

可违约零息债券风险综合度量 Monte Carlo 方法^①

陈荣达, 陆金荣

(浙江财经学院金融学院, 杭州 310018)

摘要: 可违约零息债券同时面临着违约风险和市场风险(利率风险)这两类主要风险. 相对于传统的不同类风险独立度量方法, 也不同于割裂两类风险再进行加总或通过 Copula 函数关联, 本文在信用风险强度定价模型的基础上, 同时考虑信用风险、市场风险和两类风险之间的相关关系, 建立了计算可违约零息债券综合风险 VaR 的 Monte Carlo 方法, 得出同一个风险计算期下反映两类风险的损失分布和同一个某置信度的损失分布的分位点, 进而能求得风险综合 VaR 值. 这样可在同一个框架下同时捕捉可违约零息债券的两类风险, 这里, 给出了 Monte Carlo 模拟方法具体技术细节, 包括违约时间和基础状态向量过程的模拟. 最后运用本文的风险综合度量模型对短期融资券的综合风险进行计算, 得出风险综合 VaR 值, 并与利率风险独立度量 VaR 值和信用风险独立度量 VaR 值进行比较分析.

关键词: 违约强度; 风险综合度量; Monte Carlo 模拟; VaR; 可违约零息债券

中图分类号: F830.5 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2012)04-0088-11

0 引言

可违约资产或组合同时面临着市场风险和信用风险. 当这两种风险对于该投资组合均值得注意时, 风险管理如何度量好总风险, 为投资组合意料之外的损失提供必要的缓冲资金? 很多时候, 这种吸纳风险的资金被理解为风险价值 (value-at-risk). 单独考虑其中一种风险而忽视另一种, 显然不能全面衡量总风险. 若简单加和两类风险值, 由于忽略不同类风险间的分散化效果 (diversification effect) 将可能高估总风险, 然而 Breuer, et al^[1] 指出, 由于不同类风险之间的复杂化效果 (compounding effect), 简单加和两类风险值也可能低估总风险. 至于复杂化效果和分散化效果两者的重要性在投资组合中谁占主导, 这就依赖于不同的场合. 曾早在 Jarrow & Turnbull^[2] 就指出: 市场风险和信用风险本质是

相互联系的, 不是相互独立的. 所以在孤立地考虑不同类型风险之外, 还应努力建立好综合度量市场风险和信用风险的一致性方法.

违约型资产的理论刻画主要有两类基本方法, 一类是基于公司资产价值的结构化模型, 另一类是约化模型, 其不直接考虑违约与公司价值的显性关系, 将违约看成是强度过程所决定的某个计数过程的首次跳跃, 这类模型也称为基于强度的约化模型. 可违约的资产或组合的风险度量还须在信用风险模型的基础上考虑不同种类风险的相关, 市场风险相关和违约相关结构. 由于 Copula 函数在描述相关性方面有着独特优势, 一个主要方法即是通过 Copula 函数联系不同种类风险各自带来的损失的边缘分布得到总损失的分布, 这可参见 Ward & Lee^[3], Dimakos & Aas^[4], Rosenberg & Schuermann^[5], Copula 函数也能方便的描述组合的违约相关性. 国内方面也出现了

① 收稿日期: 2011-08-22; 修订日期: 2011-09-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71171176; 70771099).

作者简介: 陈荣达(1971—), 男, 浙江温州人, 博士, 教授. Email: rongdachen@zufe.edu.cn

很多基于 Copula 函数对我国金融市场风险间的相关性和整合风险的研究, 比如史道济和关静^[6], 史道济, 王爱莉^[7]. 然而选择一个正确的 Copula 函数是困难的, 特别是在违约风险数据稀缺的情况下. 这种单独估计不同类型的风险, 再进行简单加总或基于 Copula 函数的这类方法也被称为“top-down”方法, 其忽略了不同类风险间的相关关系或具体怎样的相关关系, 比如有时表现出的非线性相关性. 相对的, 在“bottom-up”思想下, 同步考虑不同种类的风险, 可以在现有流行的产品组合信用风险度量模型(比如 CreditMetrics, CreditPortfolioView, Portfolio Manager, CreditRisk +) 中融入市场风险, 或利用基于信用风险模型的可违约资产组合的定价方法, 来综合地度量市场风险和信用风险. Kiesel, Perraudin & Taylor^[8] 运用蒙特卡罗模拟方法在 CreditMetrics 模型中加入了依赖公司等级的信用利差, 无风险利率假设为常值, 讨论了可违约零息债券组合风险综合度量. Kijima & Muromachi^[9] 把利率风险融入到基于强度的信用风险模型, 假设无风险利率和各个对手方的违约强度为相关的 Vasicek 过程, 资产组合也是可违约的零息债券. Jarrow & Turnbull 指出市场风险和信用风险本质是相互联系的, 不能孤立考虑, 两种风险相互依赖, 其基于约化方法将随机利率风险融合到信用风险中, 这也得到利率变化与资产信用质量相互影响的实证研究的支持, 比如 Carling, et al^[10]. Medova & Smith^[11] 基于结构化模型以含对手风险的外汇远期合约发展了结合随机利率的信用风险度量框架. 国内学者谢云山^[12] 根据中国债券市场数据, 对信用风险与利率风险的相关性作出实证分析, 体现出两类风险的负相关关系. 梁世栋等^[13] 在随机违约强度情形下构造了信用风险期限结构的框架性模型. 郑振龙等^[14] 在仿射利率期限结构动态模型框架下, 运用卡尔曼滤波估计法对利率风险价格形式进行实证研究. 乌画等^[15] 对 Cox-Rose 模型进行扩展, 将风险升水引入收益率动态方程, 并将 Merton 模型下的公司违约风险发展到随机分析情形下, 进而对信用风险价值的动态过程进行数值计算. 陆金荣和陈荣达^[16] 在信用风险强度定价模

型的框架下, 假设状态过程的两个分量在实际世界为相互独立的 CIR 过程, 而无风险瞬时利率和违约强度与状态向量成仿射关系, 允许利率和违约强度相关, 建立了可违约零息债券的双因素强度定价模型. 模型的仿射假设不仅很好的体现了市场变量的特性, 还解析的表示出了可违约零息债券的价格和模型参数估计的似然函数, 最后选用国内短期融资券的价格和一周 Shibor 利率对模型作出参数估计.

