第 15 卷第 6 期
2012 年 6 月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 15 No. 6
Jun. 2012

同质时鲜产品捆绑销售的最优策略①

魏 航
(上海财经大学国际工商管理学院,上海 200433)

摘要: 由于时鲜产品具有十分显著的时效性,为了更快地将时鲜产品销售出去,很多零售商采用了捆绑销售的方式. 研究了同质时鲜产品捆绑销售的最优策略问题,对同质时鲜产品捆绑销售的最优价格、最优临界时间以及最优数量决策问题进行了描述,并利用随机效用理论建立了 MNL 模型. 获得了同质时鲜产品捆绑销售单变量决策的最优价格、最优临界时间和最优数量,以及相应的最大利润. 进而研究了同质时鲜产品捆绑销售的双变量组合决策问题,并给出了最优双变量组合决策和条件. 最后,给出了一个算例,并分析了捆绑销售中价格、数量与时间之间的关系.

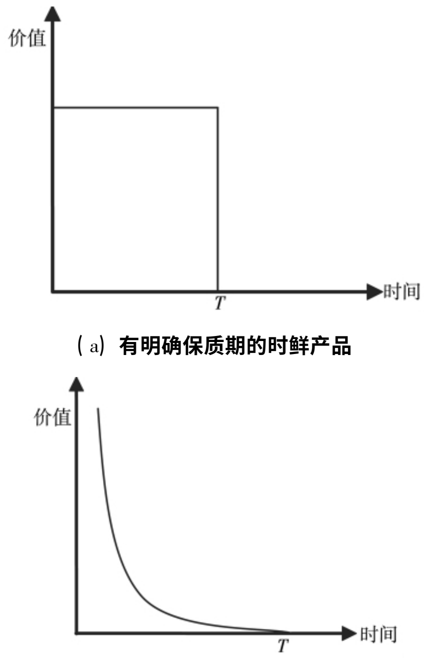
关键词: 时鲜产品; 捆绑; MNL 模型; 价格; 时间; 数量

中图分类号: F724.2　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1007 - 9807(2012)06 - 0007 - 15

0 引 言

在现实生活中,需要消费大量的时鲜产品. 时鲜产品是指那些随着时间增加不断变质,并导致其价值不断递减的物品,主要包括活海鲜、水果、牛奶、农产品、鲜花等. 在中国,1990—2008 年之间,时鲜产品消费量的增长率达到了 8—26%; 仅 2003 年,肉、菜、禽蛋、奶类、水产品和水果 6 大类时鲜产品的产值占到了农业生产总值的 52%,生鲜类食品的消费量达到了 2.4 亿 t[1,2]. 并且,随着中国经济的发展,时鲜产品的消耗量还在迅速增长.

通常,按照时鲜产品的特点,可以将时鲜产品分为两大类: 第一类为有明确保质时间(T) 期限的时鲜产品,在此保质时间之前,时鲜产品为有效产品,而在此时间之后,时鲜产品为无效产品,价值瞬间递减为 0,如图 1(a) 所示. 这类产品主要包括如牛奶、新鲜果汁等; 第二类为新鲜程度随时间不断递减并不断腐烂变质的时鲜产品,此类时鲜产品的价值会随着时鲜产品的新鲜度的降低而降低,甚至腐烂而递减为 0,如图 1(b) 所示. 这类产品主要包括海鲜、水果、鲜花等.



(a) 有明确保质期的时鲜产品

(b) 无明确保质期的时鲜产品

图 1　时鲜产品的使用价值变化

Fig. 1 The value changing of fresh product

① 收稿日期: 2010 - 03 - 29; 修订日期: 2011 - 02 - 14.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70872068); 上海财经大学“211 工程”三期重点学科建设资助项目.
作者简介: 魏 航(1976—),男,浙江绍兴人,博士,副教授. Email: odeywei@ yahoo. com. cn

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由于时鲜产品具有十分显著的时效性，如何快速地将时鲜产品进行销售吸引了零售商的关注. 捆绑销售是一种经常使用的促销方式，它是将产品打成一个包裹以一个价格出售. 通过批量的销售方式，一方面可以帮助厂商和零售商缓解库存的压力，另一方面还降低了产品不能出售的可能性. 同时，由于捆绑的价格一般低于单独购买的价格，因此得到了大量消费者的青睐. 由于时鲜产品的特殊性，在时鲜产品的销售中，更是大量使用捆绑销售的方式，以实现零售商以更快的速度将更多的时鲜产品销售出去.

对于时鲜产品捆绑销售问题的研究，主要涉及到捆绑销售基本理论、时鲜产品定价和时鲜产品捆绑销售三个方面的相关研究，对于目前已有研究的回顾也从这三个方面进行.

有关捆绑销售基本理论的研究，主要涉及到一般的捆绑销售理论、零售商的最优捆绑策略和消费者选择行为三个方面. 1） 对于一般的捆绑销售理论，Stigler[1] 将需求细分到明确的顾客，分析了捆绑销售对于顾客与厂商的影响. Adams，Yellen[2] 研究了垄断型公司同时提供捆绑销售和单独销售的最优策略问题，给出了捆绑组合的最优定价，并与单独销售情况下的利润进行了对比. Bakos，Brynjolfsson[3] 研究了垄断情况下多信息产品的捆绑问题，发现进行不相关产品的大量捆绑销售有利于获取高额的利润. 曹洪[4，5] 对捆绑销售的内涵及形式、实质及其实施条件、利弊、社会福利等作了详细的分析. 彭赓，寇纪淞，李敏强[6] 在低边际生产成本情况下，研究了信息商品的捆绑销售与定价策略. 2） 对于零售商最优捆绑策略的选择方面，Hanson，Martin[7] 以利润最大化为目标，建立了确定捆绑组合最优价格的数学模型，并获得了最优价格策略. Venkatesh 等[8] 研究了时间和金钱对消费者决策的影响，给出了捆绑销售和单个销售的最优价格策略. Fuerderer 等[9] 在保留价格和顾客选择行为均不确定的情况下，研究了单个厂商的最优化产品线设计和定价策略. Chung，Rao[10] 根据不同产品的市场细分，获得了不同市场细分下的最优捆绑组合. Shugan，Radas[11] 针对高峰和非高峰需求的明显差异性，通过捆绑策略进行了需求容量管理，提升了服务质量和收益. 3） 对于捆绑销售对消费者购买行为的影响方面，Yadav，Kent[12]，Yadav[13] 首先研究了消费者对于捆绑销售产品的评价，分析了在单独销售和捆绑销售下消费者的消费者剩余. 刘会燕[14] 总结了影响消费者选择时鲜产品的主要因素，主要包括: 商品的安全性、商品的新鲜度以及其它因素.

