

基于 Fréchet Copula 的欧式脆弱期权定价^①

李平¹, 曲博¹, 黄光东²

(1. 北京航空航天大学经济管理学院, 北京 100191;

2. 中国地质大学(北京)信息工程学院, 北京 100083)

摘要: 运用 Fréchet Copula 和相关性测度 Kendall τ 来刻画脆弱期权行权概率与对手方违约之间的相关结构, 并给出了欧式脆弱看涨期权价格的闭形式表达式. 然后由 Kendall τ 和标的资产价格与执行价格比率的不同数值, 对欧式脆弱看涨期权的价格进行了数值计算和敏感性分析. 结果表明, 随着 τ 值的增加和标的资产价格与执行价格比率的降低, 欧式脆弱看涨期权的价值相应地呈下降趋势, 这与理论结果和实际都是相符的.

关键词: 脆弱期权; Fréchet Copula, Kendall τ ; 期权价值缩水幅度

中图分类号: F830 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2012)04-0023-08

0 引言

近年来场外市场 (OTC Market) 发展非常迅速, 但由于在 OTC 交易的期权不受交易所的保护, 期权多头易暴露于市场风险和对手方的信用风险两种风险下: 随着期权标的资产价值的变动, 市场风险增加, 而对手方的信用风险则随着期权实值幅度的增加而增大. 因此, 与场内期权不同, OTC 市场中期权的持有者面临着对手方可能违约的风险, Johnson 和 Stulz^[1] 将这种期权称之为脆弱期权.

以 2007 年初美国新世纪金融公司宣布申请破产保护为标志的全球性金融危机, 使我们意识到了对含有对手方风险的金融产品进行合理定价的重要性. 此次金融危机起初是由于在低利率环境下, 放贷人一味追求放贷数量而忽视质量引发的, 但是在危机的蔓延以及扩散过程中, 对手方违约风险扮演了重要的角色: 在危机出现前, 对衍生产品的定价并没有考虑对手方可能违约的风险, 而各类投资者也偏向于高估衍生产品的价

格; 危机出现后, 由于对手方存在可能违约的风险, 导致金融衍生产品价格暴跌, 最终使投资者和市场都失去了信心, 从而进一步放大了损失. 所以, 这次金融危机最终演变成了由于对手方违约风险的存在, 而使各个市场间出现了联动性恐慌的信心危机. 虽然我国由于资本开放受到限制, 并且商业银行的国内业务发展迅速, 我国金融体系在这次危机中所受影响有限, 但是随着全球金融一体化进程的加剧、我国金融业的逐渐开放, 需要对金融产品的设计原理、定价机制以及可能存在的风险做更深入的分析 and 研究. 因此, 正确评估场外交易市场上含有对手方风险的期权的价格, 可以从金融技术角度对我国金融风险管理及金融市场的健康发展提供支持.

关于对手方违约风险的研究最经典的工作当属 Jarrow 和 Yu^[2]. 金融风暴以后, 相关方面的研究层出不穷, 如 Jorion 和 Zhang^[3] 研究了对手方风险和信用传染之间的关系, Leung 和 Kwok^[4] 及 Brigo 和 Chourdakis^[5] 研究了对手方风险和信用违约互换 (CDS) 价格的关系, 叶五一

① 收稿日期: 2009-03-10; 修订日期: 2011-09-28.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70971006; 70831001).

作者简介: 李平(1972—), 女, 湖北人, 副教授. Email: liping124@buaa.edu.cn

和缪柏其^[6]应用 Copula 变点检测方法研究了美国次级债金融危机传染问题,乌画等人^[7]则应用多元随机波动模型讨论了违约风险和多元衍生产品定价问题。

第一篇研究脆弱期权定价的论文是 Johnson 和 Stulz, 他们的工作是 Merton^[8] 期权定价模型的一个扩展。但 Johnson 和 Stulz 假设当对手违约时, 期权持有人将会获得对手方的全部资产, 而这份期权也是对手方的唯一负债。显然这样的假设与实际商业环境是不符的, 因此 Hull 和 White^[9] 假设对手方还拥有其他同级别的负债, 然后扩展了 Johnson 和 Stulz 的模型。Klein^[10] 则考虑了期权标的资产与对手方资产的线性相关性, 并给出了欧式脆弱期权价格的闭形式解; Hung 和 Liu^[11] 及 Chang 和 Hung^[12] 分别将 Klein 的工作推广至不完全市场和美式脆弱期权情形; 国内的陈超^[13] 则研究了当标的资产价格服从跳-扩散过程时的脆弱期权定价问题。