计算可违约零息债券的 VaR 值的一个中心问题就是计算其损失的分布函数, 当无法或解析计算 VaR 比较困难时, 可以采用基于 Monte Carlo 模拟的 VaR 算法, 其先设定或估计出风险因子未来的分布或风险因子的随机变化过程, 并确定出风险因子与未来资产价值的映射关系(精确的或者近似的关系), 再通过计算机重复模拟出风险因子未来的可能值, 从而得出资产价值的分布情况, 计算出 VaR 值. 综合度量市场风险和信用风险势必带来增加计算量的后果, 因为在风险周期内对可违约资产组合的重新估值将变得更加复杂. 大部分标准的信用或市场产品及其组合的风险度量模型会依赖蒙特卡罗模拟方法来计算未来的资产组合价值的分布, 综合度量两种风险此时将需要更多的计算时间. 傅里叶(Fourier) 方法是期权定价理论常用的工具, 也已经成功应该用在纯市场组合风险模型中(例如 Rouvinez^[17]), Merino & Nyfeler^[18] 将此技术运用在标准的纯信用组合风险度量模型 Credit-Risk⁺ 中, 称其能很快计算出包含 50 万个交易对手风险的信用产品组合的损益分布并保证足够的精度, 但没准确说明组合的构成成分和具体的所谓的足够精确程度, Reib^[19] 也在 CreditRisk⁺ 框架下简略的讨论了把 Delta-Normal 方法下的市场风险结合到信用风险度量模型里. Grundke^[20] 在 CreditMetrics 下综合度量市场风险和信用风险, 指出此框架下傅里叶方法并不优于完全蒙特卡罗模拟方法.

本文的研究就是出于对可违约资产两类主要风险综合度量方法的探索, 并选用最基本的可违约零息债券作为研究品种, 为其它类债券、商业银行贷款、场外衍生品、信用衍生品和可违约资

产的组合的风险综合度量进一步作好研究的基础准备. 可违约零息债券风险综合度量模型同时考虑了信用风险、市场风险和两类风险之间的相关关系, 没有割裂地考虑两种风险再进行简单加总或通过 Copulas 函数关联, 而是在一个框架类进行建模分析, 有利于全面风险管理技术的发展.

1 可违约零息债券风险强度定价模型

本节简要叙述陆金荣和陈荣达可违约零息债券违约双因素强度定价模型的主要假设和结论, 也是本文风险综合度量 Monte Carlo 方法的基础铺垫.

给定一个概率空间 (Ω, F, P) 和域流 $F_t (t \geq 0)$, 其符合通常的技术性条件 P 为实际概率测度. 设停时 τ 代表违约事件发生的时刻. 假设金融市场不存在套利机会, 则存在一个与实际概率测度 P 等价的风险中性测度 Q , 使得在 Q 下, 债券价格满足一个鞅过程. 若 $v_0(t, T)$ 表示在时刻 T 支付单位面值的无违约风险零息债券在 t 时的价格, $v(t, T)$ 表示在时刻 T 支付单位面值的可违约债券在 $t (t < \tau)$ 时的价格, $r(t)$ 表示 t 时刻的瞬时无风险利率, 则由风险中性定价原理, 无违约风险零息债券价格为

$$v_0(t, T) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \right] \tag{1}$$

可违约零息债券价格为

$$v(t, T) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + e^{-\int_t^T r(s) ds} \omega_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \right] \tag{2}$$

这里 E_t^Q 表示在 Q 下以直到时刻 t 的信息为条件的期望, $\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$, $\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}$ 分别表示 t 时刻没有发生违约和 t 时刻发生违约的示性函数, ω_τ 表示违约回收额. 若要得出 $v(t, T)$ 的更具体的表达式, 须要描述无风险利率 r , 违约时间 τ , 回收额 ω_τ 的具体分布特征, 于是作出如下假设.

假设 1 违约时刻是以强度为 $h(t)$ 的泊松过程在实际概率测度下的首次跳跃发生的时刻.

假设 2 违约回收额 ω_τ 是违约时债券市场价值的固定比率, 即

$$\omega_\tau = (1 - L) v(\tau^-, T)$$

这里, 常数 L 即可看成债券市场价值的固定损失率.

假设 3 无风险利率 r 与违约强度 $h(t)$ 仿射的依赖于状态向量 $X(t) = (X_1(t), X_2(t))'$

$$r(t) = X_1(t) \tag{3}$$

$$h(t) = \rho_0 + \rho_1 X_1(t) + X_2(t) \tag{4}$$

其中 ρ_0, ρ_1 为常数, 并且, 状态分量满足 CIR 过程

$$dX_i(t) = \kappa_i (\theta_i - X_i(t)) dt + \sigma_i \sqrt{X_i(t)} dW_i(t), \quad i = 1, 2$$

其中 $\kappa_i, \theta_i, \sigma_i$ 均为非负常数, $i = 1, 2, W_1(t), W_2(t)$ 是相互独立的一维标准 Wiener 过程.

假设 4 风险中性概率测度 Q 下的违约强度过程 $h^Q(t)$ 与实际概率测度 P 下的违约强度过程 $h(t)$ 成一定的比例关系, 即

$$h^Q(t) = \varphi h(t), \varphi \text{ 为一常数} \tag{5}$$

假设 5 风险的市场价格有如下形式

$$\lambda_{X_1}(t) = \frac{\eta_1}{\sigma_1} \sqrt{X_1(t)} \tag{6}$$

$$\lambda_{X_2}(t) = \frac{\eta_2}{\sigma_2} \sqrt{X_2(t)} \tag{7}$$

其中 η_1, η_2 为常数. 这样, 状态过程在风险中性概率测度 Q 下可表示为

$$dX_i(t) = (\kappa_i \theta_i - (\kappa_i + \eta_i) X_i(t)) dt + \sigma_i \sqrt{X_i(t)} d\tilde{W}_i(t) \tag{8}$$

其中 $\tilde{W}_1(t), \tilde{W}_2(t)$ 为 Q 下相互独立的一维标准 Wiener 过程.

