

基于投影降维技术的期权组合非线性 VaR 模型^①

陈荣达^{1 2}, 吕 轶²

(1. 浙江大学管理学院, 杭州 310058; 2. 浙江财经学院金融学院, 杭州 310018)

摘要: 高维期权组合 VaR 值的计算时间和计算工作量随着市场风险因子维数的增加而迅速增加. 为此, 引入投影降维技术, 用少数几个风险因子来解释高维期权组合总的风险, 并结合快速卷积方法, 建立了基于投影降维技术的市场风险因子呈厚尾分布情形下的期权组合非线性 VaR 模型, 达到减少计算时间和计算工作量的目的, 同时期权组合价值变化的信息又没有太大的损失. 数值结果表明, 投影降维技术能够达到与快速卷积方法、Monte - Carlo 方法差不多的估算精度, 而计算效率明显优于快速卷积方法、Monte - Carlo 方法, 计算时间和计算工作量明显减少.

关键词: 期权组合; 非线性 VaR; 投影降维技术; 快速卷积方法; t 分布

中图分类号: F830 文献标识码: A 文章编号: 1007 - 9807(2012)03 - 0072 - 11

0 引 言

当市场风险因子数目很大时, 度量期权组合风险的计算时间和计算工作量随着市场风险因子维数的增加而迅速增加, 使得建模和数值计算十分的困难(Wiberg^[1]). 这时人们自然想到简化或减少风险因子的维数而对期权组合价值变化的内容又没有太大的损失, 通过度量低维的与其相似的另一期权组合价值变化的函数来实现高维期权组合风险的计算.

由于高维资产所生成的协方差矩阵很庞大, Kercheval^[2]对协方差矩阵进行优化, 从而减少了维度, 大大节约了度量高维资产组合 VaR 值的计算时间. Kreinin 等^[3]、Jorion^[4]假设市场风险因子为多元正态分布, 对高维线性投资组合(不含金融衍生品的投资组合)使用主成分分析法来降维, 即少数几个主要市场风险因子变化方向决定了整个高维线性投资组合的价值变化. 而 Chen

等^[5]使用独立成分分析法进行降维得到外汇资产组合 VaR 值, 该方法是对主成分分析法和因子分析法的扩展, 该方法能够比主成分分析法、因子分析法挖掘到市场风险因子更高阶的信息, 更能够适合具有尖峰厚尾特征的市场风险因子组合的风险度量. Embrechts^[6]研究高维线性投资组合的风险度量时将极值理论和 Copula 函数结合起来降维. 国内学者范龙振等^[7]从我国股票市场上选出少部分股票构造出的组合, 运用主成分分析法可以得出与市场指数一致的收益. 王明进和陈奇志^[8]利用独立成分分析法对高维的市场风险因子的波动率进行估计, 提出了新的多元波动率模型. 郭名媛和张世英^[9]为了解决多个资产的协方差矩阵的预测问题, 提出了基于高频金融数据的正交 ARFIMA 模型, 该模型通过主成分分析法有效地降低了变量的维数, 从而很好地解决了参数估计问题. 上述基于降维技术的投资组合是线性的、不含期权的.

① 收稿日期: 2010 - 02 - 14; 修订日期: 2011 - 04 - 06.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70771099; 71171176), 浙江省哲学社会科学重点研究基地社科规划课题重点资助项目(10JDCZ02Z).

作者简介: 陈荣达(1971—), 男, 浙江温州人, 博士, 教授. Email: rongdachen@163.com

而对非线性投资组合(期权组合)的风险度量,从降维技术的角度,在市场风险因子多元正态分布的假设下,Brummelhuis 等^[10]运用了主成分分析法对期权组合实行降维,该方法的基本思路是先对市场风险因子的协方差矩阵进行 Cholesky 分解,将分解后的矩阵代入反映期权组合价值变化的 Delta - Gamma 模型中,对整理后的 Gamma 项再进行主成分分解,使用几个重要的特征值来近似表示期权组合价值变化。Albanese 等^[11]对由 Delta - Gamma - Theta 近似得到期权组合价值变化的函数以均方误差最小为目标进行最优化处理,得到能保留原来信息又能降维的另一期权组合价值变化的函数,用少量的维数来捕获大部分的风险,从而降低计算 VaR 的时间。以上这些模型是假设市场风险因子为多元正态分布而进行的,而这种假设能够在建模和数值计算中带来许多便利。

然而大量的实证研究指出,大多数市场风险因子的经验分布尾部都要厚过正态分布的尾部,显示出尖峰厚尾性,Kou^[12]、Heyde 和 Kou^[13]、卢方元^[14]、徐绪松和侯成琪^[15]使用了不同方法和数据发现这些高频金融数据表现出正的高峰度和厚尾性,而且这些研究还发现,尽管高级矩(例如 5 级或更高级)可能是无限的,但金融数据的尾部不是厚到以致于产生无限方差,这意味着传统正态分布假设无法完全反映这一特征。

然而,对市场风险因子为多元厚尾分布情形下的期权组合市场风险度量的计算难度与强度都比多元正态情形下复杂,而当市场风险因子数目很大时,计算时间和计算工作量随着维数的增加迅速增加,使得实现起来难度很大。

为此,本文将投影降维技术引入到期权组合非线性 VaR 计算中,将以期权组合价值变化的均方误差最小为目标函数的投影降维技术扩展到厚尾分布情形,在此基础上,假设市场风险因子厚尾特征用 t 分布来描述,并结合快速卷积计算方法。因为卷积计算涉及到各随机变量的边缘发布,这将允许边缘分布的建模与它们的相关结构分开来考虑,大大简化了估计联合随机过程的问题,避开了多元厚尾分布情形下得到期权组合价值变化的

矩母函数解析表达式的困难;从而,建立了基于投影降维技术的市场风险因子为厚尾分布情形下的期权组合非线性 VaR 模型,从而简化或减少市场风险因子的维数而对期权组合价值变化的内容又没有太大的损失,增强其数值计算实现的程序化水平。