由于违约事件与标的资产价格的变化有着密切的关系, 而且违约概率也会随标的资产价格的变化而发生变化, 因此在对脆弱期权进行定价时, 标的资产价格与对手方违约之间的相关性成为定价的关键。Klein 在其论文中应用传统线性相关系数来刻画这种相关性。但鉴于线性相关系数刻画相关性的不足 (详见文献 [14]), 越来越多的研究者开始采用 Copula 函数来刻画变量之间的相关性, 并将之应用于金融的各个领域, 如风险管理^[15]、多资产期权定价^[16,17]、市场相关性分析^[18] 及多元信用产品定价^[19,20] 等。Cherubini 等人^[21] 给出了应用一般的 Copula 函数刻画违约事件与标的资产价格之间的相关性, 进而对脆弱期权进行定价的一般思路。本文将在他们的基础上, 运用一类具体的 Copula 函数——Fréchet Copula 来刻画易违约期权的行权与违约事件之间的相关结构, 然后采用 Breeden 和 Litzenberger^[22] 的隐含概率法给出欧式脆弱看涨期权价格的显式表达式, 并进行数值计算和敏感性分析。

1 Kendall τ 及 Fréchet Copula 族

在单调递增变换下, Copula 函数的形式保持

不变, 由此可以得到连续随机变量间相关性测度的一个重要性质: 由 Copula 函数导出的相关性测度, 在严格单调增变换下保持不变, 从而比线性相关系数的适用性强。本节将对定价中要用到的相关性测度 Kendall τ , 以及 Fréchet Copula 函数族进行简要的介绍。

1.1 Kendall τ

令 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 为两个独立同分布随机向量, 联合分布为 H , Kendall τ 定义为两个向量一致 (concordant) 的概率和不一致 (discordant) 的概率的差, 即

$$\tau = \Pr [(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \Pr [(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (1)$$

由此可以看出, Kendall τ 度量了向量 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 的一致性程度。若二者具有相同的 Copula 函数 C 则可以证明

$$\tau = 4 \iint C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (2)$$

而且, $-1 \leq \tau \leq 1$ 。当考虑连续随机变量时, τ 的上界对应于共单调: 当且仅当 C 为极大 Copula, 即 $C = C^+ = \min(u, v)$ 时 $\tau = 1$; 下界对应于反单调: 当且仅当 C 为极小 Copula, 即 $C = C^- = \max(u + v - 1, 0)$ 时 $\tau = -1$; 而当 C 为乘积 Copula, 即 $C = C^\perp = u \times v$ 时 $\tau = 0$ 。很显然, 对单调增函数 f 和 g , 有

$$(f(x_1) - f(x_2))(g(y_1) - g(y_2)) > 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0 \quad (3)$$

因此, τ 值对严格单调增变换保持不变。这是 τ 作为随机变量间相关性测度的一个重要优点。

1.2 Fréchet Copula 族

Fréchet^[23] 于 1958 年提出了下面的两参数 Copula 族

$$\begin{aligned} C^F(u, v) &= p \max(u+v-1, 0) + (1-p-q)uv + q \min(u, v) \\ &= pC^- + (1-p-q)C^\perp + qC^+ \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $p, q \in [0, 1], p+q \leq 1$ 。

Fréchet Copula 族的参数与 Kendall τ 的关系为

$$\tau = \frac{(q-p)(2+p+q)}{3} \quad (5)$$

当假设参数 $p = 0$ (对应于正相关情形) 或者

$q = 0$ (对应于负相关情形) 时, Fréchet Copula 族就简化为混合 Copula (Mixture Copula)

$$C_q^M(u, v) = (1 - q)uv + q \min(u, v) \\ = (1 - q)C^\perp + qC^+ \quad (6)$$

$$C_p^M(u, v) = (1 - p)uv + p \max(u + v - 1, 0) \\ = (1 - p)C^\perp + pC^- \quad (7)$$