在前两个假设下 Duffie & Singleton^[21] 给出可违约零息债券价格的一个结果, 也就是式 (2) 可表示为

$$v(t, T) = E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T (r(s) + Lh^Q(s)) ds \right) \right]$$

再由假设 3 中的式 (3) 和式 (4) 和假设 4 中的式 (5), 上式进一步写为

$$v(t, T) = E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T (X_1(s) + \varphi L \rho_0 + \varphi L \rho_1 X_1(s) + \varphi L X_2(s)) ds \right) \right]$$

由于 $X_1(t), X_2(t)$ 相互独立, 所以

$$v(t, T) = \exp(-\varphi L \rho_0 (T - t)) \times E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T (1 + \varphi L \rho_1) X_1(s) ds \right) \right] \times$$

$$E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T \varphi L X_2(s) ds \right) \right] \quad (9)$$

其中 $X_i(t)$ 遵循的 CIR 过程可视为基本仿射过程的特殊类型 根据 Duffie & Gârleanu^[22] 或 Duffie & Singleton^[23] 中的附录 A.5 可给出如下命题

命题 1 设 $X(t)$ 为某一满足通常技术条件的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}(t)_{t \geq 0}, \hat{P})$ 下的随机过程, 其满足如下一维 CIR 过程

$$dX(t) = \kappa(\theta - X(t)) dt + \sigma \sqrt{X(t)} dW(t)$$

这里 κ, θ, σ 均为非负常数, $W(t)$ 为在概率测度 \hat{P} 下的一维标准 Wiener 过程. 则在可积的技术条件下, 对形如 $E_t \left[\exp \left(\int_t^T q X(s) ds \right) \right]$ (E_t 表示在 \hat{P} 下以直到时刻 t 的信息为条件的期望, q 为常数) 的期望有闭式解, 即

$$E_t \left[\exp \left(\int_t^T q X(s) ds \right) \right] = e^{\alpha(t, T) + \beta(t, T) X(t)}$$

$$\beta(t, T) = \frac{1 - e^{-\gamma(T-t)}}{c + d e^{-\gamma(T-t)}}$$

$$\alpha(t, T) = -\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \ln \left(\frac{c + d e^{-\gamma(T-t)}}{c + d} \right) + \frac{\kappa\theta}{c} (T - t)$$

其中 $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - 2\sigma^2 q}$, $c = \frac{\kappa + \gamma}{2q}$, $d = \frac{-\kappa + \gamma}{2q}$.

利用上述命题, 令 $q = -(1 + \varphi L \rho_1)$, $\kappa = \kappa_1 + \eta_1$, $\theta = \frac{\kappa_1 \theta_1}{\kappa_1 + \eta_1}$, $\sigma = \sigma_1$, 可得式(9)中

$$E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T (1 + \varphi L \rho_1) X_1(s) ds \right) \right] = e^{\alpha_1(t, T) + \beta_1(t, T) X_1(t)}$$

令 $q = -\varphi L$, $\kappa = \kappa_2 + \eta_2$, $\theta = \frac{\kappa_2 \theta_2}{\kappa_2 + \eta_2}$, $\sigma = \sigma_2$, 可得式(9)中

$$E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T \varphi L X_2(s) ds \right) \right] = e^{\alpha_2(t, T) + \beta_2(t, T) X_2(t)}$$

再令 $\alpha_0(t, T) = -\varphi L \rho_0 (T - t)$, 则式(9)可表示为, 即可违约零息债券价格为

$$v(t, T) = e^{\alpha_0(t, T) + \alpha_1(t, T) + \alpha_2(t, T) + \beta_1(t, T) X_1(t) + \beta_2(t, T) X_2(t)} \quad (10)$$

2 可违约零息债券风险综合度量的 Monte Carlo 方法

在上面双因素强度定价模型的基础上, 本节

给出了计算可违约零息债券在风险计算期内的损失分布的 Monte Carlo 模拟方法具体技术细节, 包括违约时间和基础状态向量过程的模拟, 在同一个框架下一致性的捕捉了利率风险和信用风险, 计算出风险综合 VaR.

2.1 违约时间的模拟

遵循双因素强度定价模型的全部假设, 再设当前的时刻为 \hat{t} , 且直到 \hat{t} 时刻为止均未发生违约, VaR 的风险计算期为 \hat{T} , $p(\hat{t}, \hat{t})$ 表示在 \hat{t} 时刻到目标期 \hat{t} 时发生违约的概率, 则

$$p(\hat{t}, \hat{t}) = P_i(\tau \leq \hat{t}) = 1 - E_i^P \left[\exp \left(- \int_{\hat{t}}^{\hat{t}} h(s) ds \right) \right]$$

由于 $h(t) = \rho_0 + \rho_1 X_1(t) + X_2(t)$ 且 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 相互独立, 所以

$$E_i^P \left[\exp \left(- \int_{\hat{t}}^{\hat{t}} h(s) ds \right) \right] = E_i^P \left[\exp \left(- \int_{\hat{t}}^{\hat{t}} (\rho_0 + \rho_1 X_1(s) + X_2(s)) ds \right) \right] = e^{-\rho_0(\hat{t}-\hat{t})} \times E_i^P \left[\exp \left(- \int_{\hat{t}}^{\hat{t}} \rho_1 X_1(s) ds \right) \right] \times E_i^P \left[\exp \left(- \int_{\hat{t}}^{\hat{t}} X_2(s) ds \right) \right] \quad (11)$$

利用命题 1, 令 $q = -\rho_1$, $\kappa = \kappa_1$, $\theta = \theta_1$, $\sigma = \sigma_1$, 可得式(11)中

$$E_i^P \left[\exp \left(- \int_{\hat{t}}^{\hat{t}} \rho_1 X_1(s) ds \right) \right] = e^{\alpha_4(\hat{t}, \hat{t}) + \beta_4(\hat{t}, \hat{t}) X_1(\hat{t})}$$

令 $q = -1$, $\kappa = \kappa_2$, $\theta = \theta_2$, $\sigma = \sigma_2$, 可得式(11)中

$$E_i^P \left[\exp \left(- \int_{\hat{t}}^{\hat{t}} X_2(s) ds \right) \right] = e^{\alpha_5(\hat{t}, \hat{t}) + \beta_5(\hat{t}, \hat{t}) X_2(\hat{t})}$$

再令 $\alpha_3(\hat{t}, \hat{t}) = -\rho_0(\hat{t} - \hat{t})$, 则式(11)可表示为, 即在 \hat{t} 时刻到目标期 \hat{t} 时发生违约的概率为

$$p(\hat{t}, \hat{t}) = 1 - E_i^P \left[\exp \left(- \int_{\hat{t}}^{\hat{t}} h(s) ds \right) \right] = 1 - e^{\alpha_3(\hat{t}, \hat{t}) + \alpha_4(\hat{t}, \hat{t}) + \alpha_5(\hat{t}, \hat{t}) + \beta_4(\hat{t}, \hat{t}) X_1(\hat{t}) + \beta_5(\hat{t}, \hat{t}) X_2(\hat{t})} \quad (12)$$

为模拟违约时间 τ , 考虑到上述的违约概率 $p(\hat{t}, \hat{t})$ 在本文中不存在闭式解, 易于分析计算, 使用逆分布函数法 (inverse-CDF method), 模拟一个 $[0, 1]$ 上的均匀分布的随机变量 U 的样本 u . 根据累积分布函数 $P_i(\tau \leq t) = p(\hat{t}, \hat{t})$ 确定出一个 $\hat{\tau}$ 使得 $p(\hat{t}, \hat{\tau}) = u$ 如图 1.