其次，关于时鲜产品的价格、库存(数量) 、运输等最优决策问题，Chun[15] 考虑了正常销售期内顾客到达率、顾客总量和顾客感知价值等因素，通过建立相关需求函数，获得了不同阶段下时鲜产品的最优价格决策. Chang 等[16] 建立了允许缺货的 n 阶段时鲜产品库存模型，给出了确定最优价格的算法. Li[17] 从生产商角度出发，研究了在垄断市场环境下，考虑购买约束条件下，时鲜产品的定价问题. 李军，蔡小强[18] 分析易腐性产品运输中的损失价值和运输费用的分配问题，并讨论了解的特征.

最后，对于时鲜产品的捆绑销售问题，唐磊等[19] 在微生物生长预测模型和消费者市场有效划分的基础上，建立了基于货架期的易腐食品捆绑销售模型，并给出了不考虑货架期情况下和在同种易腐食品具有 2 种货架期的情况下，零售商实施捆绑销售的盈利条件.

由于在捆绑组合中，常见的一种组合为同质多件产品进行捆绑销售. 比如: 超市中常常将 3 瓶酸奶捆绑销售，或是将 12 瓶啤酒捆绑销售. 同时，许多产品的上市时间、出厂时间或是零售商购买时间或批量具有统一性，或是同样的新鲜程度②. 因此，需要研究捆绑组合为同质多件时鲜产品捆绑组合的最优策略问题. 显然，对于同质时鲜产品

② 否则，对于同一个零售商，若是同时存在不同出厂时间的时鲜产品，在同一价格下，消费者永远不会选择出厂时间久的产品. 这样的产品最后只有丢弃，零售商会遭受巨大损失; 其次，零售商的另外一种策略是对不新鲜的时鲜产品进行降价销售，吸引消费者购买(对此，不属于捆绑销售的问题，Chun 已经进行了讨论[15]) . 因此，在捆绑销售中，零售商常常给出能够选择的时鲜产品具有基本统一的新鲜度，或是人为地造成所出售的时鲜产品具有同一的新鲜度，比如: 有时将某一批具有同样出厂时间的产品进行一定时间的销售，而不将更为新鲜的时鲜产品与不是非常新鲜的时鲜产品进行同时销售(即便此时零售商已经具有非常新鲜时鲜产品的现货) . 因此，很多时候零售商销售的时鲜产品具有同一的出厂时间(比如: 在超市的酸奶购买点，顾客能够选择的酸奶通常具有同一个出厂日期) .

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

进行捆绑销售时，如何确定合适的价格、捆绑数量和临界捆绑时间成为非常重要的问题，否则，一旦捆绑价格、数量和时间不合理，可能导致厂商或是零售商的利润损失.

本研究首先对同质时鲜产品捆绑销售的最优捆绑价格、最优捆绑临界时间以及最优捆绑数量问题进行了描述，并利用 multinomial logit 模型对消费者选择时鲜产品的概率进行了度量，获得了时鲜产品捆绑销售相应的单变量和双变量组合最优策略. 最后给出了一个算例，并分析了捆绑价格、捆绑数量与捆绑时间之间的关系.

1　问题描述

时鲜产品零售商在面临捆绑销售决策的时候，经常面临着这样的问题: 当采购了一批时鲜产品并进行销售之后，时鲜产品的新鲜程度会随着时间的流逝而逐渐降低，若是仍然以原有时鲜产品的价格进行销售，对于消费者的吸引力将越来越弱. 为了更好地将时鲜产品销售出去，零售商往往会将一定数量的同质时鲜产品进行捆绑销售，显然，如何确定合适的捆绑时间、捆绑数量和捆绑价格，以更好地将产品进行快速销售出去，并获取最大的利润，成为非常重要的问题. 当然，零售商需要比较在单独销售相同数量产品时的利润③，只有当捆绑组合所得的利润大于单独销售的利润时，其最优捆绑策略才是有意义的.

在此，为了简化问题的复杂度，没有考虑与其他产品存在竞争的情况，且只考虑一种产品，即为同质时鲜产品. 消费者通常主要关心时鲜产品的价格、新鲜程度(生产时间和到期时间) 以及捆绑销售的数量. 因此，进行如下假设

假设 1　消费者的偏好是同质的;

假设 2　只有在零售商捆绑销售的利润大于单独销售同等数量的产品时，捆绑销售才有意义;

假设 3　捆绑组合的时鲜产品是同质的，也就是时鲜产品的时间、单价、价值等都是相同的;

假设 4　对于零售商来说，零售商的目的就是实现自身利润最大化;

假设 5　对于消费者而言，面对一个特定的捆绑组合，消费者有三种选择: 购买捆绑组合，不购买，单独购买同等数量的产品.

这样，需要解决的问题可以表示为: 在假设 1—5 的情况下，零售商对同质多件时鲜产品进行捆绑销售，以自身达到利润最大化为目标，如何确定给定同质捆绑组合的最优捆绑价格、最优捆绑临界时间以及最优捆绑数量问题.

2　多项式 logit 模型

对于同质时鲜产品的捆绑销售，如何度量捆绑组合对于消费者的吸引力成为非常重要的问题. 现代经济学选择理论认为消费者按照偏好最大化的要求实施市场行为. 偏好是由感知、态度和其它难以测量的因素的变动所产生的随机成分组成的[20]. McFadden[20]在以往研究的基础上提出了基于随机效用理论的离散选择模型: 多项式 logit 模型(multinomial logit model，MNL) ，这一模型在经济学和营销科学中得到了广泛的采用和借鉴.

显然，同质时鲜产品捆绑销售时，也涉及到消费者选择的问题. 因此，也可以利用 MNL 模型对其效用进行度量，以获得其选择捆绑组合的概率，相应地可以获得零售商的期望利润，并对其需要的最优决策进行分析.

2.1　MNL 基本模型[20]

MNL 模型的行为理论基础是随机效用理论，认为人们在做决策的时候都是按照效用最大化的原则进行的[20]. 消费者在选择购买某一类别的商品时通常需要面对多个不同的商品，这些商品构成一个选择集合，通常用集合 C 来表示. 消费者只会购买选择其中效用最大的商品. 在此，假设消费者从商品 j 所获得的效用表示为 U_j，$j \in C$. 消费者选择商品 j 必须满足的条件是: $U_j > U_i$，其中 i，$j \in C$，$i \neq j$.

③　由于顾客在购买时鲜产品时，选择的数量具有不确定性. 为了能够对比捆绑销售与非捆绑销售之间利润的情况，在此，选择了顾客购买时鲜产品的数量相等作为参考对象. 否则，若是对应于消费者可以购买不同数量的时鲜产品，消费者的效用也会完全不同，与捆绑销售的效用不具有可比性，产生的结果也会有所不同. 因此，作为对照组，选择消费者购买同样数量的时鲜产品.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

MNL 模型假设 1 对于消费者而言，j 产品的效用可以分解成两部分，如下所示

$$U_j = V_j + \varepsilon_j \tag{1}$$

其中，V_j 是效用的确定部分（deterministic component），由可观察到的与产品属性的有关特征. ε_j 是产品效用的随机部分（random component），指不可观测变量表示出来效用. 显然，$U_j \neq V_j$，确定部分效用与全部效用之间的差就是效用的随机部分.