1 期权组合非线性 VaR 模型

对期权组合进行二阶 Taylor 展开,得到期权的二次近似 $\Delta - \Gamma - \Theta$ 模型^[16]

$$\Delta V \approx \tilde{\Delta}^T R + \frac{1}{2} R^T \tilde{\Gamma} R + \sum_{i=1}^p \tilde{\Theta}_i \quad (1)$$

其中: ΔV 表示期权组合在特定时期内价值变化;

$$\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_1 \\ \tilde{\Delta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\Delta}_p \end{bmatrix}; \quad \tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_1 \\ \tilde{\Theta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\Theta}_p \end{bmatrix}; \quad \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \tilde{\Gamma}_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\Gamma}_p \end{bmatrix};$$

$$R = (R_{1,t}, R_{2,t}, \dots, R_{p,t})^T;$$

$$\text{矩阵元素: } \tilde{\Delta}_i = a_i \Delta_i; \quad \tilde{\Theta}_i = \frac{a_i t \Theta_i}{S_{i,t}}; \quad \tilde{\Gamma}_i = a_i \Gamma_i S_{i,t};$$

$R_{i,t} = \frac{\Delta S_{i,t}}{S_{i,t}}$, 为市场变量回报。这里: t 为风险度量的预测时段; $S_{i,t}$ 为第 i 个市场变量在时间 t 的值; a_i 为第 i 个期权头寸在时间 t 的市值; $\Delta_i, \Gamma_i, \Theta_i$ 为第 i 个期权对应的金融参数。

由 VaR 的定义及式(1),对于给定的置信水平 α ,可以得到

$$P(\Delta V \leq -\text{VaR}) \approx P(\tilde{\Delta}^T R + \frac{1}{2} R^T \tilde{\Gamma} R + \sum_{i=1}^p \tilde{\Theta}_i \leq -\text{VaR}) = 1 - \alpha \quad (2)$$

假设市场变量向量 R 的多元分布的协方差矩阵为 Σ ,期望向量为 μ ,对 R 进行矩阵变换,利用文献[16 - 17]的思想,可找到一个矩阵 C 把矩阵 $C^T \tilde{\Gamma} C$ 对角化,使得同时成立

$$\begin{cases} \Lambda = C^T \tilde{\Gamma} C \\ \Sigma = C C^T \end{cases} \quad (3)$$

其中 Λ 代表对角矩阵 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 是它的对角线元素的值.

由市场变量向量 R 的多元分布的协方差矩阵 Σ 、期望向量 μ ，定义一个新变换向量 $X = C^{-1}(R - \mu)$ ，且有 $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$ ，则有 $R = \mu + CX$ 。显然经过这样的变换 X 满足 $E[X] = 0, E[XX^T] = 1$ 。于是，式(1) 可变为

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \tilde{\Delta}^T(\mu + CX) + \frac{1}{2}(\mu + CX)^T \tilde{\Gamma}(\mu + CX) + \sum_{i=1}^p \tilde{\Theta}_i \\ &= \sum_{i=1}^p \tilde{\Theta}_i + \tilde{\Delta}^T \mu + \frac{1}{2} \mu^T \tilde{\Gamma} \mu + (\tilde{\Delta}^T + \mu^T \tilde{\Gamma}) CX + \frac{1}{2} X^T \Lambda X \end{aligned} \quad (4)$$

令

$$\Phi = \sum_{i=1}^p \tilde{\Theta}_i + \tilde{\Delta}^T \mu + \frac{1}{2} \mu^T \tilde{\Gamma} \mu,$$

$$a = (\tilde{\Delta}^T + \mu^T \tilde{\Gamma}) C$$

则式(4) 变为

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \Phi + aX + \frac{1}{2} X^T \Lambda X \\ &= \Phi + \sum_{i=1}^p (a_i x_i + \frac{\lambda_i}{2} x_i^2) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 a_i 为向量 a 第 i 个分量。如果知道了 ΔV 的分布函数，那么就能够根据 ΔV 的分布得到期权组合的 VaR 值。

期权组合 VaR 值就是围绕式(5) 通过假设 X 或 x_i 的分布形式，然后运用不同的数值方法进行计算的。

2 投影降维技术

从式(5) 可以看出，如果投资组合的维数 p 比较大，将大大增加投资组合 VaR 值的计算时间。而降维技术的目的就是设法找到一个近似式(5) 中 ΔV 的 $\hat{\Delta V}$ ，且 $\hat{\Delta V}$ 能捕获 ΔV 的大部分特性，但 $\hat{\Delta V}$ 的维数 k 远小于 p ，从而大大节约计算 VaR 值的时间。

由于 $\hat{\Delta V}$ 能用少量的维数 k 捕获期权组合价值变化 ΔV 大部分内容，而不太大损失 ΔV 的信息，下面将采用投影降维技术得到这样的 $\hat{\Delta V}$ 。

设 P 表示由 $p \times k$ 矩阵 Q_1 的正交列向量张成的子空间上的一个投影(P 为 Hermitian 矩阵，又称共轭转置矩阵，且 $P^2 = P$ 成立) P^\perp 表示由 $p \times (p - k)$ 矩阵 Q_2 的正交列向量张成的子空间的一个投影，且 P^\perp 为 P 的正交补，即 P^\perp 由一切与 P 正交的向量组成。

于是，式(5) 中经变换后的风险因子向量 X 就可表示成

$$X = PX + P^\perp X = Q_1 Z_1 + Q_2 Z_2 \quad (6)$$

其中， $PX = Q_1 Z_1, P^\perp X = Q_2 Z_2$ 。这样对风险因子空间进行上面的分解，就可得到期权价值变化 ΔV 的降维近似形式

$$\Delta V(X) \approx \Delta V(PX) = \hat{\Delta V}(Z_1) \quad (7)$$

下面就是设法找到投影 P 使得 ΔV 和 $\hat{\Delta V}$ 的值比较接近。

基于 ΔV 与 $\hat{\Delta V}$ 的均方误差最小，即 $E[(\Delta V - \hat{\Delta V})^2]$ 最小，寻找 $\hat{\Delta V}$ 。