混合 Copula 的参数与 Kendall τ 的关系如下

$$\text{正相关时}(p = 0), \tau = \frac{q(2 + q)}{3};$$

$$\text{负相关时}(q = 0), \tau = \frac{-p(2 + p)}{3}$$

2 基于 Copula 的脆弱期权定价模型

2.1 期权定价的隐含波动率法

按照 Breeden 和 Litzenberger 通过获取隐含概率分布对未定权益进行定价的方法, 可以对脆弱期权进行定价. 由于欧式脆弱看涨期权与欧式脆弱看跌期权在定价原理以及数值计算上相似, 因此本文仅以欧式脆弱看涨期权为例.

用 r 表示无风险利率, $(T - t)$ 为期权剩余有效期, K 和 $S(T)$ 分别表示期权的执行价格和期权到期时标的资产的价格, 则风险中性概率测度下普通欧式看涨期权的价格, 记为 EC , 可以表示为

$$EC = \exp[-r(T - t)] E_Q [\max(S(T) - K, 0)] \quad (8)$$

对 K 求偏导得

$$\frac{\partial EC}{\partial K} = -\exp[-r(T - t)] \bar{Q}(K) \quad (9)$$

其中 $\bar{Q}(K) = \Pr[S(T) \geq K]$ 为生存概率分布. 所以欧式看涨期权的价格 EC 可通过下式获得

$$EC = \exp[-r(T - t)] \int_K^\infty \bar{Q}(k) dk \quad (10)$$

2.2 基于 Copula 的欧式脆弱期权定价模型

类似于 Cherubini 等人, 从最简单的数字看涨期权开始分析. 所谓的数字看涨期权, 指的是具有下面支付结构的期权: 期权到期时如果标的资产的价格高于执行价格, 则期权的价值为 1, 否则为 0.

进一步地, 考虑一个由具有违约风险的对

方 A 发行的脆弱数字期权, 其支付结构如下

$$\begin{cases} 1, & \text{期权为实值且对手 A 不违约} \\ R, & \text{期权为实值且对手 A 违约} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 R 为发行方 A 违约时标的债券在时刻 T 的回收率. 假设公司 A 的违约概率为 G , 违约损失 $lgd = 1 - R$, 预期损失 $El = lgd \times G$.

由上可以看出, 脆弱数字期权的定价问题可以看作一个二元变量关系, 因为其到期时的价值取决于两个事件: 一个是期权到期时为实值 (in-the-money), 另一个是对手方不违约, 以及二者之间的相关性. 于是可以将到期时的样本空间划分为以下四种情形.

表 1 脆弱期权的样本空间分割

Table 1 Partition of the sample space for the vulnerable digital option

	情形 H	情形 L
情形 H	$S_T \geq K$ 不违约	$S_T \geq K$ 违约
情形 L	$S_T < K$ 不违约	$S_T < K$ 违约

因此, 对于欧式脆弱看涨期权而言, 只有在 HH 和 HL 两种情形才会有现金流发生. 假设用无违约零息债券的价格 $B(T) = e^{-r(T-t)}$ 为贴现因子, 则可以给出欧式脆弱数字看涨期权价格 $VEDC$ 的基本形式

$$VEDC = B^{-1}(T) [C_{HH}(\bar{Q}, \bar{G}) + R \times C_{HL}(\bar{Q}, \bar{G})] \quad (11)$$

其中 $C_{HH}(\bar{Q}, \bar{G})$ 为期权实值且无违约的概率, 相应地 $C_{HL}(\bar{Q}, \bar{G})$ 为期权实值且违约的概率. 因为 $C_{HH}(\bar{Q}, \bar{G}) = \bar{Q} - C_{HL}(\bar{Q}, \bar{G})$, 所以有

$$VEDC(k) = B^{-1}(T) [\bar{Q}(k) - (1 - R) C_{HL}(\bar{Q}(k), \bar{G})] \quad (12)$$