MNL 模型假设 2 按照随机效用理论，消费者将选择其集合中效用最大的产品，在选择集合 C 中，消费者购买商品 j 的概率可以表示为

$$q_j = q(U_j > U_i, i, j \in C, i \neq j) \tag{2}$$

将式(1)代入式(2)中，整理得到

$$q_j = q(\varepsilon_i - \varepsilon_j < V_j - V_i, i, j \in C, i \neq j) \tag{3}$$

MNL 模型假设 3 对于效用的随机部分 ε，MNL 模型有两个假设如下

1) ε_j 是独立分布的随机变量;

2) 概率变量服从双重幂函数概率分布（double exponential distribution），如下所示

$$q_j = q(\varepsilon_j \leqslant \varepsilon) = \mathrm{e}^{-e^{-\varepsilon}}, -\infty < \varepsilon < \infty \tag{4}$$

这样，基于以上三个假设的成立，可以把消费者选择商品 j 的概率表示为如下简单的公式[19]

$$q_j = \mathrm{e}^{V_j} \Big/ \sum_{i \in C} \mathrm{e}^{V_i}, j \in C \tag{5}$$

其中，式(5)的分子是商品 j 决定部分效用的幂函数，分母是选择集合中所有商品决定部分效用函数的和.

通过这样的方式，效用的随机部分已经不复存在，这样就大大地简化了选择概率的计算过程. 效用的决定部分是由可观察到商品的有关变量、消费者的有关变量以及其它变量共同决定的，通常是采用线性方程来表示这些变量与效用之间的关系.

2.2 时鲜产品捆绑销售 MNL 模型

在给出了基本的 MNL 模型之后，就可以进行时鲜产品捆绑销售的 MNL 模型的讨论. 由于时鲜产品的独特性，即时间的推进对于产品价值具有重要的影响，因此，首先需要获得其价值递减规律. 由于每个消费者心理所认可的易腐品价值变化的函数是难以估计出来的，所以可以采用产品生命周期变化的函数来近似拟合消费者心理对于产品价值认知的函数. 目前常见的拟合产品生命周期的曲线主要利用指数多项式函数拟合易腐品随着时间推移产品价值变化的规律，即可以表示为 $f(t) = \mathrm{e}^{-bt}$ 来拟合产品随着时间推移的价值变化，b 为价值递减参数，且 $b > 0$[21].

这样，对于一般的时鲜产品捆绑销售问题，可以描述为：对于给定的 M 种时鲜产品，零售商可以将其捆绑为 K 个捆绑组合. 对于给定的一个捆绑组合 X_k，X_k 可以表示为$(a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kM})$，由 M 种产品组成，其中 a_{km} 表示在 X_k 组合中第 m 种产品的数量，$a_{km} \geqslant 0$ 且为整数，$k = 1, 2, \cdots, K$，$m = 1, \cdots, M$. 现设 X_k 以价格 p_k 出售，并令 β 表示价格 p_k 对于消费者效用的影响系数，I_m 代表产品 m 对消费者的吸引力值，I_{X_k} 是捆绑组合 X_k 中产品价值的加总. 这样，根据 MNL 模型，对于一个特定的捆绑组合 X_k，消费者选择组合 X_k 的概率为

$$q(p_k, X_k) = \mathrm{e}^{V_k(p_k, X_k)} \Big/ \sum_{k=1}^{K} \mathrm{e}^{V_k(p_k, X_k)} \tag{6}$$

其中，$V(p_k, X_k) = I_{X_k} - \beta p_k$，$I_{X_k}$ 为捆绑组合 X_k 中产品价值的加总，β 表示价格 p_k 对于消费者效用的影响系数④. $I_{X_k} = \sum_{m=1}^{M} a_{km} f(t_m) I_m$，$I_{X_k}$ 为捆绑组合 X_k 中产品价值的加总⑤. 组合 $X_k = (a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kM})$ 对于消费者的效用可以表示为 I_{X_k} 的形式，$k = 1, 2, \cdots, K$.

这样，零售商以价格 p_k 捆绑销售组合 X_k 的利润可以表示为

$$\pi_k(p_k) = q_k(p_k, X_k)(p_k - c_{X_k})$$

④ 一般地，对于消费者而言，其购买一个或一组产品的效用由两个方面组成，获得的效用与支出. 其购买捆绑组合 X_k 的产品价值为 I_{X_k}，其支出的价格为 p_k，价格与效用之间的转换系数为 β. 因此，此时消费者获得的效用可以表示为 $V(p_k, X_k) = I_{X_k - \beta p_k}$.

⑤ 根据 Hanson，Martin[7] 对于捆绑组合价值的研究，一般地，对于同类产品，捆绑组合产品价值可以通过单个产品价值的线性相加进行表示. 因此，I_{X_k} 的意义为将捆绑中所有 m 类产品的价值进行加总. 其中，对于第 m 类产品，捆绑组合 X_k 中包含 a_{km} 个产品，且在时间 t_m 其价值为 $f(t_m)$，产品 m 对消费者的吸引力值为 I_m，其产品价值可以表示为 $a_{km} f(t_m) I_m$. 相应地，可以得到 I_{X_k} 的表达式.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$= \frac{e^{V_k(p_k, X_k)}}{\sum_{k=1}^{K} e^{V_k(p_k, X_k)}} (p_k - c_{X_k}) = \frac{e^{\sum_{m=1}^{M} a_{km} e^{-bt_m} I_m - \beta p_k}}{\sum_{k=1}^{K} e^{\sum_{m=1}^{M} a_{km} e^{-bt_m} I_m - \beta p_k}} (p_k - c_{X_k}) \tag{7}$$

其中，c_{X_k} 为捆绑组合 X_k 的成本.

3　最优捆绑策略

通过对同质时鲜产品捆绑销售最优策略问题的描述，以及 MNL 模型进行说明之后，就可以对同质时鲜产品捆绑销售最优捆绑价格、捆绑最优临界时间以及最优捆绑数量问题进行分析和求解. 为了与捆绑销售的情况有可比性，在进行利润比较时，假定消费者单独购买也是购买与捆绑组合同等数量的时鲜产品.

下面，首先对涉及的符号和变量进行描述，然后对捆绑销售和单独销售下的利润进行了讨论，分别研究了同质时鲜产品捆绑销售最优价格、最优临界时间以及最优数量的单变量决策问题，给出了最优决策和条件，进而研究了同质时鲜产品捆绑销售的双变量组合决策问题，并给出了最优双变量组合决策和条件.