对式(5) 中对角矩阵 Λ 的对角线元素 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 按照 $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}| (i = 1, \dots, p)$ 顺序进行重新排列，并调整对应的式(5) 中风险因子向量 X 中向量元素顺序。再给定容差 $\varepsilon > 0$ ，假设存在一个 k 且满足

$$\sum_{i=k+1}^p \lambda_i^2 \leq \varepsilon \quad (8)$$

再把重新排序后的风险因子向量 X 分成两部分，即 $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ， X_1 为 k 维列向量， X_2 为 $p - k$ 维

列向量，则式(5) 变为

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \Phi + [a_1 \ 0] \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &\frac{1}{2} [X_1^T \ 0] \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \ a_2] \begin{bmatrix} 0 \\ X_2 \end{bmatrix} + \\ &\frac{1}{2} [0 \ X_2^T] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ X_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

其中：向量 $a = [a_1 \ a_2]$ ；对角矩阵 $\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$ ； a_1 的维数与 X_1 的维数、 Λ_1 的列数对应相等， a_2 的维数与 X_2 的维数、 Λ_2 的列数对应相

等. 由于目标是找到 $\widehat{\Delta V}$ 使得 ΔV 与 $\widehat{\Delta V}$ 的均方误差最小, 在式(8) 成立的条件下, A_2 对期权价值变化 ΔV 的贡献比较小, 可以舍弃 A_2 部分来提高计算效率, 同时又不失精度. 但 a_2 那部分可能含有比较重要的信息, 这时如果同时把 a_2 舍弃, 会很影响精度. 为了保持 a_2 所有的信息, 本文作以下的处理. 设 $V = [v_1, V_2]$ 为 $(p-k) \times (p-k)$ 正交矩阵, 其中, $(p-k)$ 维列向量 $v_1 = a_2^T / \|a_2\|_2$, $(p-k) \times (p-k-1)$ 矩阵 V_2 所有列向量与 a_2 正交, 显然也与 v_1 正交. 再定义一个 $(k+1)$ 维列向量 $Z_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ v_1^T X_2 \end{bmatrix}$, 一个 $(p-k-1)$ 维列向量 $Z_2 = V_2^T X_2$, 显然 Z_1 中含有 a_2 所有的信息. 这样, 由投影降维技术, 可得到降维后的期权组合价值变化 $\widehat{\Delta V}$, 即

$$\widehat{\Delta V}(Z_1) = \Phi + [a_1, \|a_2\|_2] Z_1 \Delta V + \frac{1}{2} Z_1^T \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & v_1^T A_2 v_1 \end{bmatrix} Z_1 \quad (10)$$

比较降维后的期权组合价值变化 $\widehat{\Delta V}$ 与 ΔV 的差, 即由式(9) 和(10) 可得到

$$\Delta V - \widehat{\Delta V} = \frac{1}{2} [Z_1^T, Z_2^T] \times \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & v_1^T A_2 v_1 \\ \mathbf{0} & V_2^T A_2 v_1 & V_2^T A_2 V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

同时, 又因为

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{0} & v_1^T A_2 V_2 \\ V_2^T A_2 v_1 & V_2^T A_2 V_2 \end{bmatrix} \right\|_F \leq \|V^T A_2 V\|_F \quad (12)$$

而由 F 范数的性质及 V 为正交矩阵, 有

$$\|V^T A_2 V\|_F = \|V^T A_2\|_F = \|A_2 V\|_F = \|A_2\|_F$$

这样, 式(12) 可变为

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{0} & v_1^T A_2 V_2 \\ V_2^T A_2 v_1 & V_2^T A_2 V_2 \end{bmatrix} \right\|_F \leq \|A_2\|_F \quad (13)$$

令 p 维列向量 $Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$, 如果有 $E[Z_i^2 Z_j^2] \leq$

$\beta (i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, p)$, 即如果风险因子的四阶矩有界, 且这个界为 β , 可得到

$$E[(\Delta V - \widehat{\Delta V})^2] \leq \frac{\rho\beta}{4} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{0} & v_1^T A_2 V_2 \\ V_2^T A_2 v_1 & V_2^T A_2 V_2 \end{bmatrix} \right\|_F^2 \leq \frac{\rho\beta}{4} \|A_2\|_F^2 = \frac{\rho\beta}{4} \sum_{i=k+1}^p \lambda_i^2 \leq \frac{\rho\beta\varepsilon}{4} \quad (14)$$

于是就得到了 $E[(\widehat{\Delta V} - \Delta V)^2]$ 的上界, 即得到了 ΔV 与 $\widehat{\Delta V}$ 的均方误差的上界. 最重要的是, 从式(14) 还可以看出, 当 $\sum_{i=k+1}^p \lambda_i^2$ 比较小时, 即容差 ε 比较小时, 采用投影降维技术得到的期权组合价值变化 $\widehat{\Delta V}$ 比较接近于 ΔV , 即由式(10) 得到的 $\widehat{\Delta V}$ 能够减少市场风险因子的维数而对期权组合价值变化的信息又没有太大的损失.

因此, 给定容差 ε 的值, 由式(8) 可确定降低的维数, 可用式(10) 中的 $\widehat{\Delta V}$ 结合快速卷积方法进行数值计算, 从而求得基于投影降维技术的期权组合 VaR 值. 下面讨论如何把快速卷积方法引入到式(10) 进行数值计算, 求得期权组合 VaR 值.

3 快速卷积方法

快速卷积法的基本思想是假定组合中各市场风险因子的分布, 利用把连续问题离散化的思想, 把各市场风险因子的概率密度函数离散化, 再利用概率分布的快速傅立叶变换计算出期权组合价值变化分布的分位点附近的概率, 然后通过线性插值法计算出相应的 VaR 值.

快速卷积方法进行数值计算的优点在于卷积计算涉及到市场风险因子的边缘分布, 这将允许边缘分布的建模与它们的相关结构分开来考虑, 大大简化了对联合随机过程的估计问题, 避开了多元厚尾分布情形下得到期权组合价值变化的矩母函数解析表达式的困难; 另外, 现有的研究在市场风险因子为多元 t -分布情形时进行期权组合

VaR 值计算时,都假设所有的市场风险因子分布具有一样的自由度(可见文献[17-18]),事实上,不同市场风险因子分布的厚尾程度不一样,自由度也应不同,而把快速卷积方法引入到式(10)进行数值计算时,市场风险因子的厚尾特征用 t -分布来描述时,可允许不同市场风险因子分布对应不同自由度条件下计算出期权组合 VaR 值.这对多元 t -分布情形的期权组合 VaR 数值计算研究方面有很大的突破.