根据 Breeden 和 Litzenberger 的思想, 任何期权的价格都可以看作其相应数字期权价格的积分和. 因此欧式脆弱看涨期权 VEC 的价格可以由 $VEDC$ 积分得到

$$VEC = \int_K^\infty VEDC(k) dk = \int_K^\infty [B^{-1}(T) \bar{Q}(k) - B^{-1}(T) (1 - R) C_{HL}(\bar{Q}(k), \bar{G})] dk \quad (13)$$

结合公式(10) 有

$$VEC = EC - B^{-1}(T)(1-R) \int_K^{\infty} C_{HL}(\bar{Q}, G) dk \tag{14}$$

其中

$$B^{-1}(T)(1-R) \int_K^{\infty} C_{HL}(\bar{Q}, G) dk \tag{15}$$

即是对手方风险. 因此, 脆弱期权的价格即等于无违约期权的价格减去对手方风险.

2.3 基于 Fréchet Copula 的欧式脆弱期权定价模型

一般情况下, 式(14)中的积分难以求得闭形式解, 因为很难显式刻画期权实值和对手方违约之间的相关结构. 但通过分析一些特殊的相关结构, 可以应用 Fréchet Copula 给出相应欧式脆弱期权的价格.

1) 期权实值与对手方违约相互独立

当期权实值与对手方违约相互独立时, 由式(14)和乘积 Copula, 可以直接得出欧式脆弱期权的价格

$$VEC = EC - B^{-1}(T)(1-R) \int_K^{\infty} \bar{Q}(k) G dk = EC [1 - G(1-R)] \tag{16}$$

2) 期权实值与对手方违约完全正相关

当期权实值与对手方违约完全正相关时, 式(14)中的 C_{HL} 对应于极大 Copula, 此时可以应用极大 Copula 对脆弱期权进行定价.

首先定义 $K^* = \bar{Q}^{-1}(G)$, 它是使得易违约看涨期权的执行概率与对手方违约概率相等的执行价格. 在大多数情况下, 违约概率小于期权执行概率, 从而一般有 $K < K^*$. 因此由式(14)和(10)可得

$$\begin{aligned} & B^{-1}(T)(1-R) \int_K^{\infty} C_{HL}(\bar{Q}, G) dk \\ &= B^{-1}(T)(1-R) \int_K^{\infty} \min(\bar{Q}, G) dk \\ &= B^{-1}(T)(1-R) \left[\int_K^{K^*} G dk + \int_{K^*}^{\infty} \bar{Q} dk \right] \\ &= B^{-1}(T)(1-R) (K^* - K) G + (1-R) EC(K^*) \end{aligned} \tag{17}$$

此时欧式脆弱期权的价格为

$$VEC = EC - B^{-1}(T)(1-R) (K^* - K) G + (1-R) EC(K^*) \tag{18}$$

而对手方风险可以通过计算 $B^{-1}(T)(1 -$

$R)(K^* - K)G - (1-R)EC(K^*)$ 得到.

而在 K 大于 K^* 时, 应用极大 Copula 类似可得

$$\begin{aligned} & B^{-1}(T)(1-R) \int_K^{\infty} \min(\bar{Q}, G) dk = \\ & B^{-1}(T)(1-R) \int_K^{\infty} \bar{Q} dk = (1-R) EC \end{aligned} \tag{19}$$

此时欧式脆弱看涨期权的价格 $VEC = R \times EC$.

将上面两种情形综合起来, 可以得到期权实值与对手方违约完全正相关时的闭形式解

$$VEC = EC - \max(K^* - K, 0) \times B^{-1}(T)(1-R)G - (1-R)EC(\max(K, K^*)) \tag{20}$$

3) 期权实值与对手方违约完全负相关

当期权实值与对手方违约完全负相关时, 式(14)中的 C_{HL} 对应于极小 Copula, 此时可以应用极小 Copula 对脆弱期权进行定价.

首先定义 $\bar{K} = \bar{Q}^{-1}(1-G)$, 它是使得易违约看涨期权的执行概率等于对手方生存概率的执行价格. 正如上文提到的, 大多数情况下生存概率大于行权概率, 即 $\bar{K} < K$. 此时, 易违约欧式看涨期权的价格就是 EC .