3.1　符号描述

首先，给出对涉及的一些变量与符号的定义

π_1 表示捆绑销售时零售商的利润;

π_2 表示单独销售时零售商的利润;

q_1 表示消费者选择捆绑组合的概率($q_1 \geqslant 0$);

q_2 表示消费者选择单独销售同等数量产品率($q_2 \geqslant 0$);

b 表示产品的时间敏感系数($b > 0$);

β 表示产品的价格敏感系数($\beta > 0$);

t 表示产品所对应的离出厂时间，并设出产时间为 0($0 \leqslant t \leqslant T$，$T$ 为产品的生命周期);

p 表示捆绑组合的价格($0 < p \leqslant ap_0$);

p_0 表示单独销售时单位产品的价格($c < p_0$);

r 表示不购买产品时对于消费者的保留价值($r > 0$);

I 表示单位产品的价值($I \geqslant p_0$);

a 表示捆绑组合中产品的数量($a = 1, 2, \cdots, A$，A 为进行捆绑销售的数量上限);

c 表示单位产品的成本($0 < c < p_0$).

3.2　利润分析

根据给出的关于时鲜产品捆绑销售的描述，对于给定的一种同质时鲜产品捆绑组合，其捆绑的时间、数量以及价格参数分别为: 离出厂时间为 t，a 个完全相同的时鲜产品，以价格 p 进行出售. 这样利用给出的时鲜产品捆绑销售的 MNL 模型，可以得到消费者购买此捆绑组合的概率为

$$q_1(p) = \frac{e^{aIe^{-bt} - \beta p}}{e^{aIe^{-bt} - \beta p} + e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt} - \beta p_0)}} \tag{8}$$

这样，在捆绑销售情况下，零售商利润可以表示为

$$\pi_1(p) = q_1(p)(p - ac) = \frac{e^{aIe^{-bt} - \beta p}}{e^{aIe^{-bt} - \beta p} + e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt} - \beta p_0)}}(p - ac) \tag{9}$$

其次，若零售商没有采用捆绑销售的方式，那么消费者只有两种选择: 不购买和单独购买. 为了与捆绑销售的情况有可比性，在进行利润比较时，假定消费者单独购买也是购买与捆绑组合中同等的数量，在这种情况下，消费者选择该产品的概率为

$$q_2 = \frac{e^{a(Ie^{-bt} - \beta p_0)}}{e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt} - \beta p_0)}} \tag{10}$$

因此，在单独销售的情况下，零售商利润可以表示为

$$\pi_2(p) = q_2(p)(p_0 - c)a = \frac{e^{a(Ie^{-bt} - \beta p_0)}}{e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt} - \beta p_0)}}(p_0 - c)a \tag{11}$$

3.3　最优价格、时间与数量策略

在获得了相应的利润函数之后，下面将对零售商的最优捆绑价格、最优捆绑临界时间以及最优捆绑数量策略进行讨论，给出了相应的最优策略和满足条件.

3.3.1　最优捆绑价格

对于时鲜产品进行捆绑销售时，如何确定合适的捆绑价格成为非常重要的问题. 一旦捆绑价格不合理，可能导致零售商的利润损失. 因此，以最大化零售商的期望利润为目标，确定捆绑销售离出厂时间为 t 时 a 个完全相同的时鲜产品的最优销售价格 p^*. 根据捆绑销售的利润情况，可以给出定理 1，获得最优销售价格 p^*.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

定理 1 若在离出厂时间为 t 时，对 a 个完全相同的时鲜产品进行捆绑销售，则存在唯一的最优捆绑销售价格 $p^* = ac + \frac{1}{\beta}\left(1 + \omega\left(\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}}{e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}\right)\right)$，且此时零售商获得最大利润 $\pi_1^* = \frac{1}{\beta}\omega\left(\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}}{e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}\right)$.

证明 首先，证明存在最优的捆绑销售价格 p^*.

对式(9)求一阶导数得到

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p} = q(-\beta(1-q)(p-ac)+1) \tag{12}$$

令 $\frac{\partial}{\partial p}\pi_1 = 0$，意味着 $q = 0$，或 $-\beta(1-q)(p-ac)+1 = 0$. 如果 $q = 0$，意味着 p 是趋向无穷大的值，显然没有意义. 因此，必须是 $-\beta(1-q)(p-ac)+1 = 0$ 成立，从而得到

$$q = \frac{\beta(p-ac)-1}{\beta(p-ac)} \tag{13}$$

因此，可以得到

$$\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta p}}{e^{aIe^{-bt}-\beta p} + e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}} = \frac{\beta(p-ac)-1}{\beta(p-ac)} \tag{14}$$

从式(14)可以求出唯一的 p^* 为[⑥]

$$p^* = ac + \frac{1}{\beta}\left(1 + \omega\left(\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}}{e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}\right)\right) \tag{15}$$

其中，$\omega(\cdot)$ 是 ω 函数[⑦].

同时，将最优的 p^* 代入式(13)和式(9)中，求得最优的 q^* 和 π_1^*.

$$q^* = \omega\left(\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}}{e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}\right) \Bigg/ \omega\left(\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}}{e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}\right) + 1 \tag{16}$$

$$\pi_1^* = \frac{1}{\beta}\omega\left(\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}}{e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}\right) \tag{17}$$

其次，来证明 p^* 的唯一性.

通过对式(9)求二次偏导可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial p^2} &= \frac{\partial}{\partial p}q(-\beta(1-q)(p-ac)+1) \\ &= \beta^2(1-q)(1-2q)q(p-ac) - \\ &\quad 2\beta q(1-q)\end{aligned} \tag{18}$$

从式(12)表明，存在两个极值点，一个是在 p 趋向无穷大的点，一个是所求的 p^*. 式(18)若大于等于零，则说明这个点是最小值，否则是极大值. 若 $\partial^2\pi_1/\partial p^2 \geqslant 0$，则式(18)可以写成

$$\begin{aligned}&\beta^2(1-q)(1-2q)q(p-ac) - \\ &\quad 2\beta q(1-q) \geqslant 0\end{aligned} \tag{19}$$

即有

$$\frac{\beta(p-ac)(1-2q)}{2} \geqslant 1 \tag{20}$$

当 p 趋向于无穷大的时候，式(20)是恒成立的. 将 p^* 代入到式(18)中去，得到

$$\begin{aligned}&\beta^2(1-q^*)(1-2q^*)q^*(p^*-ac) - \\ &\quad 2q^*(1-q^*)\beta \leqslant 0\end{aligned} \tag{21}$$

即有 $\beta(p^*-ac)(1-2q^*)-2 \leqslant 0$，将 $p^* = ac + \frac{1}{\beta}(1+\omega(z))$，$q^* = \frac{\omega(z)}{\omega(z)+1}$ 代入可以得到

$$\beta\left(ac + \frac{1}{\beta}(1+\omega(z)) - ac\right) \times \left(1 - 2\frac{\omega(z)}{\omega(z)+1}\right) - 2 \leqslant 0 \tag{22}$$

化简得到，只要 $\omega(z) \geqslant -1$ 则上式成立. 根据朗伯函数的特性，当 $z > 0$ 的时候，$\omega(z) > 0$，所以由此可证驻点 p^* 处的二阶导数小于零，目标函数值是极大值. 证毕.

