经济时间资产定价模型[①]

于栋华，吴冲锋
（上海交通大学安泰经济与管理学院，上海 200030）

摘要： 在常规时间变换研究中所采用的从属概念是建立在独立条件上的，但是价格和成交量之间却是相关的. 为了能够将成交量作为价格的随机时间，推广了从属概念，提出了相关从属的定义. 相关从属扩大了时间变换研究的范围. 继而讨论了相关从属下过程的扩散性质，研究了经济时间上的资产定价问题，结果类似于资本资产定价模型和套利定价模型. 最后，利用零贝塔 CAPM 检验对上海 A 股市场进行了实证研究，发现经济时间资产定价模型在某些情况下是成立的，并且同样条件下的经济时间模型比日历时间模型的拟合度要高.

关键词： 时间变换；从属；资本资产定价模型；套利定价模型
中图分类号： F832.5　**文献标识码：** A　**文章编号：** 1007－9807(2011)08－0065－10

0 引 言

经济研究中常常要涉及时间. 通常采用的时间称为日历时间，它按照固定的时间间隔分析数据. 例如，在对商场日销售额的时间序列分析中，数据是以日为单位推进的. 然而，人们发现并不是所有的问题都适合采用日历时间. 例如，对股票的收盘价格，人们就提出了交易时间和成交量时间. 首先来看交易时间，由于交易所一般只在周一至周五交易，所以收盘价缺少周六、周日的数据，不像日销售额那样每天都有. 因此，要在日历时间上分析收盘价就必须定义周六和周日的收盘价——有的学者取上周五或下周一的值，有的取平均值，等等. 而另一些学者提出了更简便的方法——将周末去除，使时间只包含周一至周五的交易日，这个新的时间就称为交易时间，然后在交易时间上分析收盘价. 交易时间的引入，使得人们不必再去人为定义数据，很好地解决了交易所休市造成的数据缺失问题. 其次来看成交量时间. 成交量时间的提出来源于两个考虑. 一方面，现实中存在着各种日历效应，如周日历效应——收益率、成交量等在周一和周五的变化规律与其它交易日不同[1]. 而交易时间却没有很好的反映出这种差别——它假定每个交易日的长度都是1，实际上把各个交易日看作是平等的. 另一方面，成交量对价格研究十分重要. 价格可能实际上是由成交量驱动的，业界广泛流传着“价变量先行”的说法. 由于上述原因，文献[2－5]提出了成交量时间，即假定成交量活跃的交易日的时间长度大于1（如1.5）、不活跃的交易日的时间长度小于1（如0.5）. 正如股价研究中存在交易时间和成交量时间，人们发现许多问题中也可以找到其它时间，它们能够比日历时间更好地描述经济系统. 例如，早在60年代，文献[6]就提出货币的推进时间应该是总产出指数，而文献[7]提出货币需求的推进时间应该是通货膨胀. 这些新时间被统称为经济时间，前面提到的交易时间、成交量时间都是一种经济时间. 从日历时间到经济时间的变换，则被称为时间变换.

上面简单介绍了经济时间. 要将这种方法应用于实际研究，人们还必须思考如何从数学上描

① 收稿日期：2005－11－29；修订日期：2011－01－21.
基金项目：国家自然科学基金重点资助项目(70331001).
作者简介：于栋华(1976—)，女，山东青岛人，博士. Email: yudonghua@elsecn.com

述时间变换. 历史上,对时间变换的数学研究主要是通过从属过程进行的. 从属的定义最早是文献[8]提出的,文献[9]对定义作了进一步的阐述. 而最早将从属引入经济领域的是文献[10-11]. 文献[10]认为,股价变化是一个基于累积交易次数的从属过程. 而文献[11]认为价格变化从属于正态分布,经济时间应该是成交量. 此后,从属在金融和经济领域得到日益广泛的应用,如 Ghysels 提出了随机波动的时间变换模型②,文献[12]研究了如何利用时间变换恢复资产收益的正态性.

虽然从属概念得到广泛的应用,但是有一个重要的问题被忽略了——从属的定义要求随机时间与根本过程必须是独立的,也就是说,只有在独立条件成立时,才能够应用从属概念来研究时间变换. 而实际上,在许多现有的研究中独立条件并不成立,人们往往简单的假定所选择的经济时间与根本过程独立,回避了可能存在的相关关系. 一个重要的例子就是价格和成交量之间的关系. 自从属引入经济研究后,许多学者都在研究价格从属时,将成交量作为随机时间,这隐含地假定了价格和成交量之间是独立的. 而事实上,大量的实证研究表明,价格与成交量之间不是独立的. 例如,文献[13-14]发现成交量与股价变动绝对值之间存在正相关关系,文献[15]发现成交量对收益率的自相关性存在影响,文献[16]发现成交量与收益率的惯性效应之间有明显的关系. 因此,当从属中的根本过程是价格时,选择成交量作为随机时间是不恰当的.

为了刻画价格、成交量这种存在相关性的时间变换问题,定义了相关从属过程. 在相关从属下,就可以将成交量作为价格的随机时间,弥补常规从属定义的缺陷.

虽然,文献[17]也考虑到根本过程与随机时间过程可能存在相关关系,但是与本文的研究不同. 前者主要针对的是时变 levy 过程,研究的是过程在日历时间上的性质,研究的方法则是扩展 Laplace 变换到复数域,没有涉及从属概念,而且仅仅是在求矩母函数时考虑了相关性. 而本文研究的是更一般的过程,而不仅仅是时变 levy 过程,关注的是经济时间,而不是日历时间,研究的方法是扩展常规从属概念为相关从属,给出相关问题的一般数学表述,为进一步研究其他统计性质(包括矩母函数)提供理论基础.