而在 $\bar{K} > K$ 时, 应用极小 Copula 可得

$$\begin{aligned} & B^{-1}(T)(1-R) \int_K^{\infty} \max(\bar{Q} + G - 1, 0) dk \\ &= B^{-1}(T)(1-R) \int_K^{\bar{K}} (\bar{Q} + G - 1) dk \\ &= B^{-1}(T)(1-R) \left[\int_K^{\bar{K}} \bar{Q} dk - \int_K^{\bar{K}} \bar{Q} dk + \int_K^{\bar{K}} G dk - (\bar{K} - K) \right] \\ &= (1-R) [EC - EC(\bar{K}) + B^{-1}(T) \times (\bar{K} - K) \times (G - 1)] \end{aligned} \tag{21}$$

此时欧式脆弱期权的价格为

$$VEC = R \times EC + (1-R) EC(\bar{K}) + B^{-1}(T) \times (\bar{K} - K) \times (G - 1) \tag{22}$$

将上面两种情形综合起来, 可以得到期权实值与对手方违约完全负相关时的闭形式解

$$VEC = R \times EC + (1-R) \times EC(\max(K, \bar{K})) - \max(\bar{K} - K, 0) \times B^{-1}(T) \times (G - 1) \tag{23}$$

将上述三种情形综合起来, 可以得到 Fréchet Copula 形式下的欧式脆弱看涨期权价格更一般的闭形式解

$$VEC = \begin{cases} (1-q) EC \times [1-G(1-R)] + q [EC - \\ \max(K^* - K \rho) \times B^{-1}(T) (1-R) G - \tau \in [0, 1) \\ (1-R) EC(\max(K, K^*))], \\ (1-p) EC [1-G(1-R)] + p [R \times EC + \\ (1-R) EC(\max(K, \bar{K})) - \tau \in (-1, 0)] \\ \max(\bar{K} - K \rho) B^{-1}(T) (G-1)] \end{cases} \quad (24)$$

3 数值计算

下面用一个数值例子来说明. 假设标的资产服从对数正态分布, 欧式脆弱看涨期权的执行概率为 \bar{Q} .

在脆弱期权定价中, 经常用期权价值缩水幅度 (reduction in option's value) 来刻画由于违约风险的变化所引起的期权价格的变化. 在此处的数值算例中, 用标的资产价格 S 与期权执行价格 K 的比率 S/K 保持不变时期权最大值与最小值的差额来表示这种缩水幅度.

给定参数值: $S = 40$, 无风险利率 $r = 10\%$, 期权到期日 $T = 4$, 标的资产波动率 $\sigma = 0.2$, 标的债券回收率 $R = 0.29$, 对手方违约概率 $G = 0.3$, 不同的 Kendall τ 和 S/K 比率, 由式 (24) 可以求得欧式脆弱看涨期权不同情形下的价格, 如表 2 和图 1 所示. 图 2 则给出了期权价值缩水幅度随 S/K 比率变化的曲线.

表 2 不同 S/K 值与 τ 下的欧式脆弱看涨期权价格

Table 2 Prices of a European vulnerable call option under different S/K and τ

Kendall τ	标的资产与执行价格的比率(S/K)						
	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6
1	0.275 1	1.337 9	2.789 8	5.122 9	7.959 3	10.200 5	12.011 9
0.5	0.472 6	2.298 4	4.792 7	7.679 7	10.578 3	12.840 4	14.660 0
0.25	0.594 3	2.890 5	6.027 2	9.255 6	12.192 7	14.468 2	16.292 3
0	0.746 5	3.630 9	7.571 0	11.226 4	14.211 5	16.503 4	18.333 5
-0.25	0.811 8	4.077 3	9.744 2	14.169 3	17.560 8	20.097 4	22.099 8
-0.5	0.863 9	4.434 4	11.482 0	16.522 5	20.239 0	22.971 3	25.111 4
-1	0.948 6	5.013 6	14.301 3	20.340 4	24.584 0	27.633 9	29.997 4