3.3.2 最优临界捆绑时间

在时鲜产品捆绑销售中，由于时鲜产品是有销售周期的，如果捆绑时间过早，单独销售获得的利润比捆绑销售好，这样会损失一部分的利润；如果捆绑时间过晚，消费者的购买意愿降低，产品会

---

⑥ 设 $Y = e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}$，则可以得到 $e^{aIe^{-bt}-\beta p} = Y(\beta p - \beta\alpha c - 1)$. 同时，设 $X = \beta p - \beta\alpha c - 1$，则有 $p = ac + \frac{X+1}{\beta}$. 将 p 代入 $e^{aIe^{-bt}-\beta p} = Y(\beta p - \beta\alpha c - 1)$，得 $e^{aIe^{-bt}-\beta p} = e^{aIe^{-bt}-\beta ac-X-1} = e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}e^{-X} = YX$，$e^X X = \frac{e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}}{Y}$. 根据 $\omega(z)e^{\omega(z)} = z$，则 $z = \frac{e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}}{Y}$，$X = \omega(z)$. 则有 $X = \omega\left(\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}}{Y}\right) = \omega\left(\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}}{e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}\right) = \beta p - \beta\alpha c - 1$. 因此，可以得到 $p = ac + \frac{1}{\beta}\left(\omega\left(\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta ac-1}}{e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}\right)+1\right)$.

⑦ 朗伯 ω 函数，又称为“欧米加函数”或“乘积对数”，是 $f(\omega) = \omega e^{\omega}$ 的反函数. 其中 e^{ω} 是指数函数，ω 是任意复数. 对于任何复数 z，都有 $z = \omega(z)e^{\omega(z)}$.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

有卖不出去的可能性，导致利润降低. 所以寻找最优的临界捆绑时间对于零售商来说是个非常重要的决策.

显然，由于时鲜产品的时效性，在给定价格的情况下，越新鲜的产品，消费者更愿意购买，所以零售商的利润是一个随着时间递增而递减的函数. 当 $t = 0$ 时，消费者购买的概率越高，零售商的利润也越大. 因此，捆绑销售的最优临界时间 t^* 是出现在一个时刻点，即最优临界时间，从这个点开始在一段期间内捆绑销售下的利润高于单独销售情况下的利润. 这样，需要决策的问题是: 以最大化零售商的利润为目标，需要确定将 a 个完全相同的时鲜产品并以价格 p 进行捆绑销售的最优临界时间 t^*.

由于 π_1 和 π_2 都是关于 t 单调递减函数⑧，同时当时鲜产品新鲜程度较高时，单独销售的利润 π_2 高于捆绑销售的利润 π_1，由于 π_2 随着时间递增而下降速度较 π_1 更快，因此最优的临界捆绑时间 t^* 一定出现在 $\pi_1 = \pi_2$ 时，在此时间之后捆绑销售的利润 π_1 高于单独销售的利润 π_2. 这样就可以给出定理 2.

定理 2　对 a 个完全相同的时鲜产品，并以价格 p 进行销售，其进行捆绑销售的最优临界时间为

$$t^* = \Big\{\ln aI - \ln\{\ln[(p-ac)e^{\beta(p-ap_0)} - (p_0-c)a] + ar - \ln\{(p_0-c)ae^{-\beta p} - [(p-ac)e^{\beta(p-ap_0)} - (p_0-c)a]e^{a\beta p_0}\}\}\Big\}/b,$$

且对所有的 $t^* < t \leqslant T$，均有 $\pi_1 > \pi_2$，即捆绑销售严格好于非捆绑销售.

证明　显然，进行捆绑销售的最优临界时间 t^* 应该满足 $\pi_1 = \pi_2$，即有

$$q_1(t)(p-ac) = q_2(t)(p_0-c)a \tag{23}$$

可以得到

$$\frac{(p_0-c)a}{(p-ac)e^{\beta(p-ap_0)}} = \left(1 - \frac{e^{aIe^{-bt}-\beta p}}{e^{aIe^{-bt}-\beta p} + e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}\right) \tag{24}$$

因此有

$$e^{aIe^{-bt}-\beta p}(p-ac)e^{\beta(p-ap_0)} = [(p-ac)e^{\beta(p-ap_0)} - (p_0-c)a][e^{aIe^{-bt}-\beta p} + e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}] \tag{25}$$

根据上式可以得到

$$(e^{Ie^{-bt}})^a\{(p_0-c)ae^{-\beta p} - [(p-ac)e^{\beta(p-ap_0)} - (p_0-c)a]e^{a\beta p_0}\} = [(p-ac)e^{\beta(p-ap_0)} - (p_0-c)a]e^{ar} \tag{26}$$

对等式两边分别取对数可以得到

$$aIe^{-bt} + \ln\{(p_0-c)ae^{-\beta p} - [(p-ac)e^{\beta(p-ap_0)} - (p_0-c)a]e^{a\beta p_0}\} = \ln[(p-ac)e^{\beta(p-ap_0)} - (p_0-c)a] + ar \tag{27}$$

可以解得

$$t^* = \Big\{\ln aI - \ln\{\ln[(p-ac)e^{\beta(p-ap_0)} - (p_0-c)a] + ar - \ln\{(p_0-c)ae^{-\beta p} - [(p-ac)e^{\beta(p-ap_0)} - (p_0-c)a]e^{a\beta p_0}\}\}\Big\}/b \tag{28}$$

其次，对所有的 $t^* < t \leqslant T$，由于 π_1 与 π_2 为单调递减函数，且根据所获得的 t^* 为唯一解. 因此，必定有 $\pi_1 > \pi_2$，否则，还会存在其他的 t^* 使得 $\pi_1 = \pi_2$. 因此，可以得到对所有的 $t^* < t \leqslant T$，$\pi_1 > \pi_2$，即捆绑销售严格好于非捆绑销售.　　　　证毕.