有了相关从属的概念,就可以进一步研究其统计性质以及相应的资产收益问题. 这里主要讨论相关从属的扩散性质,此外,作为相关从属的一种应用,研究了经济时间资产定价问题.

1 相关从属的定义

首先,引入相关从属的定义. 举例来说,也就是在承认成交量与股票价格之间存在相关性的前提下,应该如何描述成交量时间上的价格.

定义(相关从属) 如果 s_t 是日历时间 t 上的一个正严格递增过程,$s_0=0$,T_s 是 s_t 的逆,即对 $s>0$,$T_s=\min\{t: s_t>s, t\geqslant 0\}$,且 $T_0=0$. p_t 是另一个日历时间过程,则定义过程 $\bar{p}_s=p_{T_s}$ 为日历时间过程 p_t 相对于经济时间 s_t 的相关从属.

就成交量和价格的例子,相应变量可以选择为:s_t 是至第 t 日为止某股票的累积成交量;p_t 是该股票在第 t 日的收盘价格;T_s 是累积成交量首次达到 s 时的日历时间. 那么把成交量时间上的价格定义为日历时间上的价格关于相应成交量的条件分布. 注意,这里隐含的假定股票的日成交量不等于零,以保证累积成交量是严格递增的.

本文命名为“相关从属”的原因在于,相关从属与从属在形式上是相似的,从属是相关从属的特例. 对从属,过程 p 和 s 是独立的,条件分布为 $(\bar{p}_s \mid T_s=t)=p_t$,而对相关从属该条件分布为 $(p_t \mid s_t=s)$. 两者只有当过程 p 与过程 s 独立时才是相同的.

虽然已经建立了相关从属概念,但是还需要其他条件才能做进一步的研究. 由于条件分布的复杂性,无法在一般情形下研究问题. 一个自然的想法是,如何将条件分布 $(p_t \mid s_t=s)$ 与 p、s 的无条件分布联系起来.

首先,来看下面的命题.

② 见 Ghysels E, Jasiak J. Stochastic volatility and time deformation: An application to trading volume and leverage effects. Discussion paper, 1994, CIRANO.

命题 1　如果随机变量 ξ 和 η 之间的相关系数为 ρ，那么存在 ξ 的一个分解，满足：$\xi = \xi_1 + \xi_2$，$\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$，$\rho(\eta, \xi_1) = 1$，$\rho(\eta, \xi_2) = 0$.

证明　只要选择 $\xi_1 = \rho\eta\sigma_\xi / \sigma_\eta$ 和 $\xi_2 = \xi - \xi_1$ 即可.　证毕.

从命题可以发现，利用过程之间的相关性，可以将任何一个随机变量分解为两个部分，特别的

$$(\xi \mid \eta = y) = (\xi_1 \mid \eta = y) + (\xi_2 \mid \eta = y)$$

如果进一步有 ξ_2 与 η 独立，则有

$$(\xi \mid \eta = y) = \rho y \sigma_\xi / \sigma_\eta + \xi_2$$

此式左边为条件分布，右边为无条件分布，因此给出了一定条件下条件分布与无条件分布的关系. 将这种处理条件分布的直观方法应用于相关从属，就得到了下面的假设.

假设 1　假定过程 p_t 满足

$$p_t = f(s_t) + g(t) + y_t$$

这里 $f(s_t)$ 不显含 t，$f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 是确定性函数，y_t 和 s_t 独立，并且 $\mathrm{E}y_t \equiv 0$.

事实上，选择 $\mathrm{E}y_t \equiv 0$ 是为了简化计算. 这里的 $f(\cdot)$ 代表了 p_t 中与 s_t 相关的部分，而 $g(\cdot)$ 的选择则是为了满足 $\mathrm{E}y_t \equiv 0$ 的条件. 如果，记 $\bar{g}_s = g(T_s)$，$\bar{y}_s = y(T_s)$，那么在假设 1 下，过程 $\bar{p}_s$ 满足

$$\bar{p}_s = f(s) + \bar{g}_s + \bar{y}_s$$

就价格和成交量的例子，上述假设将价格过程分解为 3 个部分的和. 第 1 项 $f(\cdot)$ 描述了价格和成交量之间的相关性，第 2 项 $g(\cdot)$ 描述了价格在日历时间上的时间趋势. 由于价格除了受到成交量影响外，还有自身的独立变化规律，因此选择第 3 项 y_t.

下面的研究主要是建立在该假设基础上的.

2　相关从属的扩散性质

下面研究相关从属的扩散性质. 举例来说，也就是如何根据价格在日历时间下的随机微分方程，得到价格在成交量时间下的随机微分方程. Ghysels 等③给出了常规从属的扩散性质，本文利用类似的方法，得到了相关从属下的结果，将结论推广到了多维情形.

命题 2　如果假设 1 成立，y_t 和 T_s 的随机微分方程为

$$\begin{cases} \mathrm{d}y_t = \sigma(y_t)\,\mathrm{d}W_t \\ \mathrm{d}T_s = a(T_s)\,\mathrm{d}s + b(T_s)\,\mathrm{d}\overline{W}_s \end{cases}$$

这里 a、b、σ 是常数且 $a > 0$，那么在经济时间下，过程 $\bar{p}_s$ 的随机微分方程为

$$\mathrm{d}\bar{p}_s = \left[f' + ag' + \frac{1}{2}b^2 g''\right]\mathrm{d}s + bg'\mathrm{d}\overline{W}_s + \sigma\sqrt{a}\,\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_s$$

这里 $\overline{W}_s$ 和 $\overline{\overline{W}}_s$ 是经济时间上的两个独立的布朗运动.