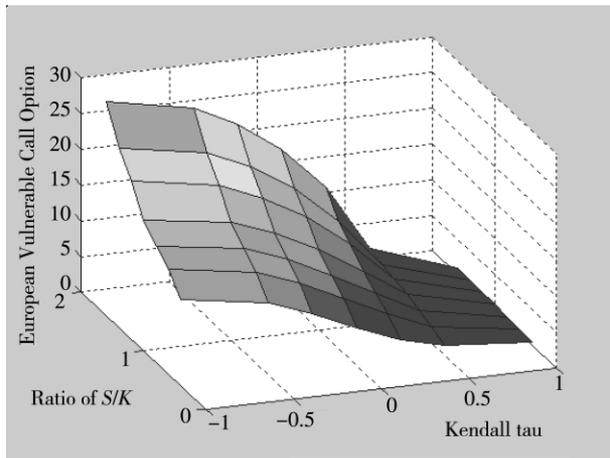


图 1 Kendall τ 与 S/K 比率对欧式脆弱看涨期权价格的影响
Fig. 1 Influence of Kendall τ and S/K to the price of European vulnerable call option

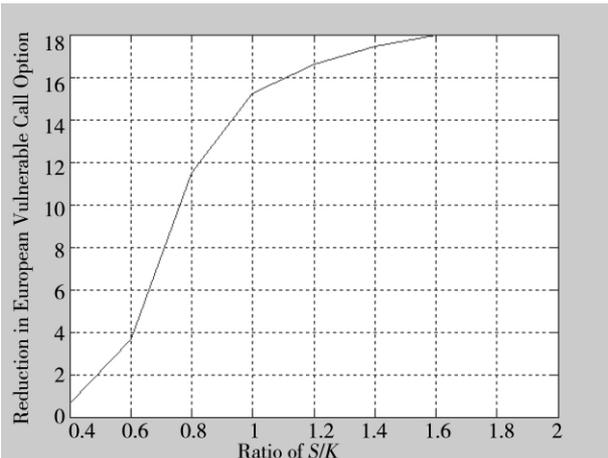


图 2 S/K 比率对期权价值缩水幅度的影响
Fig. 2 Influence of S/K to the reduction in option's value

由表2和图1可以看出,随着 Kendall τ 的增大,欧式脆弱看涨期权的价格越来越小,这和我们的直观是一致的.因为 Kendall τ 刻画了对手方违约与期权实值二者变化的一致性程度, τ 越大,说明期权实值的幅度大时,对手方违约的概率也增加,从而期权的价格就越低.另一方面,表2和图1显示,随着标的资产价格与执行价格比率(S/K)的减小,欧式脆弱看涨期权的价格减小,这与理论是相符的:标的资产价格的下跌或执行价格的上涨会降低欧式看涨期权的价格.图2进一步佐证了上述结论:欧式脆弱看涨期权价格的缩水幅度,即违约风险所导致的欧式看涨期权价值的减小,随着 S/K 比率的增大而增大.在期权深度实值(deep in-the-money)时,违约风险最大,从而导致期权价格的缩水幅度达到最大值.

4 结束语

通过用相关性测度 Kendall τ 刻画脆弱期权行权(或期权实值)与对手方违约两个事件之间的相关性,在三种具体的相关结构下给出了欧式脆弱看涨期权价格的闭形式表达式,进而应

用 Fréchet Copula 将三种情形下的结果进行了统一.然后在不同的 Kendall τ 值和标的资产价格与执行价格比率 S/K 下,对欧式脆弱看涨期权的价格进行了数值计算和敏感性分析.结果表明,当由 Kendall τ 刻画的脆弱期权行权与对手方违约两个事件间的相关性越大时,对手方违约的可能性越大,导致脆弱期权的价值相应地呈下降趋势;而关于期权价格对标的资产价格与执行价格比率 S/K 的敏感性分析,也与理论和实际相符.

本文中只介绍了欧式脆弱看涨期权的定价及敏感性分析,对于欧式脆弱看跌期权,也得到了其价格的闭形式表达式,并进行了敏感性分析.但由于篇幅限制,而且和看涨期权的定价思路类似,因此这里从略,感兴趣的读者可以参考文献[24].