3.3.3　最优捆绑数量

对于时鲜产品零售商而言，还会碰到当捆绑价格和捆绑时间确定的情况下，如何选择捆绑数量的难题. 显然，如果捆绑的数量太少，对于消费者的吸引力不够，消费者会选择单独购买产品或者不购买; 在捆绑价格既定的情况下，若捆绑的数量越多，对于消费者而言吸引力更大，但对于零售商来说，捆绑数量太多，会导致利润的减少. 需要以零售商的利润最大化为目标，确定捆绑销售离

---

⑧　对 π_1 进行求导，可以得到 $\frac{\partial\pi_1}{\partial t} = q_1'(t)(p-ac) = \left(\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta p}}{e^{aIe^{-bt}-\beta p} + e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}\right)'(p-ac)$. 记 $M = e^{aIe^{-bt}-\beta p} + e^{ar} + e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}$，则可以得到 $\frac{\partial\pi_1}{\partial t} = \frac{(e^{aIe^{-bt}-\beta p})'M - M'(e^{aIe^{-bt}-\beta p})}{M^2}(p-ac)$. 即有 $\frac{\partial\pi_1}{\partial t} = \frac{(e^{aIe^{-bt}-\beta p})aIe^{-bt}(-b)M - [aIe^{-bt}(-b)(e^{aIe^{-bt}-\beta p}) + aIe^{-bt}(-b)e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}]e^{aIe^{-bt}-\beta p}}{M^2}(p-ac)$. 化简得到 $\frac{\partial\pi_1}{\partial t} = \frac{(e^{aIe^{-bt}-\beta p})aIe^{-bt}(-b)e^{ar}}{M^2}$. 因为 $b > 0$，$M^2 > 0$，可以得到 $\frac{\partial\pi_1}{\partial t} < 0$，所以 π_1 是关于 t 的单调递减函数. 同理，可以证明 π_2 也是关于 t 的单调递减函数.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

出厂时间为 t 时并以价格 p 进行捆绑销售的最优捆绑数量 a^*.

这样，根据零售商的捆绑销售下的利润情况可以给出定理 3

定理 3 对离出厂时间为 t 的时鲜产品，给定销售价格为 p 的情况下，其进行捆绑销售的最优数量 a^* 必定满足 $\ln[(p-ac)Ie^{-bt}-(p-ac)r-c]+ar=\ln[-(p-ac)\beta p_0 e^{-a\beta p_0}+ce^{-\beta p}+ce^{-a\beta p}]+aIe^{-bt}$.

证明 在给定离出厂时间为 t 的时鲜产品，销售价格为 p 的情况下，零售商的捆绑销售下的利润为

$$\pi_1(a)=q_1(a)(p-ac)=\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta p}}{e^{aIe^{-bt}-\beta p}+e^{ar}+e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}(p-ac) \tag{29}$$

对上式关于 a 求偏导，得

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a}=q_1'(a)(p-ac)-qc=0 \tag{30}$$

记 $M=e^{aIe^{-bt}-\beta p}+e^{ar}+e^{a(Ie^{-bt}-\beta p)}$，可以得到

$$\frac{(e^{aIe^{-bt}-\beta p})'M-M'e^{aIe^{-bt}-\beta p}}{M^2}(p-ac)-\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta p}}{M}c=0 \tag{31}$$

对上式进行处理可以得到

$$[(p-ac)Ie^{-bt}-(p-ac)r-c](e^r)^a=[-(p-ac)\beta p_0 e^{-a\beta p_0}+ce^{-\beta p}+ce^{-a\beta p}](e^{Ie^{-bt}})^a \tag{32}$$

对上式两边取对数

$$\ln[(p-ac)Ie^{-bt}-(p-ac)r-c]+ar=\ln[-(p-ac)\beta p_0 e^{-a\beta p_0}+ce^{-\beta p}+ce^{-a\beta p}]+aIe^{-bt} \tag{33}$$

因此，满足等式(33)的 a 就是要寻找的最优捆绑数量 a^*. 证毕.

3.4 最优双变量组合决策

更进一步，在进行捆绑销售的过程中，很多时候需要对多个决策变量进行同时决策，以获得更好的收益. 下面将对给定一个参数的情况下，分别研究两个决策参数的最优组合问题. 对于最优捆绑数量和最优临界捆绑时间组合决策，以及最优捆绑价格和最优临界捆绑时间组合决策，均可以获得相应的解析解，分别如定理 4 和定理 5 所示. 但是，对于最优捆绑数量和价格组合决策，此时不能获得相应的解析解，仅能获得以下定理 6.

3.4.1 最优捆绑数量和临界时间决策

对于给定的捆绑价格为 $\hat{p}$ 的时鲜产品，需要确定其最优的捆绑数量和捆绑临界时间. 显然，对于进行捆绑的临界时间，同样其必须满足进行捆绑销售的利润与不进行捆绑销售时的利润相等. 因此，最优的临界捆绑时间必须满足约束 $\pi_1=\pi_2$，即

$$\frac{e^{aIe^{-bt}-\beta\hat{p}}}{e^{aIe^{-bt}-\beta\hat{p}}+e^{ar}+e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}(\hat{p}-ac)=\frac{e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}{e^{ar}+e^{a(Ie^{-bt}-\beta p_0)}}(p_0-c)a \tag{34}$$

此时，可以得到满足式(34)下的最优临界捆绑时间和最优捆绑数量之间的函数式，令其为 $t=f(a)$. 然后，需要在符合 $t=f(a)$ 条件下选择利润最大的最优数量 a^*，可以得到定理 4.

定理 4 对给定捆绑价格为 $\hat{p}$ 的时鲜产品，以利润最大为目标，令 $w=\omega\left(\frac{ce^{1-\hat{p}\beta}}{c-p_0}\right)$，则进行捆绑销售的最优数量为 $a^*=\frac{1-w}{p_0\beta}$，最优捆绑临界时间为

$$t^*=\frac{1}{b}\ln\left\{\frac{wI}{\ln\left\{-\frac{e^{w(r+p_0\beta)}[e^{\hat{p}\beta}(c-p_0)w+e^{wp_0\beta}(\hat{p}-cw)]}{e^{wp_0\beta}(p_0w-\hat{p})-e^{\hat{p}\beta}(c-p_0)w}\right\}}\right\}.$$

证明 根据定理 2 可知，对于给定的捆绑价格为 $\hat{p}$ 的时鲜产品时，满足约束 $\pi_1=\pi_2$ 下的临界捆绑时间与捆绑数量之间的关系式，即 $t=f(a)$ 可以表示为式(35)的形式

$$t=\Big\{\ln aI-\ln\{\ln[(\hat{p}-ac)e^{\beta(\hat{p}-ap_0)}-(p_0-c)a]+ar-\ln\{(p_0-c)ae^{-\beta\hat{p}}-[(\hat{p}-ac)e^{\beta(\hat{p}-ap_0)}-(p_0-c)a]e^{a\beta p_0}\}\}\Big\}/b \tag{35}$$

此时，进行捆绑销售利润可以表达为

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\pi_1(a)=\max_a \frac{e^{aIe^{-bf(a)}-\beta\hat{p}}}{e^{aIe^{-bf(a)}-\beta\hat{p}}+e^{ar}+e^{a(Ie^{-bf(a)}-\beta p_0)}}(\hat{p}-ac) \tag{36}$$

同样地，利用 $\pi_1(a)$ 对 a 求偏导，得一阶条件为

$$(p_0e^{\hat{p}\beta-ap_0\beta}-ce^{\hat{p}\beta})(ap_0\beta-1)-ce^{ap_0\beta}=0 \tag{37}$$

令 $w=\omega\left(\frac{ce^{1-\hat{p}\beta}}{c-p_0}\right)$，可以解得最优捆绑数量 $a^*=\frac{1-w}{p_0\beta}$.