对式(10)进行变换,可得

$$\widehat{\Delta V}(\mathbf{Z}_1) = \Phi + \sum_{i=1}^{k+1} \left(a_i' z_i + \frac{\lambda_i' z_i^2}{2} \right) = \Phi + \sum_{i=1}^{k+1} \pi_i(z_i) \quad (15)$$

其中: $a_i'(i=1, 2, \dots, k+1)$ 对应 $k+1$ 维向量 $[a_1, \|a_2\|_2]$ 第 i 个分量; $\lambda_i'(i=1, 2, \dots, k)$ 为 $k \times k$ 对角矩阵 Λ_1 的对角线元素 $\lambda_{k+1}' = \mathbf{v}_1^T \Lambda_2 \mathbf{v}_1$, $\pi_i = a_i' z_i + \lambda_i' z_i^2 / 2$.

从式(15)中,可以看到 $\widehat{\Delta V}$ 变换成了 $k+1$ 个随机项 π_i 和一个常数项的和.如果知道了 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的分布函数,那么期权组合的 VaR 值就能够根据 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的分布得到.

如果假设式(15)中的 π_i 两两相互独立,它的概率密度函数可以由卷积公式表示出.如果 $p_{\pi_i}(z)$ 表示 $\pi_i(i=1, 2, \dots, k+1)$ 的概率密度函数,则 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的概率密度函数为

$$p_{\widehat{\Delta V} - \Phi} = p_{\pi_1} * p_{\pi_2} * \dots * p_{\pi_{k+1}} \quad (16)$$

其中 $*$ 表示各 π_i 的概率密度函数之间的卷积.

3.1 二次随机变量的概率密度函数

假设式(15)中的风险因子 z_i 的概率密度函数为 p_i ,式(15)中的组合二次随机变量 $\pi_i = a_i' z_i + \lambda_i' z_i^2 / 2$.利用随机变量函数的分布性质,则很容易推导出 π_i 的概率密度函数 p_{π_i} .让 $z_+(u)$ 、 $z_-(u)$ 分别表示方程 $\pi_i(z) - u = 0$ 的两个根,即当 $a_i^2 + 2\lambda_i' u \geq 0$ 时,有

$$z_{\pm}(u) = \frac{-a_i' \pm \sqrt{a_i^2 + 2\lambda_i' u}}{\lambda_i'} \quad (17)$$

又因为 π_i 关于 z_i 是连续可微的,当 $a_i^2 + 2\lambda_i' u \geq 0$ 则有

$$p_{\pi_i}(u) = p_i[z_+(u)] [z_+(u)]' - p_i[z_-(u)] [z_-(u)]' = \frac{p_i[z_+(u)] + p_i[z_-(u)]}{(a_i^2 + 2\lambda_i' u)^{1/2}} \quad (18)$$

其中 $[z_+(u)]'$ 、 $[z_-(u)]'$ 分别表示 $z_+(u)$ 、 $z_-(u)$ 的导数.

最后,可得到 π_i 的概率密度函数为

$$p_{\pi_i}(u) = \begin{cases} 0, & \text{当 } a_i^2 + 2\lambda_i' u < 0 \\ \frac{p_i[z_+(u)] + p_i[z_-(u)]}{(a_i^2 + 2\lambda_i' u)^{1/2}}, & \text{当 } a_i^2 + 2\lambda_i' u \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

从式(19)可看出,假设预先知道风险因子 z_i 的概率密度函数,则该风险因子对应的二次随机变量 π_i 的概率密度函数可由式(19)得到,进而反映期权组合价值变化的 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的概率密度函数可由卷积公式(16)给出,最后可得到期权组合的 VaR 值.

3.2 离散傅立叶变换

为了近似 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的概率密度函数,对 π_i 的概率密度函数 p_{π_i} 进行离散傅立叶变换,利用卷积定理,可得

$$p_{\pi_1} * p_{\pi_2} * \dots * p_{\pi_{k+1}} = \left(\prod_{i=1}^{k+1} \widehat{p}_{\pi_i} \right)^\sim \quad (20)$$

其中,函数 \widehat{f} 表示傅立叶变换, f^\sim 表示傅立叶逆变换.下面讨论如何通过离散傅立叶变换得到期权组合的 VaR 值.

对任一区间 $[-a, a]$,设定有 N 个端点,第 j 个端点的位置满足 $\xi_j = -a + jh(j=0, 1, \dots, N-1, h=2a/N)$.利用单位脉冲函数(δ 函数)把 p_{π_i} 离散,即

$$p_{\pi_i} \approx P_i^D = h \sum_{j=1}^{N-1} p_i^j \delta_j \quad (21)$$

其中: P_i^D 为 π_i 的离散概率密度函数, $p_i^j = \frac{1}{h} \int_{\xi_j - h/2}^{\xi_j + h/2} p_{\pi_i}(u) du$; δ_j 为单位脉冲函数.在本文进行数值计算时,第 1 个端点原来的积分区间为 $[-a - h/2, -a + h/2]$,为了计算方便,取区间 $[-a, -a + h/2] \cup [a - h/2, a]$ 作为第一个端点的区间.