证明　根据假设 1，有

$$\mathrm{d}\bar{p}_s = [f']\,\mathrm{d}s + \mathrm{d}\bar{g}_s + \mathrm{d}\bar{y}_s \tag{1}$$

由 ITO 公式，成立

$$\mathrm{d}\bar{g}_s = \mathrm{d}g(T_s) = \left[ag' + \frac{1}{2}b^2 g''\right]\mathrm{d}s + bg'\mathrm{d}\overline{W}_s \tag{2}$$

对于 $\mathrm{d}\bar{y}_s = \mathrm{d}y(T_s)$，假设

$$y(t + \Delta t) - y(t) = \Delta y(t) = \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

其中 $\varepsilon \sim N(0,1)$. 所以

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathrm{E}[\Delta y(T_s) \mid y(T_s) = y, T_s = t]}{\Delta s} =$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathrm{E}(\mathrm{E}[y(T_{s+\Delta s}) - y(T_s) \mid y(T_s) = y, T_s = t, T_{s+\Delta s} - T_s = \Delta t])}{\Delta s} =$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathrm{E}(\sigma\sqrt{\Delta t}\,\mathrm{E}[\varepsilon \mid y(T_s) = y, T_s = t, T_{s+\Delta s} - T_s = \Delta t])}{\Delta s} = 0$$

同理可得

③　见 Ghysels E，Gourieroux C，Jasiak J. Market Time and Asset Price Movements: Theory and Estimation. Discussion Paper，1995，CIRANO and CREST

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathrm{E}\left[\Delta^2 y(T_s)\mid y(T_s)=y, T_s=t\right]}{\Delta s}=\sigma^2 a$$

和

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathrm{E}\left[\Delta y(T_s)\Delta y(T_s)\mid y(T_s)=y, T_s=t\right]}{\Delta s}=0$$

所以

$$\mathrm{d}\bar{y}_s=\sigma\sqrt{a}\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_s \tag{3}$$

根据式(1)–式(3)命题得证. 证毕.

Ghysels 等的文章有一个错误. 例如,当 $f\equiv 0$、$g(t)\equiv\mu t$(μ 为常数)时,即通常的从属情形,根据 Ghysels 等的结果,$\bar{p}_s$ 的方程为

$$\mathrm{d}\bar{p}_s=a\mu\mathrm{d}s+b\mu\mathrm{d}\overline{W}_s+\sqrt{a\sigma^2-b\mu^2}\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_s$$

而根据命题 2,应为

$$\mathrm{d}\bar{p}_s=a\mu\mathrm{d}s+b\mu\mathrm{d}\overline{W}_s+\sigma\sqrt{a}\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_s$$

两者是矛盾的,原因在于 Ghysels 等的推导中 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\mathrm{E}\left[\Delta^2 p(T_s)\mid p(T_s)=p, T_s=t\right]}{\Delta s}$ 项不应该为 $b^2\alpha$,而应该是 $a^2\beta^2+b^2\alpha$.

虽然命题 2 给出了经济时间下过程的随机微分方程,但是由于关注的一般为对数收益,因此为得到价格方程,还必须稍加变化,即如果收益 $\bar{r}_s$ 满足

$$\mathrm{d}\bar{r}_s=\mu_1\mathrm{d}s+bg'\mathrm{d}\overline{W}+\sigma\sqrt{a}\mathrm{d}\overline{\overline{W}}$$

那么根据 Ito 公式,价格过程 $\bar{p}_s=\mathrm{e}^{\bar{r}_s}$ 在经济时间下的随机微分方程就应该是

$$\mathrm{d}\bar{p}_s/\bar{p}_s=\mu_2\mathrm{d}s+bg'\mathrm{d}\overline{W}+\sigma\sqrt{a}\mathrm{d}\overline{\overline{W}} \tag{4}$$

命题2 是建立在假设1 上的,该假设将过程分解为两个独立的部分,如果将过程分解为多个独立部分的和,就可以得到如下的假设.

假设 2 假设有

$$p_t=f(s_t)+g(t)+y_t+\sum_{j=1}^{k}h_j(v_j(t))$$

这里 $f(s_t)$、$h_j(v_j(t))$ 不显含 t,$f(\cdot)$、$g(\cdot)$ 和 $h_j(\cdot)$ 是确定性函数,y_t、s_t 和 $v_j(t)$ 独立,并且 $\mathrm{E}[y_t]=\mathrm{E}[v_j(t)]\equiv 0$.

就成交量与价格的例子,此假设说明除了 y_t 外,还存在 k 个影响价格的独立因素 $v_1(t)$,…,$v_k(t)$.

在假设 A.2 下,类似的,也可以得到如下命题.

命题 3 如果假设 2 成立,y_t、v_j 和 T_s 的随机微分方程为

$$\begin{cases}\mathrm{d}y_t=\sigma\mathrm{d}W_t\\ \mathrm{d}v_j=\beta_j\mathrm{d}M_j\\ \mathrm{d}T_s=a\mathrm{d}s+b\mathrm{d}\overline{W}_s\end{cases}$$

这里 W_t、M_j 是日历时间的独立布朗运动,a、b、σ、β_j 是常数,且 $a>0$,$j=1,\cdots,k$,那么在经济时间下 $\bar{p}_s$ 的随机微分方程为

$$\mathrm{d}\bar{p}_s=\left[f'+ag'+\frac{1}{2}b^2g''+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}a\beta_j^2h_j''\right]\mathrm{d}s+bg'\mathrm{d}\overline{W}_s+\sqrt{a}\sigma\mathrm{d}\overline{W}_s^2+\sqrt{a}\sum_{j=1}^{k}\beta_jh_j'\mathrm{d}\overline{M}_j$$

这里 $\overline{W}_s$、$\overline{W}_s^2$ 和 $\overline{M}_j$ 是经济时间上的独立布朗运动,$j=1,\cdots,k$.