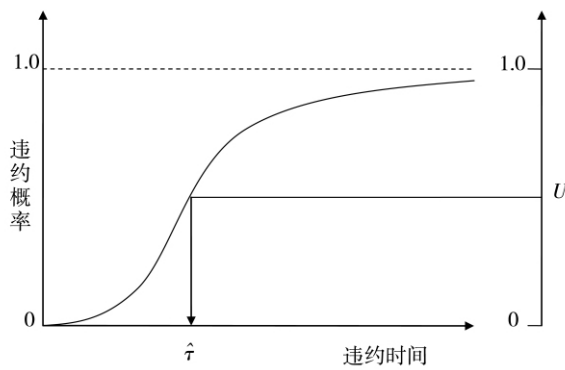


图 1 逆分布函数法对违约时间的模拟

Fig.1 Simulation of default time with inverse-CDF method

2.2 CIR 转移过程的模拟

根据 Cox, et al 对于一维 CIR 过程 $dX(t) = \kappa(\theta - X(t)) dt + \sigma \sqrt{X(t)} dW(t)$, 从 $X(t_j)$ 到 $X(t_{j+1})$ 的转移密度函数满足一非中心卡方分布 $\chi^2[2m_j X(t_{j+1}); 2p+2, 2a]$, 即 $2m_j X(t_{j+1}) | X(t_j) \sim \chi^2[2p+2, 2a]$ 其中 $m_j = \frac{2\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(t_{j+1}-t_j)})}$ $a_j = m_j X(t_j) e^{-\kappa(t_{j+1}-t_j)}$ $p = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1$ $2p+2$ 为自由度 $2a$ 为非中心参数. 所以从 $X(t_j)$ 到 $X(t_{j+1})$ 的转移密度函数也可以写为

$$f(X(t_{j+1}) | X(t_j)) = 2m_j f_{\chi^2[2p+2, 2a]}(2m_j X(t_{j+1}) | X(t_j))$$

MATLAB7.6 内置函数 ncx2rnd 可产生服从非中心卡方分布的随机数, 采用命令 ncx2rnd(2p+2, 2a) 生成的随机数再除以 $2m_j$ 就可以得到在已知 $X(t_j)$ 情况下基于从 $X(t_j)$ 到 $X(t_{j+1})$ 的转移密度函数而生成的样本 $X(t_{j+1})$.

2.3 风险综合 VaR 的 Monte Carlo 模拟算法

设 Y_T 为风险计算期 \hat{T} 时刻的违约事件的指示变量, 如果 \hat{T} 时刻或 \hat{T} 时刻前没有违约, 则取值为 1, 否则取值为 0, 即

$$Y_{\hat{T}} = 1_{\{\hat{\tau} \leq \hat{T}\}} = \begin{cases} 1, & \text{if } \hat{\tau} \leq \hat{T} \\ 0, & \text{if } \hat{\tau} > \hat{T} \end{cases}$$

则可违约零息债券在风险计算期 \hat{T} 时刻的市场价值可以表示为

$$V_{\hat{T}} = v(\hat{T}, T)(1 - Y_{\hat{T}}) + (1 - L)v(\hat{\tau}^-, T)Y_{\hat{T}}$$

所以损失函数

$$L = V_i - V_{\hat{T}} = V_i - v(\hat{T}, T)(1 - Y_{\hat{T}}) -$$

$$(1 - L)v(\hat{\tau}^-, T)Y_{\hat{T}} \quad (13)$$

利用 Monte Carlo 重复模拟便可得到上面损失的分布, 并求得 VaR 值, 具体步骤如下:

1) 通过逆分布函数法模拟违约时间 $\hat{\tau}$. 若 $\hat{\tau} \leq \hat{T}$, 则 $Y_{\hat{T}} = 1$, 若 $\hat{\tau} > \hat{T}$, 则 $Y_{\hat{T}} = 0$, 即也模拟出了违约指示变量 $Y_{\hat{T}}$.

2) 如果 $Y_{\hat{T}} = 1$, 在风险计算期 \hat{T} 时刻或之前发生违约, 则模拟状态向量 $X(\hat{\tau}^-)$, 由于 $\{X(t)\}$ 的路径是连续的, $X(\hat{\tau}^-)$ 也就是 $X(\hat{\tau})$, 再通过上一章的双因素强度定价式(10) 计算出恰好违约发生前的可违约零息债券价格 $v(\hat{\tau}^-, T)$, 进而由式(13) 计算出损失值.

3) 如果 $Y_{\hat{T}} = 0$, 在风险计算期 \hat{T} 时刻和 \hat{T} 时刻之前都没有发生违约, 则模拟状态向量 $X(\hat{T})$, 同样地, 通过式(10) 计算出 \hat{T} 时刻可违约零息债券的价格 $v(\hat{T}, T)$, 进而计算出损失值.

4) 循环步骤 1 至步骤 3, 产生足够多的 n 个独立情景, 得到损失值的取值频数, 估计损失分布的尾部概率

$$P(L > l) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{L_i > l\}}$$

L_i 是第 i 次循环的损失值, $1_{\{L_i > l\}}$ 是 $L_i > l$ 的示性函数. 给定一个置信水平, 由此便可估计出 VaR.

3 风险度量计算结果与分析

本文选取的样本是 09 中普天 CP02 从 2009 年 10 月 9 日至 2010 年 4 月 27 日银行间发生交易的 72 个日全价加权价, 同时选取和 09 中普天 CP02 发生交易的日期相匹配的一周 Shibor 利率近似作为无风险利率, 数据来源于 RESSET 金融研究数据库 <http://www.resset.cn>, 样本和双因素强度定价模型的参数与陆金荣和陈荣达一致.

在第 3 节双因素强度定价模型中, 通过债券价格和无风险利率数据仅能估计出参数 φ 和 L 的乘积 φL , 不足以确定出 φ 和 L , 所以在综合度量风险时, 给出违约损失率 L 的经验性数据. 资产回收

受国家法律制度的影响,由于国内公司债券市场不发达,银行贷款回收数据也不完备,缺乏大量的违约回收数据,研究大多停留在理论介绍上,有影

响的实证结果极少.表 1 给出了截止 2006 年第一季度中国四大资产管理公司(AMC)资产处置情况.