由式(20)可知,可先对 p_{π_i} 进行离散傅立叶

变换 ($i = 1, 2, \dots, k+1$), 再把得到的结果相乘, 最后进行离散傅立叶逆变换计算出反映期权价值变化的 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的概率密度函数 $p_{\widehat{\Delta V} - \Phi}$; 即只要区间 $[-a, a]$ 足够大, 利用卷积定理, 化卷积运算为乘积运算, 能够用下式近似表达出 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的概率密度函数

$$p_{\widehat{\Delta V} - \Phi} = p_{\pi_1} * p_{\pi_2} * \dots * p_{\pi_{k+1}} \approx p_{\widehat{\Delta V} - \Phi}^D = h \sum_{j=0}^{N-1} p_j \delta_j \quad (22)$$

$$p_j = (-1)^{j[(k+1)-1]} h^{(k+1)-1} \prod_{i=1}^{k+1} P_i^j$$

其中: $p_{\widehat{\Delta V} - \Phi}^D$ 表示 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的离散概率密度函数; 序列 $\{P_i^j\}_{j=0}^{N-1}$ 为定义在 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的离散概率密度函数 $p_{\widehat{\Delta V} - \Phi}^D$ 上的序列 $\{p_j\}_{j=0}^{N-1}$ 的离散傅立叶变换系数; 序列 $\{P_i^j\}_{j=0}^{N-1}$ 为定义在 π_i 的离散概率密度函数 p_i^D 上的序列 $\{p_i^j\}_{j=0}^{N-1}$ 的离散傅立叶变换系数。

3.3 计算期权组合的 VaR 值

由式(22)可知, 反映期权价值变化的 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的概率密度函数为 $p_{\widehat{\Delta V} - \Phi}^D = h \sum_{j=0}^{N-1} p_j \delta_j$, 由此, 可得到每个端点 $\Delta V - \Phi$ 的累积分布函数, 即

$$P_{\widehat{\Delta V} - \Phi}(\xi_l) = h \frac{p_0}{2} + h \sum_{j=1}^l p_j, \quad l = 1, 2, \dots, N-1$$

$$P_{\widehat{\Delta V} - \Phi}(\xi_N) = P_{\widehat{\Delta V} - \Phi}(a) = hp_0 + h \sum_{j=1}^{N-1} p_j \quad (23)$$

其中 p_0 为第 1 个端点 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的概率密度函数。式(23)中端点以 ξ_l 的累积分布函数 $P_{\widehat{\Delta V} - \Phi}(\xi_l)$ 表达式中第 1 项为 $hp_0/2$, ξ_N 的累积分布函数 $P_{\widehat{\Delta V} - \Phi}(\xi_N)$ 表达式中第 1 项为 hp_0 , 这是因为第 1 个端点对应的区间 $[-a, -a+h/2] \cup [a-h/2, a]$, 计算时分配半个区间给左端点 $-a$, 分配半个区间给右端点 a 。

由于 $\widehat{\Delta V} - \Phi$ 的累积分布函数是个增函数, 那么在给定的置信水平 $1 - \alpha$ 下, 找到第 l 个端点, 使得成立

$$P_{\widehat{\Delta V} - \Phi}(\xi_l) \leq 1 - \alpha \leq P_{\widehat{\Delta V} - \Phi}(\xi_{l+1})$$

然后, 通过线性插值法得到

$$L_{1-\alpha} = \xi_l + h \left[\frac{(1-\alpha) - P_{\widehat{\Delta V} - \Phi}(\xi_l)}{P_{\widehat{\Delta V} - \Phi}(\xi_{l+1}) - P_{\widehat{\Delta V} - \Phi}(\xi_l)} \right]$$

在给定的置信水平 $1 - \alpha$ 下, 则该期权组合对应的 VaR 值为 $\text{VaR} = -(L_{1-\alpha} + \Phi)$, 其中

$$\Phi = \sum_{i=1}^p \tilde{\Theta}_i + \tilde{\Delta}^T \mu + \frac{1}{2} \mu^T \tilde{\Gamma} \mu$$

4 数值结果与分析

现有一金融机构在 2008 年 12 月 10 日持有一投资组合, 该组合由 13 只权证构成 (组合中每个权证持有 1 份), 它们分别是武钢 CWB1、深高 CWB1、上汽 CWB1、赣粤 CWB1、中远 CWB1、石化 CWB1、上港 CWB1、青啤 CWB1、国电 CWB1、康美 CWB1、宝钢 CWB1、葛洲 CWB1 和江铜 CWB1, 这 13 只权证有关数据及对应的标的股票价格在 2008 年 12 月 10 日收盘价 S_0 见表 1, 数据来源于 RESSET 金融研究数据库 <http://www.resset.cn>。在计算过程中, 对于标的股票的扩股、分红等影响, 各个权证将使用离上一个调整日最近的执行价格和执行比例, 一年期无风险利率设定为 0.0225, 另外, 标的股票的日回报采用对数差分计算。13 只权证对应的标的股票日对数回报的协方差矩阵估计采用 Alexander^[19] 提出的多元 GARCH 模型来估计, 而 Delta、Gamma、Theta 等金融参数值采用陈荣达^[20] 提出的基于 t 分布的外汇期权定价模型变式而得, 计算时并假设 1 年中有 252 个交易日, 各只权证相应的 Delta、Gamma、Theta 等金融参数值见表 2, 其中权证对应的标的股票日对数回报厚尾特征用 t 分布来描述, t 分布的自由度在 Layron 等^[21] 研究的基础上使用矩估计法得到。数值计算给定的容差是 $\varepsilon = 2 \times 10^{-6}$ 。

由表 2 的数据及估计出的这 13 只权证对应的标的股票日对数回报的协方差矩阵, 运用 MATLAB7.6 软件, 可得到式(5)中的对角矩阵 Λ , 即可得到对角矩阵 Λ 的对角线元素的值 $\lambda_1, \dots, \lambda_{13}$ 见表 3。

表 1 各权证及对应的标的股票的收盘价 S_0 Table 1 Each warrant and the closing price S_0 of corresponding underlying stock