3 经济时间资产定价模型

有了相关从属的扩散性质,下面来研究经济时间上的资产定价问题. 试图了解,是否在新的时间上仍然存在类似于资本资产定价模型(CAPM)或者套利定价模型(APT)的结果. 众所周知,ICAPM 是连续时间的资产定价结果,但是其推导要用到瞬时均衡、动态规划技术,需要对消费和财富做出相应假定,非常复杂. 这里,不采用上述思路,而是采用文献[18]的方法来进行推导——该法仅仅根据两个基本假设就得到了连续时间的资产定价结果. 这里,本文仍然采用这两个假设.

假设 3 具有同等风险的资产有相同的收益[18].

在经典金融理论中,不论是投资组合模型还是 CAPM,都假定投资者是风险规避的,认为收益越大越好、风险越低越好,投资者力求使这两个相互制约的目标达到某种平衡. 结果必然导致均衡市场上具有同等风险的资产会有相同的收益. 因此,假设 A.3 与经典资产定价理论是一致的.

假设 4 短期投资者认为股价推进的时间标度与日历时间不同[18].

本文认为,采用日历时间分析股价忽略了很多重要影响,如交易成本、信息到达等,因此不能很好地描述股价系统的实际推进特点. 而采用其他时间能够使股价中包含更多的信息,如成交量时间将成交量信息融入到股价中,能够充分反映

成交量对股价的驱动作用. 这里，假定对于所有资产存在一个共同的经济时间，其方程满足命题 2.1.

虽然采用与文献［18］同样的假设，但是模型与文献［18］并不相同. 首先，文献［18］的模型仅仅包含 1 个风险来源，而本文将其推广到多维情形，风险的来源是多样的. 其次也是最重要的，在本文的模型中，时间变换是随机的，并且建立在本文的相关从属基础上，而文献［18］的模型仅仅是简单的线性变换，是非随机变换.

此外，为了进一步推导，给出以下假设.

假设 5　在经济时间下，任意资产的价格 p 的形式为

$$\mathrm{d}p/p = \mu\mathrm{d}s + bg'\mathrm{d}\overline{W} + \sigma\sqrt{a}\mathrm{d}\overline{\overline{W}}$$

这里 $\mathrm{d}\overline{W}$ 和 $\mathrm{d}\overline{\overline{W}}$ 是经济时间上的独立布朗运动，a、b、μ 和 σ 是常数，且 $a > 0$.

根据命题 2.1 和式(4)，可以很容易得到假设 A.5. 假设说明，在经济时间下资产价格运动在形式上类似于几何布朗运动，不同之处在于这里要考虑时间变换的影响，用 a、b、σ、$g(\cdot)$ 分别描述了成交量时间的期望推进率、期望波动率、价格中独立因素的期望波动率以及价格在日历时间上的趋势. 与文献［20］相比，由于采用的是随机时间变换，价格风险的来源不再是单一的，不仅包含个别波动 $\mathrm{d}\overline{\overline{W}}$，也包含共同的时间波动 $\mathrm{d}\overline{W}$. 因此，这里“同等风险”的含义也不同，指的是资产总的瞬时波动平方和相等，从而将文献［18］的模型推广到多维情形.

为研究资产定价问题还要有如下假定.

假设 6　在经济时间上存在无风险资产，其价格 B 满足 $\mathrm{d}B/B = \bar{r}\mathrm{d}s$，$\bar{r} > 0$ 为常数.

上述假设的经济含义是货币在经济时间上也存在着时间价值，其大小可以利用经济时间上的无风险资产的收益率来衡量. 就成交量时间来说，这种收益随累积成交量的增加而增加，并且只要累积成交量变化确定，那么收益的大小就是确定的，与其他因素无关.

值得注意的是，资产是否是无风险的，取决于所观察的时间标度. 一项资产可以同时满足，在日历时间上是无风险的，在经济时间上是有风险的，反之亦然. 原因在于，不同的时间标度下对风险的度量也是不同的.

现在可以推导相应定价问题了. 首先，考虑经济时间下，市场上只有两种不相关的资产.

命题 4　如果经济时间下，市场上只有无风险资产 B 和两种不相关的资产 p_1 和 p_2，价格满足

$$\begin{cases}\mathrm{d}p_i/p_i = \mu_i\mathrm{d}s + bg_i'\mathrm{d}\overline{W} + \sigma_i\sqrt{a}\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_i \\ \mathrm{d}B/B = \bar{r}\mathrm{d}s\end{cases} \tag{5}$$

$\mathrm{d}\overline{W}$、$\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_i$ 独立，$i = 1,2$

那么在经济时间上，有 $\mu_i - \bar{r} = \lambda x_i$，其中 $x_i = \sqrt{(bg_i')^2 + (\sigma_i\sqrt{a})^2}$，$i = 1,2$，$\lambda$ 为常数.

证明　根据式(5)，考虑组合 $v = wp_1 + (1 - w)B$，则有

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{wp_1\mu_1 + (1-w)B\bar{r}}{v}\mathrm{d}s + \frac{wp_1bg_1'}{v}\mathrm{d}\overline{W} + \frac{wp_1\sigma_1\sqrt{a}}{v}\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_1$$

若 v 和 p_2 具有同等风险，即

$$\left(\frac{wp_1bg_1'}{v}\right)^2 + \left(\frac{wp_1\sigma_1\sqrt{a}}{v}\right)^2 = (bg_2')^2 + (\sigma_2\sqrt{a})^2$$

则有

$$w = \frac{x_2B}{p(x_1 - x_2) + x_2B}$$

其中 $x_i = \sqrt{(bg_i')^2 + (\sigma_i\sqrt{a})^2}$，$i = 1,2$. 根据基本假设——“同等风险的资产有相同的收益”，有 $\frac{wp_1\mu_1 + (1-w)B\bar{r}}{v} = \mu_2$. 代入 w，可得 $\frac{\mu_1 - \bar{r}}{x_1} = \frac{\mu_2 - \bar{r}}{x_2}$.　　证毕.