表 1 金融资产管理公司资产处置情况

Table 1 Disposal of financial asset management companies

单位:亿元

	华融	长城	东方	信达	合计数据
累计处置	2 468.0	2 707.8	1 419.9	2 067.7	8 663.4
其中: 现金回收	546.6	278.3	328.1	652.6	1 805.6
阶段处置进度	70.11%	80.11%	56.13%	64.69%	68.61%
资产回收率	26.50%	12.70%	27.16%	34.46%	24.20%
现金回收率	22.15%	10.28%	23.11%	31.56%	20.84%

注:数据来源:中国银行业监督管理委员会

图 2 是穆迪根据债务种类和债务优先级别给出的 1987 年至 2006 年 720 个美国非金融机构违约回收统计,大致有 3 500 个银行贷款和债券.一般来说,由于银行对贷款的监控比普通投资者对债券的监控更为有效,所以同一级别的银行贷款的回收率普遍高于债券的回收率,在本文的风险综合度量模型的实证研究中,不妨假设 09 中普天 CP02 这种高级无担保的短期融资券的违约回收率 L 是 20%,本章后面也可以看到,违约回收率的假设对风险度量的结果并不敏感.

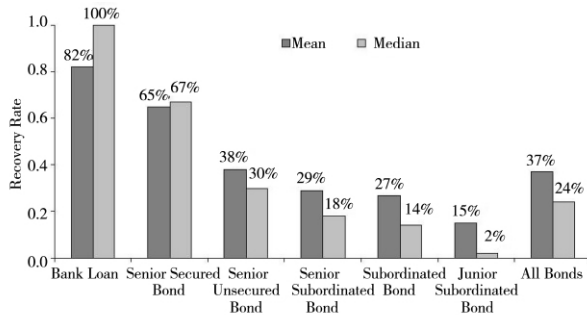


图 2 穆迪根据债务种类和债务优先级统计的违约回收率(1987—2006)

Fig.2 Default recovery rates obtained statistically by Moody using debts kinds and Priority(1987 - 2006)

数据来源:Moody's Investors Service: Moody's Ultimate Recovery Database, April 2007.

现有一投资者在 2010 年 4 月 27 日持有单位头寸的 09 中普天 CP02 短期融资券,基于利率和信用风险传统的单独度量和上一章的可违约零息债券风险综合度量的 Monte Carlo 方法,分别计算在 95%、99%、99.5%、99.9%、99.99% 置信度下的 2 周 3 个月的 VaR 值.

3.1 利率风险独立度量

若固定住债券的信用风险,认为其信用质量在风险计算期内不发生变动(不会发生违约,而且其违约强度不会发生变动),即从当前时刻到风险计算期内 $h(s)$ 保持不变,为当前 t 时刻的值 $h(t)$ (对于违约损失率,本文已经假设其为一常值 L).此时,可违约零息债券的价格可表示为

$$v(t, T) = E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T (r(s) + \varphi L h(t)) ds \right) \right]$$

即

$$v(t, T) = \exp(-\varphi L h(t)(T-t)) \times E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T (r(s) ds \right) \right] \quad (14)$$

由前假设,在风险中性概率测度下,无风险利率 $r = X_1$ 遵循随机过程

$$dX_1(t) = (\kappa_1 \theta_1 - (\kappa_1 + \eta_1) X_1(t)) dt + \sigma_1 \sqrt{X_1(t)} d\tilde{W}(t)$$

根据命题 1,令 $q = -1$, $\kappa = \kappa_1 + \eta_1$, $\theta =$

$\frac{\kappa_1 \theta_1}{\kappa_1 + \eta_1}$, $\sigma = \sigma_1$,可得式(14)中

$$E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \right] = e^{\alpha_6(t, T) + \beta_6(t, T) X_1(t)}$$

所以,债券价格进一步表示为

$$v(t, T) = e^{(-\varphi L h(t)(T-t) + \alpha_6(t, T) + \beta_6(t, T) X_1(t))} \quad (15)$$

在风险计算目标期 T ,通过 Monte Carlo 反复模拟状态 $X_1(\hat{T})$,再由式(15)计算得这些情景下债券的价格 $v(\hat{T}, T)$ 从而得到损失的经验分布,分

别计算在 95%、99%、99.5%、99.9%、99.99% 置信度下的 2 周 3 个月的 VaR 值. 注意到这里计算的是到期支付单位面值的可违约零息债券的价格, 而 09 中普天 CP02 一年到期一次性还本付息支付 103.36 元, 所以实际价格应为 $103.36 \times v(\hat{T}, T)$, 本章后面的讨论均是如此. Monte Carlo 模拟 50 000 次 2 周和 3 个月的损失分布见图 3 和图 4, VaR 值估计结果见表 2.

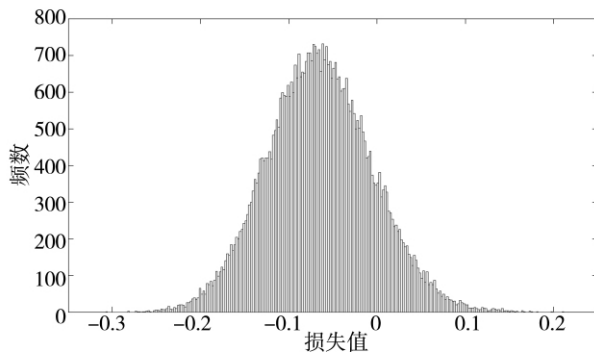


图 3 利率风险独立度量的 2 周损失分布

Fig. 3 2-week loss distribution of rate risk separate measurement

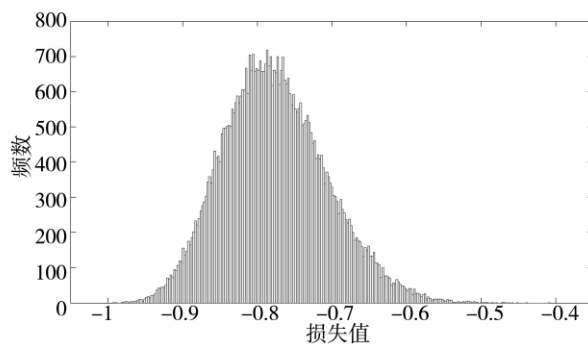


图 4 利率风险独立度量的 3 个月损失分布

Fig. 4 3-month loss distribution of rate risk separate measurement

表 2 利率风险独立度量 VaR 估计结果

Table 2 VaR results of rate risk separate measurement

	风险计算期	
	2 周	3 个月
均值	-0.065 0	-0.776 4
标准差	0.059 6	0.069 7
置信度为 95% 的 VaR	0.099 7	0.122 7
置信度为 99% 的 VaR	0.143 9	0.178 3
置信度为 99.5% 的 VaR	0.162 0	0.197 6
置信度为 99.9% 的 VaR	0.200 4	0.244 6
置信度为 99.99% 的 VaR	0.238 3	0.311 1