在获得了最优的捆绑数量 a^* 之后，相应的最优捆绑时间 $t^*=f(a^*)$ 为

$$t^*=\frac{1}{b}\ln\left\{\frac{wI}{\ln\left\{-\frac{e^{w(r+p_0\beta)}\left[e^{\hat{p}\beta}(c-p_0)w+e^{wp_0\beta}(\hat{p}-cw)\right]}{e^{wp_0\beta}(p_0w-\hat{p})-e^{\hat{p}\beta}(c-p_0)w}\right\}}\right\}.$$

证毕.

3.4.2　最优捆绑价格和临界时间决策

类似地，对于给定的捆绑数量为 $\hat{a}$ 的时鲜产品，需要确定其最优的捆绑价格和捆绑临界时间. 同样地，此时进行捆绑的临界时间也需满足约束 $\pi_1=\pi_2$，然后需要在所有的符合最优临界捆绑时间约束下的策略中，选择利润最大的价格 p^*，以及最优临界捆绑时间 t^*，相应地可以得到定理 5.

定理 5⑨　对于给定捆绑数量为 $\hat{a}$ 的时鲜产品，以利润最大为目标，令 $\upsilon=e^{-\hat{a}p_0\beta}$，则进行捆绑销售的最优价格 $p^*=\frac{\log[\hat{a}\beta\upsilon(p_0-c)]}{\beta}$，最优捆绑临界时间 t^* 可以表示为

$$t^*=\frac{1}{b}\ln\left\{\frac{\hat{a}I}{\ln\left\{\frac{e^{\hat{a}r}\upsilon^{-1}[1+(\hat{a}c-1)\beta]+\ln[\hat{a}\upsilon(p_0-c)\beta]}{\upsilon^{-1}[1+(\hat{a}p_0-1)\beta]-\ln[\hat{a}\upsilon(p_0-c)\beta]}\right\}}\right\}.$$

3.4.3　最优捆绑数量和价格决策

最后，对于给定的出厂时间为 $\hat{t}$ 的时鲜产品，需要确定其最优的捆绑数量和捆绑价格. 可以通过对捆绑销售的利润函数分别对 a 和 p 求一阶偏导，可以得到边界条件，相应地可以得到捆绑销售的最优数量 a^* 和最优价格 p^*. 但是，由于此时不能获得相应的解析解，只能得到相应的条件，可以得到定理 6.

定理 6⑩　对时间为 $\hat{t}$ 的时鲜产品，以利润最大为目标，其进行捆绑销售的最优数量 a^* 和最优价格 p^*，必定满足方程组

$$\begin{cases}(p-ac)e^{aIe^{-b\hat{t}}-\beta p}-\left[e^{aIe^{-b\hat{t}}-\beta p}+e^{ar}+e^{a(Ie^{-b\hat{t}}-\beta p_0)}\right][(p-ac)-1]=0\\ \ln[(p-ac)Ie^{-b\hat{t}}-(p-ac)r-c]+ar-\ln\left[-(p-ac)\beta p_0e^{-a\beta p_0}+ce^{-\beta p}+ce^{-a\beta p}\right]+aIe^{-b\hat{t}}=0\end{cases}$$

4　算　例

在此，给出一个算例. 假设时鲜产品的时间敏感系数 $b=0.12$，消费者对于价格的敏感系数 $\beta=0.6$，时鲜产品的原有单价元 $p_0=3$，成本 $c=1.5$，产品对于消费者的价值 $I=5$，若不购买，消费者的剩余价值为 $r=1$. 下面将分别讨论单变量最优决策和双变量最优组合决策.

4.1　单变量最优决策

对于单个变量的最优决策，分别需要决策的问题为

1) 最优捆绑价格: 零售商在 $t=5$ 的时候将数量 $a=10$ 个的时鲜产品捆绑销售，零售商需要对这个捆绑组合进行定价，使得自身的利润达到最大化.

⑨　类似于定理 4 的证明，首先在给定捆绑临界时间要求下，可以获得最优的捆绑时间策略，然后代入临界捆绑时间函数，相应地可以得到最优临界捆绑时间. 证明略.

⑩　根据定理 1 和定理 3，分别可以获得对价格和数量求一阶偏导的边界条件，并得到相应的方程组. 证明略.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

2）捆绑最优临界时间：假设零售商决定采取买8送2的促销策略，此时捆绑的数量和价格都已经确定，零售商面临的唯一问题就是选择在第几天里实施捆绑策略.

3）最优捆绑数量：在 $t = 5$ 的时候，决定采取将以一定数量的产品以 $p = 24$ 的价格捆绑卖出，面临的问题就是如何选取最优的数量来使自己的利润达到最大化.

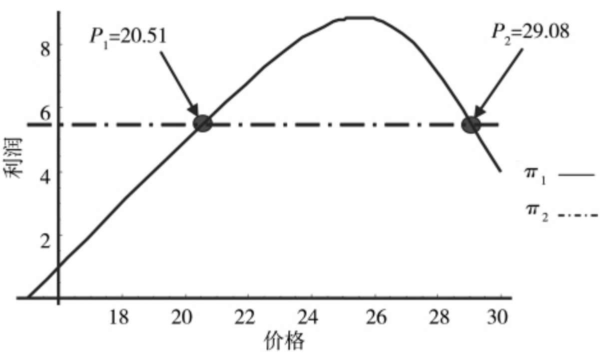


图2 最优捆绑价格 - 利润的关系图

Fig. 2 The relationship of bundling price and profit

4.1.1 最优捆绑价格

根据定理1，可以得到当 $p^* = 25.53$ 时，零售商的利润最大，此时 $\pi_1^* = 8.86$. 消费者若单独购买与捆绑组合同等数量的产品，在数量、价格和时间已经确定的情况下，π_2 实际上是个定值，经计算得出 $\pi_2 = 5.46$. 图2是利润随着捆绑价格变化的关系图. 从图中可以看出是存在一个最优的捆绑价格使得在捆绑销售下的零售商利润达到最大. 若捆绑价格过低或者过高，单独销售的利润就会高于捆绑销售的利润，经计算得出，两条曲线的交点 $p_1 = 20.51$，$p_2 = 29.08$，因此捆绑价格在[20.51，29.08]之间时，捆绑销售都是有意义的.