权证代码	权证简称	标的资产	标的代码	类别	行权方式	起始日	行权日	行权价	行权比例	S_0
580013	武钢 CWB1	武钢股份	600005	认购	欧式	2007 - 04 - 17	2009 - 04 - 10	9.58	1	6.48
580014	深高 CWB1	深高速	600548			2007 - 10 - 30	2009 - 10 - 23	13.48	1	5.53
580016	上汽 CWB1	上海汽车	600104			2008 - 01 - 08	2009 - 12 - 31	26.97	1	6.5
580017	赣粤 CWB1	赣粤高速	600269			2008 - 02 - 28	2009 - 02 - 16	20.53	1	8.94
580018	中远 CWB1	中远航运	600428			2008 - 02 - 26	2009 - 08 - 19	40.38	0.5	7.41
580019	石化 CWB1	中石化	600028			2008 - 03 - 04	2010 - 02 - 25	19.68	0.5	8.44
580020	上港 CWB1	上港集团	600018			2008 - 03 - 07	2009 - 03 - 02	8.4	1	4
580021	青啤 CWB1	青岛啤酒	600600			2008 - 04 - 18	2009 - 10 - 13	28.32	0.5	20.2
580022	国电 CWB1	国电电力	600795			2008 - 05 - 22	2010 - 05 - 17	7.5	1	6.02
580023	康美 CWB1	康美药业	600518			2008 - 05 - 26	2009 - 05 - 19	10.77	0.5	8.66
580024	宝钢 CWB1	宝钢股份	600019			2008 - 07 - 04	2010 - 06 - 28	12.5	0.5	5.62
580025	葛洲 CWB1	葛洲坝	600068			2008 - 07 - 11	2010 - 01 - 04	9.19	0.5	9.3
580026	江铜 CWB1	江西铜业	600362			2008 - 10 - 10	2010 - 10 - 04	15.44	0.25	13.26

注: S_0 为 13 只权证对应的标的股票价格在 2008 年 12 月 10 日收盘价。

表 2 各权证相应的 Delta、Gamma、Theta 值及标的自由度

Table 2 Delta, Gamma, and Theta values of corresponding warrants and degrees of freedom of the underlyings

权证简称	Delta	Gamma	Theta	对应标的自由度
武钢 CWB1	0.312 0	0.106 4	- 1.713 6	5.249 3
深高 CWB1	0.187 9	0.069 2	- 0.608 5	4.936 3
上汽 CWB1	0.119 6	0.035 4	- 0.536 0	4.959 1
赣粤 CWB1	0.002 7	0.003 3	- 0.049 9	5.027 2
中远 CWB1	0.195 9	0.048 3	- 1.140 3	4.999 6
石化 CWB1	0.079 8	0.042 7	- 0.215 3	5.161 2
上港 CWB1	0.023 7	0.041 7	- 0.159 3	5.026 3
青啤 CWB1	0.109 6	0.028 7	- 0.731 4	5.294 7
国电 CWB1	0.603 6	0.069 0	- 0.785 6	5.279 5
康美 CWB1	0.067 9	0.058 8	- 0.324 6	5.059 7
宝钢 CWB1	0.115 5	0.078 1	- 0.160 3	5.042 9
葛洲 CWB1	0.389 8	0.091 7	- 0.765 1	4.900 2
江铜 CWB1	0.347 8	0.080 6	- 0.475 4	5.089 3

表 3 对角矩阵 A 的对角线元素的值

Table 3 The values of diagonal elements in the diagonal matrix A

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
0.014 765	0.002 631	0.001 891	0.001 253	0.001 071	0.000 786	0.000 67
λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	
0.000 531	0.000 402	0.000 282	0.000 237	0.000 149	0.000 081 9	

注: 对角矩阵 A 的对角线元素 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ 按照 $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}| (i = 1, \dots, 13)$ 进行排序.

由表 3 的数据及给定的容差 ε 式(8) 中的 ε 取 2×10^{-6} , 当 $k = 5$ 时, 可得到

$$\sum_{i=k+1}^{13} \lambda_i^2 = 1.674 9e - 006 < \varepsilon = 2 \times 10^{-6}$$

由上式可知, 降维时使用前面的 5 个风险因子代表变化来解释由 13 个风险因子组成的权证组合的价值变化. 在此基础上, 并运用快速卷积方法进行计算该权证组合的 VaR 值. 在标的股票日对数回报厚尾特征用 t 分布描述情形下, 运用投影降维技术, 利用 MATLAB7.6 软件, 可分别计算出在 90%、91%、92%、93%、94%、95%、96%、97%、98%、99% 置信水平下的该权证组合当前

头寸的 1 日 VaR 值, 得到结果见表 4 和图 1.

为了便于比较, 表 4 和图 1 中还列出了 13 个风险因子组成的权证组合在 t 分布情形下的快速卷积方法(即没使用降维技术)得到的以上各置信水平下的该权证组合当前头寸的 1 日 VaR 值, 以及 13 个风险因子的权证组合在 t 分布情形下的 Monte Carlo 方法模拟 50 000 次得到的以上各置信水平下的该权证组合当前头寸的 1 日 VaR 值.

另外, 表 5 分别列出了以上 3 种方法即投影降维技术、快速卷积方法和 Monte Carlo 模拟方法计算所有置信水平下的该权证组合 VaR 值的运行时间.

表 4 3 种方法计算该权证组合当前头寸的 1 日 VaR 值的比较

Table 4 Comparison of the obtained one - day VaR of the current position of warrants portfolio using three methods

方法	风险因子 t 分布情形下的投影降维技术(5 个风险因子)	风险因子 t 分布情形下的快速卷积方法(13 个风险因子)	风险因子 t 分布情形下的 Monte Carlo 方法(13 个风险因子)
1 日 - 90% 的 VaR	- 10.199	- 10.196	- 10.192
1 日 - 91% 的 VaR	- 10.238	- 10.234	- 10.233
1 日 - 92% 的 VaR	- 10.281	- 10.278	- 10.279
1 日 - 93% 的 VaR	- 10.33	- 10.326	- 10.332
1 日 - 94% 的 VaR	- 10.386	- 10.382	- 10.389
1 日 - 95% 的 VaR	- 10.452	- 10.448	- 10.454
1 日 - 96% 的 VaR	- 10.533	- 10.53	- 10.531
1 日 - 97% 的 VaR	- 10.638	- 10.635	- 10.632
1 日 - 98% 的 VaR	- 10.789	- 10.786	- 10.792
1 日 - 99% 的 VaR	- 11.058	- 11.054	- 11.056

注: 上表中快速卷积法的离散点数为 2 048 个, 离散区间为 $[-18, 18]$; Monte Carlo 模拟方法得到的 VaR 值是经模拟 50 000 次得到.