需要说明的是,期权实值(或行权)与对手方违约之间的相关性是一个很难定量刻画的问题,所以本文中采用比较特殊的 Fréchet Copula 来解决这个问题,进而对脆弱期权进行定价.后续将继续探索应用其他 Copula 来解决上述问题的可行性.

参 考 文 献:

- [1] Johnson H, Stulz R. The pricing of options with default risk [J]. *Journal of Finance*, 1987, 42: 267 - 280.
- [2] Jarrow R A, Yu F. Counterparty risk and the pricing of defaultable securities [J]. *The Journal of Finance*, 2001, 56(5): 1765 - 1799.
- [3] Jorion P, Zhang G. Credit contagion from counterparty risk [J]. *The Journal of Finance*, 2009, 64(5): 2053 - 2087.
- [4] Leung S Y, Kwok Y K. Credit default swap valuation with counterparty risk [J]. *The Kyoto Economic Review*, 2005, 74(1): 25 - 45.
- [5] Brigo D, Chourdakis K. Counterparty risk for credit default swaps: Impact of spread volatility and default correlation [J]. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2009, 1 - 19.
- [6] 叶五一, 缪柏其. 基于 Copula 变点检测的美国次级债金融危机传染分析 [J]. *中国管理科学*, 2009, 17(3): 1 - 7.
Ye Wuyi, Miao Baiqi. Analysis of sub-prime loan crisis contagion based on change point testing method of copula [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2009, 17(3): 1 - 7. (in Chinese)
- [7] 乌 画, 易传和, 杜 军, 等. 基于多元随机波动模型的信用风险衍生定价 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(10): 55 - 62.
Wu Hua, Yi Chuanhe, Du Jun, et al. Pricing credit risk with multivariate stochastic volatility model [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(10): 55 - 62. (in Chinese)

- [8] Merton R C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates [J]. *Journal of Finance*, 1974, 2(2): 449 - 470.
- [9] Hull J, White A. The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities [J]. *Journal of Banking Finance*, 1995, 19: 299 - 322.
- [10] Klein P C. Pricing Black-Scholes options with correlated credit risk [J]. *Journal of Banking and Finance*, 1996, 20: 1211 - 1229.
- [11] Hung M W, Liu Y H. Pricing vulnerable options in incomplete markets [J]. *Journal of Futures Markets*, 2005, 25(2): 135 - 170.
- [12] Chang L F, Hung M W. Valuation of vulnerable American options with correlated credit risk [J]. *Review of Derivatives Research*, 2006, 9: 137 - 165.
- [13] 陈超. 标的资产价格服从跳-扩散过程的脆弱期权定价模型, *工程数学学报*, 2008, 25(6): 1129 - 1132.
Chen Chao. Vulnerable European option pricing models when underlying asset returns are jump-diffusion processes [J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2008, 25(6): 1129 - 1132. (in Chinese)
- [14] Embrechts P, McNeil A, Straumann D. Correlation: Pitfalls and Alternatives [R]. Department Mathematik, ETH Zentrum, CH - 8092 Zürich, 1999: 1 - 8.
- [15] 李平, 黄光东, 路阳. 基于 Copula 理论的多心理帐户组合 VaR 模型与基金风险管理 [J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31(5): 799 - 804.
Li Ping, Huang Guangdong, Lu Yang. Multiple mental account portfolios VaR model and fund risk management based on Copula theory [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2011, 31(5): 799 - 804. (in Chinese)
- [16] 张晶, DOMINIQUE Guégan, 柴俊. 基于 GARCH-NIG 模型和动态 Copula 的双标的型期权定价(英文) [J]. *华东师范大学学报(自然科学版)*, 2008, 5: 17 - 26.
Zhang Jing, DOMINIQUE Guégan, Chai Jun. Bivariate option pricing with GARCH-NIG model and dynamic Copula [J]. *Journal of East China Normal University (Natural Science)*, 2008, 5: 17 - 26. (in English)
- [17] 朱光, 陈厚生, 李平. 极大/极小期权定价的 Copula 方法 [J]. *统计与决策*, 2006, 8: 26 - 27.
Zhu Guang, Chen Housheng, Li Ping. Copulas method for the pricing of max/min option [J]. *Statistics and Decision*, 2006, 8: 26 - 27. (in Chinese)
- [18] 史道济, 关静. 沪深股市风险的相关性分析 [J]. *统计研究*, 2003, 10: 45 - 48.
Shi Daoji, Guan Jing. Analysis of dependence on risk of Shanghai and Shenzhen stock market [J]. *Statistical Research*, 2003, 10: 45 - 48. (in Chinese)
- [19] Li P, Chen H S, Deng X T, et al. On default correlation and pricing of collateralized debt obligation by copula functions [J]. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 2006, 3: 483 - 493.
- [20] 詹原瑞, 韩铁, 马珊珊. 基于 copula 函数族的信用违约互换组合定价模型 [J]. *中国管理科学*, 2008, 16(1): 1 - 6.
Zhan Yuanrui, Han Tie, Ma Shanshan. Pricing model of basket credit default swap based on copulas [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2008, 16(1): 1 - 6. (in Chinese)
- [21] Cherubini U, Luciano E, Vecchiato W. *Copula Methods in Finance* [M]. America: John Wiley & Sons, Ltd, 2004.
- [22] Breeden D T, Litzenberger R H. Prices of state-contingent claims implicit in option prices [J]. *Journal of Business*, 1978, 51: 621 - 651.
- [23] Fréchet M. Remarques au sujet de la note précédente [J]. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1958, 246: 2719 - 2720.
- [24] 曲博. 脆弱期权定价的 Copula 函数方法 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 2009.
Qu Bo. A Copula Approach to Pricing Vulnerable Options [D]. Beijing: Beihang University, 2009. (in Chinese)