3.2 信用风险独立度量

若不考虑利率风险, 将风险计算期内利率固定为当前 \hat{t} 时刻的值 $r(\hat{t})$, 单独度量信用风险. 对于信用质量的变化, 传统方法也只考虑对手是否违约, 在模型中假设为违约强度过程 h 在风险目标期内不变, 不妨就设为当前 \hat{t} 时刻的值 $h(\hat{t})$. 这样除违约之外的其他风险因子——违约概率 (PD)、违约敞口 (EAD)、违约损失率 (LGD) 均不会发生变化. 所以到目标期 \hat{T} 的违约概率为

$$p(\hat{t}, \hat{T}) = 1 - E_i^p \left[\exp \left(- \int_{\hat{t}}^{\hat{T}} h(s) ds \right) \right]$$

$$= 1 - \exp(-\varphi L h(\hat{t}) (\hat{T} - \hat{t}))$$

又由前假设 09 中普天 CP02 的违约回收率 L 是 20%, 所以违约损失率就是 $1 - 20\% = 80\%$. 2 周和 3 个月的违约概率和损失分布见表 3 和表 4.

表 3 信用风险独立度量的 2 周违约概率和损失分布

Table 3 2-week default rates and loss distribution of credit risk separate measurement

	没有违约	发生违约
概率	99.936 9%	0.063 1%
损失值	0	$101.984 8 \times 80\% = 81.587 8$

表 4 信用风险独立度量的 3 个月违约概率和损失分布

Table 4 3-month default rates and loss distribution of credit risk separate measurement

	没有违约	发生违约
概率	99.589 4%	0.410 6%
损失值	0	$101.984 8 \times 80\% = 81.587 8$

相对于利率风险独立度量的损失分布, 这里讨论的单位面值的可违约零息债券信用风险的损失是一个简单的二项分布, 表 5 给出了 VaR 估计结果.

3.3 风险综合度量和分析

相对于前面利率和信用风险的独立度量, 允许利率和违约强度随机的变化并考虑相关关系, 在上一章第一节的可违约零息债券双因素强度定价模型下, 利用上一章第二节的 Monte Carlo 完全模拟方法, 给出了 09 中普天 CP02 风险综合 VaR, 在同一个框架下一致性的捕捉了利率风险和信用风险. 相应地, 2 周损失分布见图 5 和图 6, 3 个月损失分布见图 7 和图 8, VaR 值估计结果见表 6.

表 5 信用风险独立度量 VaR 估计结果
Table 5 VaR results of credit risk separate measurement

	风险计算期	
	2 周	3 个月
均值	0.012 9	0.083 7
标准差	0.262 4	1.701 2
置信度为 95% 的 VaR	0(-0.012 9)	0(-0.083 7)
置信度为 99% 的 VaR	0(-0.012 9)	0(-0.083 7)
置信度为 99.5% 的 VaR	0(-0.012 9)	0(-0.083 7)
置信度为 99.9% 的 VaR	0(-0.012 9)	81.587 8 - 0.083 7 = 81.504 1
置信度为 99.99% 的 VaR	81.587 8 - 0.012 9 = 81.574 9	81.587 8 - 0.083 7 = 81.504 1

注: 上面括号内的值是相对 VaR, 是负数且其绝对值较小, 若认为损失的缓冲资金(VaR) 一般为正数, 则不妨将此时的 VaR 值表示为 0, 其实也正好是绝对 VaR 的取值。

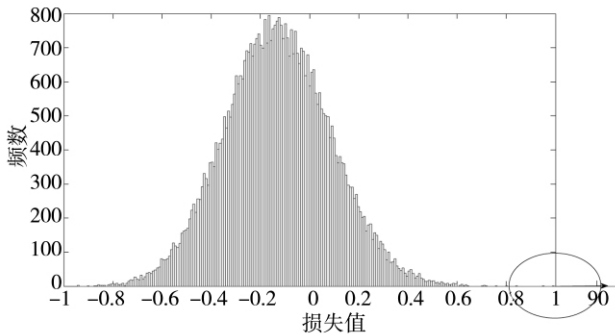


图 5 风险综合度量 2 周损失分布

Fig. 5 2-week loss distribution of integrated risk measurement

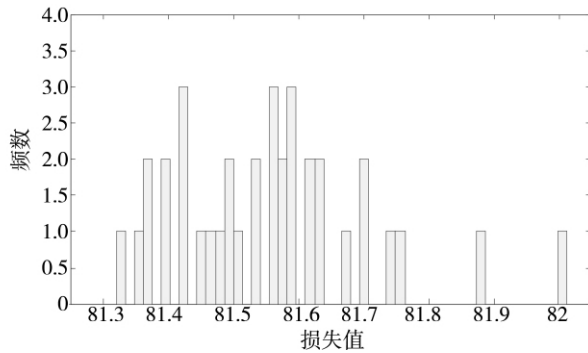


图 6 风险综合度量 2 周损失分布尾部稀有的违约事件

Fig. 6 Default events figured in 2-week loss distribution tail of integrated risk measurement

从图 6 可以观察到, 发生了稀有的违约事件时, 在债券的损失分布的尾部就会出现极端损失值, 由于假设的 09 中普天 CP02 的违约回收率是 20%, 极端的损失大致取值于前面信用风险独立度量时的违约损失值左右, 即分布于 $101.9848 \times 80\% = 81.5878$ 的临近, 模拟了