表 5 三种方法计算该权证组合 VaR 值运行时间比较

Table 5 Comparison of the run time to calculate the VaR of warrants portfolio with three methods

方法	运行时间 /s
风险因子 t 分布情形下的投影降维技术	2.964
风险因子 t 分布情形下的快速卷积方法	37.16
风险因子 t 分布情形下的 Monte Carlo 方法	123.37

注: 数值计算时使用的计算机 Lenovo Thinkpad T400 的硬盘为 200G, 内存为 1G

从表 4 和图 1 可以看出, 在市场风险因子 t 分布情形下, 投影降维技术、快速卷积方法和 Monte Carlo 模拟方法得到的 VaR 值相差不大, 而 Monte Carlo 模拟方法能较好地处理非线性问题, 并且估算精度较高, 说明投影降维技术、快速卷积方法都达到了 Monte Carlo 方法估算精度. 但从表 5 比较投影降维技术、快速卷积方法和 Monte Carlo 模拟方法运行时间可以看出, 投影降维技术与 Monte

Carlo 模拟方法的运行时间相差两个数量级左右,快速卷积方法与 Monte Carlo 模拟方法的运行时间相差一个数量级左右,即使用投影降维技术、快速卷积方法运行时间明显少于 Monte Carlo 模拟方法,其中投影降维技术的运行时间最少,说明在估算精度相差不大的前提下,投影降维技术计算速度明显快于快速卷积方法,而快速卷积方法计算速度又明显快于 Monte Carlo 模拟方法,即投影降维技术计算效率高于快速卷积方法,快速卷积方法计算效率高于 Monte Carlo 模拟方法,这是因为投影降维技术用前面 5 个主要风险因子变化来解释由 13 个风险因子组成的权证组合的价值变化,并运用快速卷积方法进行计算该权证组合的 VaR 值,大大减少了计算工作量,而 Monte Carlo 模拟方法需要产生大量的样本,这增加了计算时间和工作量,影响了计算

效率.

另外,为了判断投影降维技术、快速卷积方法和 Monte Carlo 模拟方法得到的 VaR 值的准确度,本文进行一段时间动态 VaR 的 Backtesting 检验,采用了 Kupiec^[22] 提出的似然比率检验方法.该方法主要用于检验 VaR 计算结果对实际损失的覆盖程度,用于说明模型是否准确.当实际损失值超过 VaR 的估计时,记为一次失败,而实际损失值低于 VaR 值,则记为成功.假定 VaR 估计具有时间独立性,则失败观察的结果代表了一系列独立的贝努里试验.原假设 $H_0: p = \alpha$ 成立($1 - \alpha$ 为置信水平),那么该种 VaR 估计方法是可行的.检验样本的空间为该权证组合从 2008 年 12 月 10 日至 2009 年 5 月 10 日的数据.表 6 列出了 Kupiec 检验所得到的似然比(LR) (如果 $LR > \chi^2_{\alpha}(1)$ 则拒绝这一原假设).

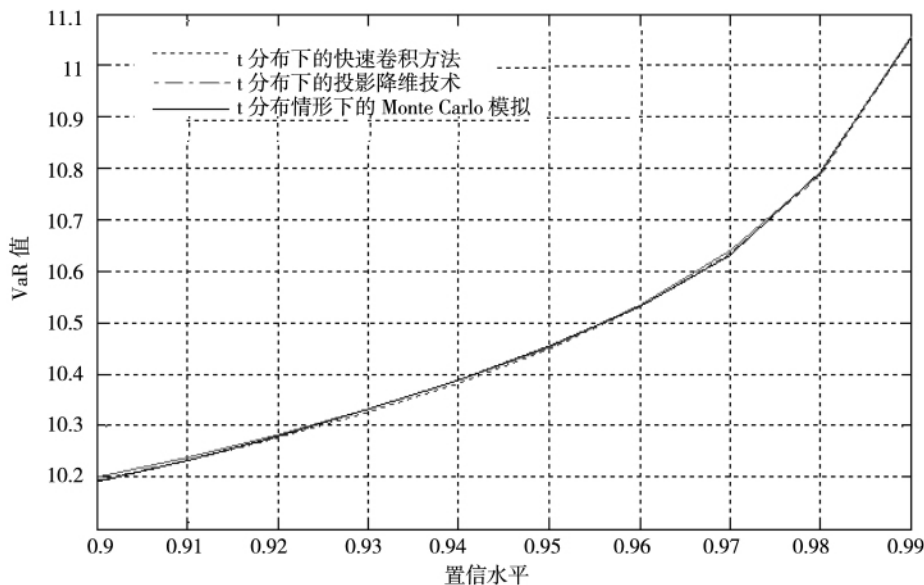


图 1 投影降维技术、快速卷积方法和 Monte Carlo 模拟方法得到的 VaR 值对比

Fig. 1 Comparison of the obtained VaR using projection dimension reduction technique, fast convolution method and Monte Carlo simulation method

表 6 95% 置信度下 Kupiec 检验指标值

Table 6 Index value of Kupiec test under 95% - confidence level

方法	似然比(LR)
风险因子 t 分布情形下的投影降维技术(5 个风险因子)	1.407 707*
风险因子 t 分布情形下的快速卷积方法(13 个风险因子)	1.407 707*
风险因子 t 分布情形下的 Monte Carlo 方法(13 个风险因子)	0.636 401*

注: * 表示接受原假设 $\chi^2_{0.05}(1)$ 为 3.841 5.

从表 6 可以看出,以上 3 种方法都通过了 Kupiec 检验,即接受原假设,从而说明投影降维技术、

快速卷积方法、Monte Carlo 模拟方法得到的 VaR 值的准确度都是可行的,但投影降维技术计算效率明显优于快速卷积方法和 Monte Carlo 方法。

5 结束语

当期权组合包含市场风险因子数目很大时,计算期权组合 VaR 值的时间和工作量随着市场风险因子数目的增加而迅速增加。为此,本文引入投影降维技术,在期权组合价值变化二次近似模型基础上实行降维,从而减少市场风险因子的维

数而对期权组合价值变化的内容又没有太大的损失。在此基础上,假设市场风险因子厚尾特征用 t 分布来描述,引入了快速卷积方法得到期权组合的 VaR 值。数值结果表明,投影降维技术能够达到与快速卷积方法、Monte Carlo 方法差不多的估算精度,但投影降维技术计算效率明显优于快速卷积方法、Monte Carlo 方法,计算时间和计算工作量明显减少。