命题中的“不相关”是指资产的个别风险 $\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_i$ 之间是不相关的，显然由于存在共同的时间风险 $\mathrm{d}\overline{W}$，资产之间不是不相关的. 参数 λ 的经济含义是经济时间下的单位风险收益. 命题说明，只要资产的个别风险不相关，那么就具有相同的单位风险收益，该结果实际上是对假设 4 的另一种表述. x_i 项代表了资产 p_i 的总风险，命题说明经济时间上，资产的期望收益率不但与其自身的风险特征(σ_i，g_i)相关，而且受到所选择的具体经济时间的特征(a，b)的影响.

如果经济时间下，市场上的风险资产不只两个，而是有很多，那么就成立如下命题.

命题 5　如果经济时间下，市场上有无风险

资产 B 和 N 种不相关的资产 p_i，价格满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}p_i/p_i = \mu_i \mathrm{d}s + bg_i' \mathrm{d}\overline{W} + \sigma_i \sqrt{a} \mathrm{d}\overline{\overline{W}}_i \\ \mathrm{d}B/B = \bar{r} \mathrm{d}s \end{cases} \tag{6}$$

$\mathrm{d}\overline{W}$ 和 $\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_i$ 独立

假设个别风险可分散化，那么在经济时间下，有 $\mu_i = \bar{r}$，$i = 1, \cdots, N$.

证明 假设投资者选择组合 v，$v = \sum_{i=1}^{N} l_i p_i$，其中 l_i 是组合 v 中包含的资产 p_i 的数量. 根据式(6)，有

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i\right) \mathrm{d}s + b\left(\sum_{i=1}^{N} w_i g_i'\right) \mathrm{d}\overline{W} + \sqrt{a}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i \sigma_i \mathrm{d}\overline{\overline{W}}_i\right)$$

其中 $w_i = l_i p_i / \left(\sum_{i=1}^{N} l_i p_i\right)$，$i = 1, \cdots, N$，故

$$\mu_v = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i\right),$$

$$g_v' = b\left(\sum_{i=1}^{N} w_i g_i'\right),$$

$$\sigma_v^2 = \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i \sigma_i \mathrm{d}\overline{\overline{W}}_i\right)$$

由于个别风险可分散化，即 $\lim_{N \to \infty} \sigma_v^2 = 0$，故对组合 v 应用命题 4，有

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i - \bar{r} = \lambda \left| \sum_{i=1}^{N} w_i b g_i' \right|$$

再对每个资产 p_i 分别应用该命题，有

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{N} w_i \sqrt{(bg_i')^2 + (\sigma_i \sqrt{a})^2} - \left|\sum_{i=1}^{N} w_i b g_i'\right|\right) = 0$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \sqrt{(bg_i')^2 + (\sigma_i \sqrt{a})^2} > \sum_{i=1}^{N} |w_i b g_i'| \geqslant \left|\sum_{i=1}^{N} w_i b g_i'\right|$$

故有 $\lambda = 0$. 证毕.

注意，这里时间波动 $\mathrm{d}\overline{W}$ 是共同风险，而不是个别风险. 命题说明，在经济时间下，虽然资产的时间风险项 $bg_i' \mathrm{d}\overline{W}$ 各不相同，但是只要个别风险可分散化，那么不论选择的具体经济时间是什么，无关性都将导致资产的预期收益率等于无风险收益率.

同样的，与 CAPM 类似，也可以假定存在着像市场组合那样的共同风险因子，不妨称之为市场因子，所有资产的风险都与该市场因子相关，那么就成立如下命题.

命题 6 如果经济时间下，市场上存在无风险资产 B，N 种风险资产 p_i 和一种市场因子 M，价格满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}M/M = \mu_M \mathrm{d}s + bg_M' \mathrm{d}\overline{W} + \sigma_M \sqrt{a} \mathrm{d}\overline{W}_M \\ \mathrm{d}p_i/p_i = \mu_i \mathrm{d}s + bg_i' \mathrm{d}\overline{W} + \sigma_i \sqrt{a} \mathrm{d}\overline{\overline{W}}_i \\ \mathrm{d}B/B = \bar{r} \mathrm{d}s \end{cases}$$

其中，$\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_i = \rho_{iM} \mathrm{d}\overline{W}_M + \sqrt{1 - \rho_{iM}^2} \mathrm{d}\overline{W}_i$；$\mathrm{d}\overline{W}$、$\mathrm{d}\overline{W}_M$ 和 $\mathrm{d}\overline{W}_i$ 独立，$\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_i \times \mathrm{d}\overline{W}_M = \rho_{iM} \mathrm{d}s$，那么在经济时间下，有

$$(\mu_i - \bar{r}) - \beta_{iM}(\mu_M - \bar{r}) = \lambda \sqrt{b^2 (g_i' - \beta_{iM} g_M')^2 + (1 - \rho_{iM}^2)(\sigma_i \sqrt{a})^2}$$

其中，$\beta_{iM} = \dfrac{\rho_{iM} \sigma_i}{\sigma_M}$，$i = 1, \cdots, N$.