50 000 次的结果中, 这种违约事件出现了 36 次。

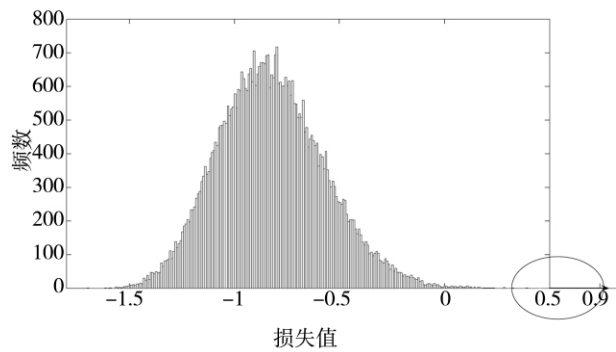


图 7 风险综合度量 3 个月损失分布

Fig. 7 3-month loss distribution of integrated risk measurement

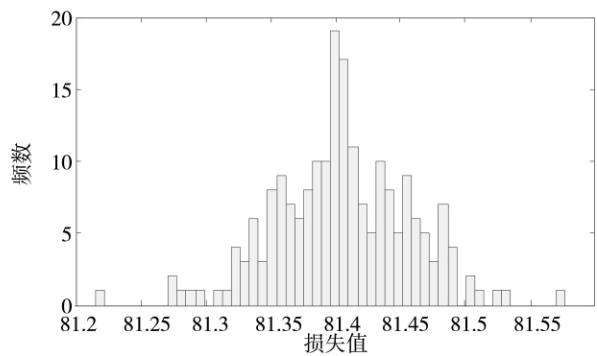


图 8 风险综合度量 3 个月损失分布尾部稀有的违约事件

Fig. 8 Default events figured in 3-month loss distribution tail of integrated risk measurement

和上面风险综合度量 2 周损失分布类似, 风险综合度量 3 个月损失分布的尾部也在债券违约时出现了极端的损失值, 50 000 次的模拟结果中, 违约事件出现了 204 次。

表6 风险综合度量 VaR 估计结果

Table 6 VaR results of integrated risk measurement

	风险计算期	
	2周	3个月
均值	-0.121 2	-0.770 0
标准差	0.844 6	2.127 0
置信度为95%的VaR	0.352 5	0.382 6
置信度为99%的VaR	0.511 5	0.590 7
置信度为99.5%的VaR	0.568 3	0.662 3
置信度为99.9%的VaR	0.692 2	81.610 9
置信度为99.99%的VaR	81.598 1	82.209 6

比较利率风险独立度量,信用风险独立度量和两类风险的综合度量三种情形下的结果,得出如下观点.

(1) 相同置信度和风险计算期的综合度量 VaR 值要高于利率风险独立度量的 VaR 值

风险综合度量下置信度为 99.99% 的两个风险计算期的 VaR 值和置信度为 99.9% 的 3 个月 VaR 值远大于对应的利率风险独立度量 VaR 值,这是因为风险综合度量方法考虑到了违约风险,即图 6 和图 8 表示的稀有的违约极端损失值,而纯粹的利率风险独立度量就忽视了这一点. 风险综合度量下置信度为 95%、99% 和 99.5% 下的两个风险计算期的 VaR 值和置信度为 99.9% 的 2 周 VaR 值也大于对应的利率风险独立度量 VaR 值,虽然在这些置信度下,稀有的违约事件无重要影响(因为这些置信度小于违约概率),但我们的风险综合度量模型除了考虑利率的随机变化,还考虑了反映信用质量的违约强度的随机变化,其实就是考虑了无风险利率和利差的风险,这使得风险损失分布的更平坦,参见图 3、图 4 和图 5、图 7,这也可反映在表 6 中估计的标准差大于表 2 中对应的标准差.

(2) 相同置信度和风险计算期的综合度量 VaR 值要高于信用风险独立度量的 VaR 值

在信用风险独立度量中,只考虑违约的发生与否而固定住违约之外的其他风险因子——违约概率,违约敞口,违约损失率均不会发生变化,在计算 95%、99% 和 99.5% 这三个置信度下的两个风险计算期的 VaR 值和置信度为 99.9% 的 2 周 VaR 时,稀有的违约事件无重要影响,将 VaR 值设定为 0,风险综合度量模型综合考虑利率和

违约强度的随机变化,计算出的 VaR 值显然会大于 0,由于债券的违约敞口也随机的变动,在稀有的违约事件值得关注时,风险综合度量下置信度为 99.99% 的两个风险计算期的 VaR 值和置信度为 99.9% 的 3 个月 VaR 值也大于对应的信用风险独立度量 VaR 值.

(3) 两类风险和总风险的关系

首先,看到随着风险计算期的延长,利率风险在总风险中起的作用将会变小,对应地,信用风险在总风险中起的作用将会变大,比如置信度为 99.5% 下,风险计算期由 2 周变为 3 个月时,利率风险独立度量 VaR 值由 0.162 0 变为 0.197 6,而风险综合度量 VaR 值由 0.568 3 变为 0.662 3.若简单加和两类风险值,比如加和置信度为 99.99% 的利率独立度量 VaR 和信用风险独立度量 VaR,得到的 2 周 VaR 和 3 个月 VaR 分别为 81.813 2(0.238 3 + 81.574 9) 和 81.815 2(0.311 1 + 81.504 1) 而置信度为 99.99% 的 2 周和三个月的风险综合度量 VaR 值分别为 81.598 1 82.209 6,所以两类风险的简单加总可能由于分散化效果而高估总风险,也可能由于复杂化效果而低估总风险.

4 结束语

相对于传统的不同类风险独立度量方法,也不同于割裂两类风险再进行加总或通过 Copula 函数关联,在风险双因素强度定价模型的基础上,建立了计算可违约零息债券综合风险 VaR 的 Monte Carlo 方法,得出反映两类风险的同一个某风险计算期的损失分布和同一个某置信度的损失分布的分位点,进而能求得风险综合 VaR 值,在同一个框架同时捕捉可违约零息债券的两类风险. 模型考虑了利率和信用质量的随机变动以及两者之间的相关关系,信用风险不仅包括交易对手不能或不愿履行债务合约的违约风险,而且包括了随机的信用质量(违约强度)导致的违约敞口发生的随机变动. 另外,严格按市场回收的假设,模拟计算风险计算期的违约敞口参照的是模拟得到的恰好违约时刻前可违约零息债券的市场价格.

最后运用本文的风险综合度量模型对短期融

资券的综合风险进行计算, 得出风险综合 VaR 值, 并与利率风险独立度量 VaR 值和信用风险独立度量 VaR 值进行比较分析, 数值结果表明: 相同置信度和风险计算期的综合度量 VaR 值要高于利率风险独立度量的 VaR 值, 也高于信用风险独立度量的 VaR 值, 所以忽视一种风险将在一定程度上低估总风险; 随着风险计算期的延长, 利率风险所起的作用减弱, 而起主导作用的是信用风险; 利率风险和信用风险之间存在着分散化效果和复杂化效果, 所以单独考虑纯粹的利

率风险和信用风险, 再进行加总既可能高估也可能低估总风险.

