 2008, 16(3): 37—42.
Yang Chao-jun, Chen Hao-wu. Parameter uncertainty and investor's portfolio choice: Evidence from China stock market [J]. Chinese Journal of Management Science, 2008, 16(3): 37—42. (in Chinese)

[16] 孟卫东, 何朝林. 基于学习行为的动态资产组合选择[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 9: 38— 46.
Meng Wei-dong, He Chao-lin. The choice of dynamic portfolio based on the learning behavior[J]. Systems Engineering Theory and Practice, 2007, 9: 38—46. (in Chinese)

[17] 郭文旌, 雷 鸣. 非连续股价及不完全信息下的最优投资消费[J]. 工程数学学报, 2006, 23(9): 266— 272.
Guo Wen-jing, Lei Ming. Optimal portfolio and consumption with discontinuous prices and incomplete information[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(9): 266— 272. (in Chinese)

[18] Xiong J, Zhou X Y. Mean-variance portfolio selection under partial information[J]. SIAM J. Control Optim., 2007, 46(1): 156—175.

[19] Cox J C, Huang Chi-fu. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process[J]. The

Journal of Economic Theory, 1989, 39: 33—83.

[20] Pliska S. A stochastic calculus model of continuous trading: Optimal portfolios[J]. Mathematics of Operations Research, 1986, 11: 371—382.

[21] Merton R. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation[J]. Journal of Financial Economics, 1980, 8: 323—362.

[22] Liptser R, Shiryayev A. Statistics of Random Processes[M]. Berlin: Springer, 1977.

[23] Karatzas I, Shreve S E. Methods of Mathematical Finance[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[24] Elliott R J, Kopp P E. Mathematics of Financial Markets[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[25] Markowitz H. Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets[M]. Frank J Fabozzi Associate, New Hope, 1987.

A dynamic mean-variance model of portfolio selection under parameter uncertainty

LI Zhong-fei, YUAN Zi-jia

Lingnan (University) College, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: The standard mean-variance portfolio selection model assumes that investors exactly know the security parameters, neglecting the effect of parameter uncertainty on portfolio selection. This paper investigates a continuous-time mean-variance portfolio selection problem under parameter uncertainty and Bayesian learning. The problem is solved by using a martingale approach, and the optimal investment strategy and the mean-variance efficient frontier are derived in closed form. Based on these results, we give an empirical analysis with data from Chinese security markets. The analysis shows that parameter uncertainty has a great effect on the optimal investment strategy and the investment performance.

Key words: parameter uncertainty; mean-variance model; dynamic portfolio selection; Bayesian learning; efficient frontier