证明 考虑组合 $\tilde{p}_i = p_i - \Delta_i M$，则有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{p}_i &= \mathrm{d}p_i - \Delta_i \mathrm{d}M \\ &= (p_i \mu_i - \Delta_i M \mu_M) \mathrm{d}s + \\ &\quad (p_i b g_i' - \Delta_i M b g_M') \mathrm{d}\overline{W} + \\ &\quad (p_i \sigma_i \sqrt{a} \rho_{iM} - \Delta_i M \sigma_M \sqrt{a}) \mathrm{d}\overline{W}_M + \\ &\quad p_i \sigma_i \sqrt{a} \sqrt{1 - \rho_{iM}^2} \mathrm{d}\overline{W}_i \end{aligned} \tag{7}$$

令 $\sigma_i p_i \rho_{iM} = \Delta_i \sigma_M M$，即 $\Delta_i = \dfrac{\sigma_i \rho_{iM}}{\sigma_M} \dfrac{p_i}{M}$，定义 $\beta_{iM} \triangleq \dfrac{\sigma_i \rho_{iM}}{\sigma_M}$，则 $\tilde{p}_i = p_i(1 - \beta_{iM})$，代入式(7)有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tilde{p}_i}{\tilde{p}_i} &= \frac{(\mu_i - \beta_{iM} \mu_M)}{1 - \beta_{iM}} \mathrm{d}s + \\ &\quad b \frac{(g_i' - \beta_{iM} g_M')}{1 - \beta_{iM}} \mathrm{d}\overline{W} + \\ &\quad \sqrt{a} \frac{\sigma_i \sqrt{1 - \rho_{iM}^2}}{1 - \beta_{iM}} \mathrm{d}\overline{W}_i \end{aligned} \tag{8}$$

再对 $\tilde{p}_i$ 应用命题 5，命题得证. 证毕.

虽然这里的 β 在形式上与 CAPM 中的类似，但两者是不同的. 因为，CAPM 中的 β 是定义在市场组合的总风险之上的，而这里的 β 只是基于个别风险 σ_i 和 σ_M，不包括时间风险 bg_M' 和 bg_i'. 尽管如此，仍然可以证明，这里的 β 具有某种可加性.

命题 7 在命题 6 的条件下，组合 $v = \sum_{i=1}^{N} l_i p_i$

的 β 系数为 $\beta_{vM} = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_{iM}$，这里 $w_i = l_i p_i / \left(\sum_{i=1}^{N} l_i p_i \right)$，$i = 1, \cdots, N$.

根据命题 4 - 7，得到如下命题.

命题 8　在命题 6 的条件下，如果个别风险可分散化，那么在经济时间下，有

$$\mu_i - \bar{r} = \beta_{iM}(\mu_M - \bar{r})$$

其中 $\beta_{iM} = \dfrac{\rho_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}$，$i = 1, \cdots, N$.

证明　类似命题 5 和 6.　　证毕.

上述命题，就是最终的经济时间资产定价结果. 类似于常规的 CAPM 结果，在经济时间上，任意资产的预期收益率也包含两个部分: 一部分为无风险收益率 $\bar{r}$，来源于货币的时间价值，是对投资者放弃即期消费的补偿; 另一部分为 $\beta_{iM}(\mu_M - \bar{r})$，是对投资者承担风险的补偿，其大小与 β_{iM} 成正比. β_{iM} 反映了资产收益率对市场因子收益率的敏感性. 由于 β_{iM} 与时间风险无关，所以命题说明承担时间风险没有补偿.

如果市场上存在多个市场因子，如工业产值指数、通货膨胀率、债券评级等，而不是像命题 8 中只有 1 个影响因素，那么相应的定价模型就变为如下命题.

命题 9　如果经济时间下，市场上存在无风险资产 B，N 种风险资产 p_i 和 k 种市场因子 M_j，价格满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}M_j / M_j = \tilde{\mu}_j \mathrm{d}s + b\tilde{g}_j' \mathrm{d}\overline{W} + \tilde{\sigma}_j \sqrt{a}\,\mathrm{d}\widehat{W}_j' \\ \mathrm{d}p_i / p_i = \mu_i \mathrm{d}s + b g_i' \mathrm{d}\overline{W} + \sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} \sqrt{a}\,\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_{ij} \\ \mathrm{d}B / B = \bar{r}\mathrm{d}s \end{cases}$$

其中，$\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_{ij} = \rho_{ij}\mathrm{d}\widehat{W}_j + \sqrt{1 - \rho_{ij}^2}\,\mathrm{d}\overline{W}_{ij}$; $\mathrm{d}\overline{W}$、$\mathrm{d}\widehat{W}_j$ 和 $\mathrm{d}\overline{W}_{ij}$ 独立; ρ_{ij} 满足 $\mathrm{d}\overline{\overline{W}}_{ij}\mathrm{d}\widehat{W}_j = \rho_{ij}\mathrm{d}s$，并且个别风险可分散化，那么在经济时间下，有

$$\mu_i - \bar{r} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij}(\tilde{\mu}_j - \bar{r})$$

其中 $\beta_{ij} = \dfrac{\rho_{ij}\sigma_{ij}}{\tilde{\sigma}_j}$，$i = 1, \cdots, N$，$j = 1, \cdots, k$.

上述结果类似于 APT. 从命题 3.5 到 3.6 的扩展过程，类似于从单因素模型到多因素模型的推广. 命题说明，资产的预期收益率由所承担的因素风险决定. β_{ij} 衡量了资产 i 对第 j 个因素的敏感性，而期望收益率与因素风险的关系可以用 β_{ij} 的线性函数来表示. 与命题 8 一致，对时间风险的承担没有补偿.

4　实证研究

下面进行经济时间资产定价模型的检验. 所有数据来源于“Wind 金融数据库”.

4.1　数据

样本区间　2002 - 1 - 1 到 2004 - 12 - 31 为止的日数据，共 721 天. 为了简单起见，下面称单位日历时间为日历日，称单位经济时间为经济日.

市场组合　根据所有 596 只股票构建市场组合.

经济时间与经济时间的价格序列　经济时间和经济时间序列的计算方法类似于文献 [2]，即如果在某日历日上，市场组合的对数成交量为 v，那么当 $v > \mathrm{E}(v) + 0.5\sqrt{\mathrm{var}(v)}$ 时，令 $I = 1.5$; 当 $v < \mathrm{E}(v) - 0.5\sqrt{\mathrm{var}(v)}$ 时，令 $I = 0.5$; 其他情况下，令 $I = 1.0$. 某个日历日的经济时间长度定义为 $\dfrac{I}{\mathrm{E}(I)}$. 这里之所以不直接选择 I 为经济时间，而是除以 $\mathrm{E}(I)$，是为了使不同时间上的数据个数相同，也就是说希望根据 721 个日历日的数据计算出 721 个经济日的数据，原因在于经济数据是从日历数据插值得到的，如果产生太多的点，将会产生过大的计算误差，而产生的点太少又会丧失许多重要的信息.