由于综合考虑两类风险, 在风险计算期内对可违约资产重新估值会更加复杂, 依赖于 Monte Carlo 完全模拟的风险综合度量模型计算效率有待改进, 比如可以考虑将重要性抽样技术发展 to 本文的风险综合度量模型中来. 当然, 此模型推广到其它类债券、商业银行贷款、场外衍生品、信用衍生品和可违约资产的组合是很有意义的.

参考文献:

- [1] Breuer T, Jandacka M, Rheinberger K, et al. Does adding up of economic capital for market and credit risk amount to conservative risk assessment? [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2010, 34(4): 703–712.
- [2] Jarrow R, Turnbull S. The intersection of market and credit risk [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2000, 24(1): 271–299.
- [3] Ward L S, Lee D H. Practical Application of the Risk-Adjusted Return on Capital Framework [R]. *Casualty Actuarial Society Forum Casualty Actuarial Society – Arlington, Virginia. Working paper*, 2002. <http://www.casact.org/pubs/forum/02sforum/02sf079.pdf>.
- [4] Dimakos X K, Aas K. Integrated risk modelling [J]. *Statistical Modelling*, 2004, 4(4): 265–277.
- [5] Rosenberg J V, Schuermann T. A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks [J]. *Journal of Financial Economics*, 2006, 79(3): 569–614.
- [6] 史道济, 关静. 沪深股市风险的相关性分析 [J]. *统计研究*, 2003, (10): 45–48.
Shi Daoji, Guan Jing. Analysis of dependence on risk of Shanghai and Shenzhen stock market [J]. *Statistical Research*, 2003, (10): 45–48. (in Chinese)
- [7] 史道济, 王爱莉. 相关风险函数 VaR 的界 [J]. *系统工程*, 2004, 22(9): 42–45.
Shi Daoji, Wang Aili. The bounds of the value-at-risk for functions of dependent risks [J]. *Systems Engineering*, 2004, 22(9): 42–45. (in Chinese)
- [8] Kiesel R, Perraudin W, Taylor A. The structure of credit risk: Spread volatility and ratings transitions [J]. *Journal of Risk*, 2003, 6(1): 1–27.
- [9] Kijima M, Muromachi Y. Credit events and the valuation of credit derivatives of basket type [J]. *Review of Derivatives Research*, 2000, 4(1): 55–79.
- [10] Carling K, Jacobson T, Linde J, et al. Corporate credit risk modeling and the macroeconomy [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2007, 31(3): 845–868.
- [11] Medova E A, Smith R G. A framework to measure integrated risk [J]. *Quantitative Finance*, 2005, 5(1): 105–121.
- [12] 谢云山. 信用风险与利率风险的相关性分析 [J]. *国际金融研究*, 2004, (10): 51–60.
Xie Yunshan. An correlation analysis of credit risk and interest rate risk [J]. *Studies of International Finance*, 2004, (10): 51–60. (in Chinese)
- [13] 梁世栋, 郭欠, 方兆本. 随机违约强度下的信用风险期限结构研究 [J]. *管理科学学报*, 2005, 8(4): 74–79.
Liang Shidong, Guo Bing, Fang Zhaoben. Study of credit risk term structure with stochastic default intensity [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2005, 8(4): 74–79. (in Chinese)
- [14] 郑振龙, 柯鸿, 莫天瑜. 利率仿射模型下的利率风险价格形式实证研究 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(9): 4–15.
Zheng Zhenlong, Ke Hong, Mo Tianyu. Empirical research on specification of interest risk price under framework of affine

- DTSM [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(9): 4–15. (in Chinese)
- [15] 乌 画, 易传和, 杜 军, 等. 基于多元随机波动模型的信用风险衍生定价 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(10): 55–62.
- Wu Hua, Yi Chuanhe, Du Jun, et al. Pricing credit risk with multivariate stochastic volatility model [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(10): 55–62. (in Chinese)
- [16] 陆金荣, 陈荣达. 一个可违约零息债券双因素强度定价模型及其极大似然估计 [J]. *系统工程*, 2010, 28(11): 21–25.
- Lu Jinrong, Chen Rongda. A two-factor intensity pricing model for defaultable bonds and its maximum likelihood estimation [J]. *Systems Engineering*, 2010, 28(11): 21–25. (in Chinese)
- [17] Rouvinez C. Going Greek with VaR [J]. *Risk*, 1997, 2: 57–65.
- [18] Merino S, Nyfeler M. Calculating portfolio loss [J]. *Risk*, 2002, 8: 82–86.
- [19] Reiß O. *Mathematical Methods for the Efficient Assessment of Market and Credit Risk* [D]. Kaiserslautern: Department of Mathematics, University of Kaiserslautern, 2003.
- [20] Grundke P. Computational aspects of integrated market and credit portfolio models [J]. *OR Spectrum*, 2007, 29: 259–294.
- [21] Duffie D, Singleton K. Modeling term structures of defaultable bonds [J]. *Review of Financial Studies*, 1999, 12: 687–720.
- [22] Duffie D, Gârleanu N. Risk and valuation of collateralized debt obligations [J]. *Financial Analysts Journal*, 2001, 57(1): 41–59.
- [23] Duffie D, Singleton K. *Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management* [M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003.

A Monte Carlo method of integrated risk measurement for defaultable zero-coupon bonds

CHEN Rong-da, LU Jin-rong

School of Finance, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018, China

Abstract: Defaultable zero-coupon bonds face default risk and market risk (interest rate risk) simultaneously. Unlike the traditional approach of measuring different risks separately, two different types of risks fragmenting further totaling or the way to connect the two types of risks with Copula functions, this paper proposes a Monte Carlo method of calculating integrated-risk VaR for defaultable bonds under the frame of the intensity pricing model, considering credit risk, market risk and relation of the two types of risks. We find one loss distribution that reflects the two types of risks in a same risk horizon and one quantile with a same confidence level, furthermore, we can get integrated-risk VaR value and capture simultaneously the two types of risks of the defaultable zero-coupon bond under the frame. The concrete technical detail for Monte Carlo simulations method is presented, including the simulation of default time and the basic state vector processes. Finally, we illustrate the application of the integrated-risk measurement model to compute the integrated-risk VaR of Short-term Commercial Paper, also, we measure the credit risk and the interest risk separately, and analyze comparatively the VaR values of the pure interest risk, pure credit risk and integrated-risk.

Key words: default intensity; integrated risk measurement; Monte Carlo simulation; VaR; defaultable zero-coupon bond