Pricing of European vulnerable options based on Fréchet Copula

*LI Ping*¹, *QU Bo*¹, *HUANG Guang-dong*²

1. School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100191, China;

2. School of Information Engineering, China University of Geosciences, Beijing 100083, China

Abstract: In this paper we use Fréchet Copula and dependence measure Kendall to characterize the dependence structure between the counterparty's default and the dynamics of underlying asset, and then give the closed form formula for the price of European vulnerable call options. For different values of Kendall and ratio of underlying asset's price to strike price, we calculate numerically the price of a European vulnerable call option and make sensitivity analysis. Results show that the price of the European vulnerable call option decreases with the increase of Kendall and decrease of the ratio of underlying asset's price to strike price, which is accordant with theoretical results and practice.

Key words: vulnerable option; Fréchet Copula, Kendall τ ; reduction in option's value

(上接第22页)

[27] 汪宜霞, 夏新平. 噪声交易者与 IPO 溢价[J]. 管理科学, 2007, 20(3): 91-96.

Wang Yixia, Xia Xinping. Noise traders and IPO overvaluation[J]. Journal of Management Sciences, 2007, 20(3): 91-96. (in Chinese)

[28] 陆静, 曹国华, 唐小我. 基于异质信念和卖空限制的分割市场股票定价[J]. 管理科学学报, 2011, 14(1): 13-27.

LU Jing, Cao Guohua, Tang Xiaowo. Stock pricing between segmented capital markets under heterogeneous beliefs and short sale constraint[J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(1): 13-27. (in Chinese)

Factors affecting IPO underpricing and its composition in Chinese market

*ZOU Gao-feng*¹, *ZHANG Wei*¹, *XU Xiao-wan*²

1. College of Management and Economics, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2. Tianjin University of Finance & Economics, Tianjin 300222, China

Abstract: Based on stochastic frontier approach, this paper analyzes the pricing of initial public offerings (IPOs) in different periods during the issuance system reform, composition of IPOs' underpricing and factors affecting it. This paper finds that the pricing of IPOs in different periods has different characteristics, which are different from the developed capital markets. Because, before 2005, the offer price of IPOs shows the lower stochastic frontier, which is completely opposite to overseas market. After the Book-building mechanism has been adopted in 2005, the upper stochastic frontier characteristic in the pricing of IPOs begin to appear, which is similar to the developed capital market; The IPO underpricing in China is related not only to the pricing factors in the primary market, but also mainly to the investors' sentiment and the market environment factors in the secondary market.

Key words: initial public offers (IPOs); underpricing; stochastic frontier approach; book-building