个股选择　除去数据不全的股票，上证 A 股共有 596 只股票可用于研究，每只股票都具有 721 个日历日的收盘价格和前收盘价格.

收益率的形式　所有收益率均为对数收益率，单位为 1%，即如果经济时刻 $s - 1$ 时的价格为 $\bar{P}(s-1)$，经济时刻 s 时的价格为 $\bar{P}(s)$，那么经济时刻 s 时的收益率为

$$\bar{R}(s) = (\ln[\bar{P}(s)] - \ln[\bar{P}(s-1)]) \times 100$$

4.2　检验

根据文献 [19]，当不存在无风险资产时的资本资产定价模型称为 Black-CAPM 或者零贝塔 - CAPM. 其市场模型为

$$\boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} R_{ms} + \boldsymbol{\varepsilon}_s \tag{9}$$

这里$\boldsymbol{R}_s$、$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$和$\boldsymbol{\varepsilon}_s$都是$N \times 1$向量，$\boldsymbol{R}_s$为$N$个资产的实际收益率，$\boldsymbol{\beta}$为贝塔系数构成的向量，$R_{ms}$为市场组合在经济时间$s$的实际收益率. 相应的假设检验为

$$H_0: \alpha = (\boldsymbol{l} - \boldsymbol{\beta})\gamma \tag{10}$$

这里，$\boldsymbol{l}$为由1构成的$N \times 1$向量，γ为零贝塔组合的收益率. 由于无法观测到零贝塔组合，因此γ也是一个参数. 检验统计量可以用下式来近似

$$J_6(\hat{\gamma}) = \frac{T_s - N - 1}{N}\left[1 + \frac{(\hat{\mu}_m - \hat{\gamma})^2}{\hat{\sigma}_m^2}\right]^{-1} \times \hat{\alpha}(\hat{\gamma})'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\alpha}(\hat{\gamma})$$

这里$J_6(\gamma) \sim F(N, T_s - N - 1)$.

分别从个股和资产组合角度对模型进行了检验，在个股中，按照股票代码，分别选择了前50只、100只、200只、300只、400只、500只股票进行研究. 表的左列给出了检验的结果.

表1 资产定价模型的个股检验

Table 1 Test of asset pricing models for individual stocks

股票数目N	经济时间		股票数目N	日历时间	
	$J_6(\hat{\gamma})$	5%临界值		$J_6(\hat{\gamma})$	5%临界值
50	397.213 4	1.369 6	50	596.271 5	1.369 6
100	329.754 0	1.269 3	100	547.499 4	1.269 3
200	278.500 0	1.208 1	200	471.279 1	1.208 1
300	243.377 3	1.190 8	300	408.659 0	1.190 8
400	212.069 1	1.192 1	400	387.853 4	1.192 1
500	179.840 0	1.212 3	500	336.080 2	1.212 3

为了减少非系统性风险的干扰，人们往往构建资产组合，对组合进行检验，这里将721个经济日平均分为两个时期. 第1个时期从第1至第360个经济日，第2个时期从第361至第721个经济日. 首先，利用第1个时期的数据估计出个股在此期间的贝塔系数β_{1i}，$i = 1, \cdots, 596$. 按照β_{1i}的大小由小到大将股票平均分成M组，每组股票构建1个组合. 然后，利用第2个时期的数据，对组合进行检验. 表2的左列给出了检验的结果.

分析表1和表2中经济时间的检验结果发现，对资产组合而言，在1%的显著性水平下，经济时间资产定价模型在分组数为10、15和25的情况下是成立的. 而对个股而言，模型不成立，可能的原因在于个股中的非系统性风险太大——对比个股和资产组合的检验值可以发现，构建组合后检验值大大降低.

表2 资产定价模型的组合检验

Table 2 Test of asset pricing models for portfolios

组合数目M	经济时间			组合数目M	日历时间		
	$J_6(\hat{\gamma})$	1%临界值	5%临界值		$J_6(\hat{\gamma})$	1%临界值	5%临界值
10	0.044 8	2.372 0	1.857 9	10	1.550 0	2.372 0	1.857 9
15	0.494 7	2.091 0	1.695 5	15	9.767 9	2.091 0	1.695 5
20	3.878 1	1.932 9	1.601 6	20	20.122 4	1.932 9	1.601 6
25	1.816 9	1.829 4	1.539 1	25	6.476 3	1.829 4	1.539 1
30	3.609 1	1.755 6	1.494 0	30	11.773 3	1.755 6	1.494 0
35	3.453 0	1.700 0	1.459 6	35	9.218 3	1.700 0	1.459 6

4.3 不同时间检验的对比

事实上，对日历时间也可以进行类似的检验，表1和表2的右列分别给出了个股和组合的日历时间检验结果. 对比不同时间的检验结果（表1和表2的左列与右列）发现：

1）在同样的条件（股票数目相同或者组合数目相同）下，不同时间检验的临界值相同. 原因在于，这里所选择的经济时间使得不同时间上的样本个数相同——日历时间上为721个日历日、经济时间上为721个经济日，因此不同时间的检验统计量服从相同的分布，对同一显著性水平有着相同的临界值.

2）不论是对个股还是资产组合而言，随着股票数目 N 和组合数目 M 的增大，虽然不同时间下的 $J_6(\hat{\gamma})$ 都在变化，但是经济时间的 $J_6(\hat{\gamma})$ 值总是远远小于相应的日历时间值.