可见,投影降维技术非常适合高维的投资组合,能够大大节约计算时间,又不损失期权组合价值变化的信息。

参考文献:

- [1] Wiberg P. Computation of Value-at-Risk: The Fast Convolution Method, Dimension Reduction and Perturbation Theory [D]. University of Toronto, Canada, 2002.
- [2] Kercheval A. Optimal covariances in risk model aggregation [C] // Proceedings of the Third IASTED International Conference on Financial Engineering and Applications. Calgary: ACTA Press, 2006: 30 - 35.
- [3] Kreinin A, Merkoulouvitsh L, Rosen D, et al. Principal component analysis in quasi Monte Carlo simulation [J]. Algo Research Quarterly, 1998, 1 (2): 21 - 30.
- [4] Jorion P. Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk (3th edition) [M]. New York: McGraw-Hill Professional, 2006.
- [5] Chen Y, Hardle W, Spokoiny V. Portfolio value at risk based on independent components analysis [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 205(1): 594 - 607.
- [6] Embrechts P. Linear correlation and EVT: Properties and caveats [J]. Journal of Financial Econometrics, 2009, 7(1): 30 - 39.
- [7] 范龙振, 王海涛, 何华. 我国股票市场指数及指数证券投资组合 [J]. 管理科学学报, 2002, 5(5): 11 - 17.
Fan Longzhen, Wang Haitao, He Hua. Stock indexes and indexing portfolios in China stock markets [J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(5): 11 - 17. (in Chinese)
- [8] 王明进, 陈奇志. 基于独立成分分解的多元波动率模型 [J]. 管理科学学报, 2006, 9(5): 56 - 64.
Wang Mingjin, Chen Qizhi. Multivariate volatilities modeling based on independent components [J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(5): 56 - 64. (in Chinese)
- [9] 郭名媛, 张世英. 基于高频金融数据的正交 ARFIMA 模型及应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(11): 74 - 79.
Guo Mingyuan, Zhang Shiyong. Orthogonal ARFIMA model based on high frequency data [J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2008, 28(11): 74 - 79. (in Chinese)
- [10] Brummelhuis R, Cordoba A, Quintanilla M, et al. Principal component value at risk [J]. Mathematical Finance, 2002, 12(1): 23 - 43.
- [11] Albanese C, Jackson K, Wiberg P. Dimension reduction in the computation of value-at-risk [J]. Journal of Risk Finance, 2002, 3(4): 41 - 53.
- [12] Kou S G. A jump-diffusion model for option pricing [J]. Management Science, 2002, 48(8): 1085 - 1097.
- [13] Heyde C C, Kou S G. On the controversy over tailweight of distributions [J]. Operations Research Letters, 2004, 32(5): 399 - 408.
- [14] 卢方元. 中国股市收益率胖尾性分析 [J]. 系统工程理论方法应用, 2005, 14(4): 350 - 352.
Lu Fangyuan. Analysis on fat tail characteristics of stock market returns in China [J]. Systems Engineering Theory • Methodology • Applications, 2005, 14(4): 350 - 352. (in Chinese)

- [15]徐绪松,侯成琪. 非正态稳定分布条件下的投资组合模型:均值-尺度参数模型[J]. 系统工程理论与实践,2006,26(9):1-9.
Xu Xusong, Hou Chengqi. A portfolio selection model conditional on non-normal stable distributions: Mean-scale parameter model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2006, 26(9): 1-9. (in Chinese)
- [16]陈荣达. 基于 Delta-Gamma-Theta 模型的外汇期权风险度量[J]. 系统工程理论与实践,2005,25(7):55-60.
Chen Rongda. Risk measure of FX options based on Delta-Gamma-Theta model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2005, 25(7): 55-60. (in Chinese)
- [17]陈荣达,马庆国,孙元. 基于汇率回报厚尾性的外汇期权组合非线性 VaR 模型[J]. 管理工程学报,2009,23(3):115-119.
Chen Rongda, Ma Qingguo, Sun Yuan. Measure model of non-linear VaR about FX options portfolio based on heavy-tailed exchange rate returns[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2009, 23(3): 115-119. (in Chinese)
- [18]Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering[M]. New York: Springer-Verlag, 2004.
- [19]Alexander C. Principal component models for generating large GARCH covariance matrices[J]. Economic Notes, 2002, 31(2):337-359.
- [20]陈荣达. 基于汇率回报厚尾性的外汇期权定价模型[J]. 运筹与管理,2006,15(3):137-140.
Chen Rongda. Foreign currency options pricing model with heavy-tailed exchange rate return[J]. Operations Research and Management Science, 2006, 15(3): 137-140. (in Chinese)
- [21]Layron G G, Marhuenda P G, Dato J F D. Normal Versus Student in Measuring Value at Risk: An Empirical Bayesian Overview[R]. Universidad de Castilla La Mancha, 1998.
- [22]Kupiec P. Technique for verifying the accuracy of risk measurement models[J]. Journal of Derivatives, 1995, 3(2):73-84.

Nonlinear VaR model of options portfolio based on projection dimension reduction technique

CHEN Rong-da^{1,2}, LV Yi²

1. School of Management, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;

2. School of Finance, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018, China

Abstract: To obtain VaR of options portfolio with many dimensions, the calculation time and effort increases rapidly when market risk factors increase. For this reason, the paper introduces a projection dimension reduction technique to compute VaR of the options portfolio, which uses a few risk factors to explain the total risk of the options portfolio with many dimensions. Moreover, the paper combines it with a fast convolution method, and establishes nonlinear VaR model of options portfolio based on projection dimension reduction technique with market risk factors having heavy-tailed distributions. As a result, the computation time and effort have been largely reduced, however, the information of the change in the options portfolio value has almost not been lost. Numerical results show that computational accuracy using projection dimension reduction technique is slightly different with that of fast convolution method or Monte Carlo simulation method. However, projection dimension reduction technique is more efficient than the fast convolution method or Monte Carlo simulation method of calculation, as its computation time and effort are significantly reduced.

Key words: options portfolio; nonlinear VaR; projection dimension reduction technique; fast convolution method; t distribution