上述结果说明，在同样的条件下，相对于日历时间模型，经济时间模型的拟合度更高.

5 结束语

为了在更一般的条件下研究时间变换问题，本文放松了从属定义中的独立条件，给出了相关从属的定义. 有了相关从属，就可以研究随机时间与根本过程相关的情形，如价格与成交量的关系. 接着，本文研究了从属过程的扩散性质，并将之应用于经济时间的资产定价问题，得到了与 CAPM 或 APT 类似的结果. 当然，也可以将相关从属应用到其他定价问题，如期权定价，这里就不一一列举了. 必须注意的是，推导中假定存在经济时间上的无风险资产，但在现实中，到目前为止并不存在这种金融产品，因此为了能将上述结果应用于实际，还应该进一步研究如果不存在该种资产时如何进行定价，以及不同时间的定价结果之间的转换关系，例如，如何从经济时间的定价得出日历时间下的定价. 这都是今后值得研究的问题.

参考文献：

[1] 徐正国，张世英. 上海股市“日历效应”的高频估计与检验 [J]. 天津大学学报(社科版)，2005，7(2)：86－89.
Xu Zheng-guo，Zhang Shi-ying. High-frequency estimation and test for calendar effect of Shanghai stock market [J]. Journal of TianJin University(Social Sciences)，2005，7(2)：86－89.(in Chinese)

[2] 吴冲锋，吴文锋. 基于成交量的股价序列分析 [J]. 系统工程理论方法应用，2001，10(1)：1－7.
Wu Chong-feng，Wu Wen-feng. An analysis of volume-based stock price [J]. System Engineering Theory · Methodology · Applications，2001，10(1)：1－7.(in Chinese)

[3] 王承炜，吴冲锋. 中国股市价格—交易量的线性及非线性因果关系研究 [J]. 管理科学学报，2002，5(4)：7－12.
Wang Cheng-wei，Wu Chong-feng. Linear and nonlinear granger causality test of stock price-volume relation：Evidences from Chinese Markets [J]. Journal of Management Sciences in China，2002，5(4)：7－12.(in Chinese)

[4] 吴冲锋，王承炜，吴文锋. 交易量及交易量驱动的股价动力学分析 [J]. 管理科学学报，2002，5(2)：1－12.
Wu Chong-feng，Wang Cheng-wei，Wu Wen-feng. Trading volume and dynamic analytic method based on volume-driving prices [J]. Journal of Management Sciences in China，2002，5(2)：1－12.(in Chinese)

[5] 吴文锋，吴冲锋. 股价的成交量推进进程及其动力学分析 [J]. 上海交通大学学报，2003，37(4)：604－606.
Wu Wen-feng，Wu Chong-feng. Trading volume-driven of stock price and its dynamic analysis [J]. Journal of Shanghai Jiao-tong University，2003，37(4)：604－606.(in Chinese)

[6] Allais M. A restatement of the quantity theory of money [J]. American Economic Review，1966，56(6)：1123－1157.

[7] Barro R. Inflation，the Payments Period，and the Demand for Money [J]. Journal of Political Economy，1970，78(6)：1228－1263.

[8] Bochner S. Harmonic Analysis and the Theory of Probability [M]. Berkeley：University of California Press，1955：91－99.

[9] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications [M]. New York：Wiley and Sons，1971：384－388.

[10] Mandelbrot B，Taylor H M. On the distribution of stock price differences [J]. Operations Research，1967，15(6)：1057－1062.

[11] Clark P. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices [J]. Econometrica，1973，41(1)：135－156.

[12] Ané T，Geman H. Order flow，transaction clock，and normality of asset returns [J]. Journal of Finance，2000，55(5)：2259－2284.

[13] Karpoff J. The relation between price changes and trading volume：A survey [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis，1987，22(1)：109－126.

[14] Gallant A，Rossi P，Tauchen G. Stock prices and volume [J]. The Review of Financial Studies，1992，5(2)：199－242.

[15] Campbell J. Intertemporal asset pricing without consumption data [J]. American Economic Review, 1993, 83(3): 487 – 512.

[16] Lee C, Swaminathan B. Price momentum and trading volume [J]. The Journal of Finance, 2000, 55(5): 2017 – 2069.

[17] Carr P, Wu L. Time-changed Levy processes and option pricing [J]. Journal of Financial Economics, 2004, 71(1): 113 – 141.

[18] Derman E. The Perception of time, risk and return during periods of speculation [J]. Quantitative Finance, 2002, 2(4): 282 – 296.

[19] Campbell J, Lo A, and MacKinlay A. The Econometrics of Financial Markets [M]. Princeton: Princeton University Press, 1997: 196 – 203.

Assets pricing under economic time

YU Dong-hua, *WU Chong-feng*

Antai College of Economics and Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China

Abstract: Economic systems may not evolve evenly in calendar time. So come economic time and time deformation. Although subordination is the most important mathematical method for time deformation, there is a deficiency in the definition. Because it requires that the stochastic time process and the latent process should be independent. It's constraining in practice, because the processes often correlate in this way or that way. In order to model such cases, a new concept of dependent-subordination is proposed here. It generalizes subordination from independence to dependence and can be applied in many circumstances, for example, it can be applied to prices and volumes. In early studies, researchers always choose volume as a stochastic time for price. But now we know that price isn't independent of volume and they are correlated. So, choosing volume as a stochastic time for price isn't appropriate in subordination. But, with the definition of dependent-subordination, volume can be a stochastic time for price. This coincides with the idea that price changes may really be driven by volumes. Next, diffusion properties of dependent-subordination are presented. Finally, assets pricing under economic time is discussed as an application of dependent-subordination. Results are similar to ordinary calendar ones of CAPM and APT.

Key words: time deformation; subordination; CAPM; APT