4.1.1.1 最优捆绑价格与捆绑时间的关系

在捆绑数量已经确定的情况下，随着时间的递增，产品的价值随之逐渐递减，从而影响最优捆绑价格. 这部分主要是研究最优捆绑价格与捆绑时间的关系. 显然，捆绑数量也会影响捆绑价格的变化和走向，图3给出了捆绑数量[8,12]之间，捆绑时间[0,10]之间，捆绑价格的变化趋势. 图3可以明显看出，在捆绑组合数量既定的情况下，零售商的最优捆绑价格随着时间的增加而递减，说明产品越新鲜，捆绑价格可以越高；同时，对于不同捆绑数量下，捆绑价格之差会随时间的增加而逐渐变小，说明随着时间的增加，数量所带来的价值对于消费者逐渐下降.

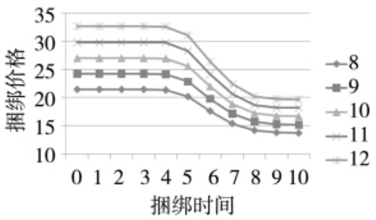


图3 最优捆绑价格 - 捆绑时间的关系图

Fig. 3 The relationship of bundling price and time

4.1.1.2 最优捆绑价格与捆绑数量的关系

在捆绑时间已经确定的情况下，随着捆绑数量的变化，对最优捆绑价格也产生一定的影响. 图4给出了捆绑时间为[3,7]之间，数量从[3,10]之间时，最优捆绑价格与捆绑数量的关系，从图4可以明显看出，在捆绑时间既定的情况下，零售商的最优捆绑价格随着捆绑数量的增加几乎成线性上升的趋势；其次，随着捆绑数量的增加，最优价格之间的差距随捆绑时间增加也呈现加大的状态.

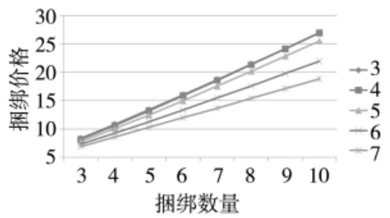


图4 最优捆绑价格 - 捆绑数量的关系图

Fig. 4 The relationship of bundling price and quantity

4.1.2 临界捆绑时间

在产品刚开始销售的时候，单独销售的利润高于捆绑销售的利润，随着时间的递减，π_1 和 π_2 都在逐渐的递减，只有当 $\pi_1 \geqslant \pi_2$ 的时候，捆绑才会有意义. 由图5可知，π_1 和 π_2 的交点处，就是此时的最大值. 经计算可知，此时 $t = 4.75$，$\pi_1 = \pi_2 = 8.59$，也就意味着在第5天的时候，零售商可以实施捆绑销售，是最好的.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

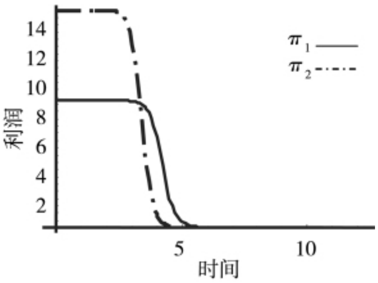


图5　最优捆绑时间 - 利润的变化图

Fig. 5 The relationship of bundling time and profit

4.1.2.1　临界捆绑时间与捆绑价格的关系

显然，捆绑数量对于捆绑的临界时间有着重要的影响，图6 给出了捆绑数量 [8,12] 之间，捆绑价格以买就送2 个的价格为基准，分别左右最大增加和降低4 元时，最优临界捆绑时间的变化情况. 由图6 所示，在捆绑数量已经确定的情况下，随着捆绑价格的递增，最优捆绑时间是先递减后递增的过程. 说明当捆绑价格比较低的时候，对于消费者来说比较有吸引力，就可以推迟捆绑销售的时间; 而当捆绑价格逐渐增加，越接近单独销售的价格时，消费者选择的概率差异不大，最优的捆绑时间会逐渐增大.

4.1.2.2　临界捆绑时间与捆绑数量的关系

同样地，捆绑价格也是影响临界捆绑时间的重要因素，图7 给出了捆绑价格为 [22, 26] 之间，捆绑数量为 [10,15] 之间，最优捆绑时间与捆绑数量的关系. 由图7 所示，在捆绑价格已经确定的情况下，随着捆绑数量的递增，最优捆绑时间是递增的. 说明在价格确定的情况下，捆绑数量越多，对于消费者来说，吸引力越高，所以最优的捆绑时间就越迟. 其次，随着捆绑数量的增加，不同价格之间的最优临界捆绑时间之间的差距也会越来越大.

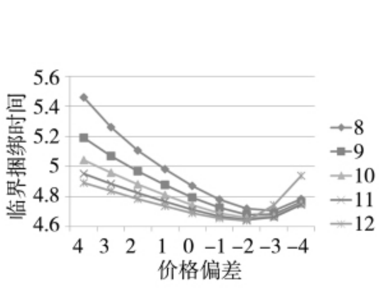


图6　最优捆绑时间 - 捆绑价格的关系图

Fig. 6 The relationship of bundling time and price

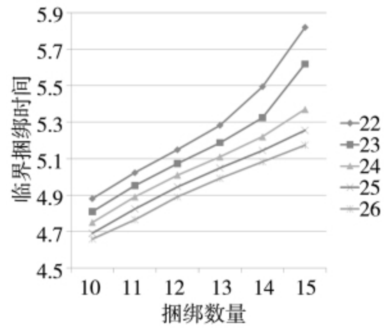


图7　最优捆绑时间 - 捆绑数量的关系图

Fig. 7 The relationship of bundling time and quantity

4.1.3　最优捆绑数量

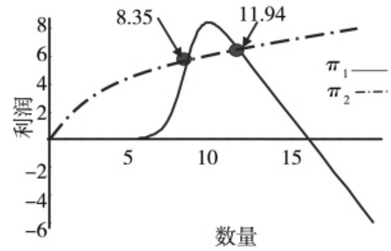


图8　最优捆绑数量 - 利润的关系图

Fig. 8 The relationship of bundling quantity and profit

根据给出的定理3，经计算得出，当 $a^* = 10$ 时，对应的利润为 $\pi_1^* = 8.37$. 若零售商还是采取原来的单独销售方式，经计算得出对应的利润为 $\pi_2 = 4.67$. 可以从图8 观察到，随着捆绑数量的逐渐增加，捆绑销售的利润曲线是先递增后递减，当捆绑数量增加到一定程度，甚至出现亏损的状况，由此可以看出是存在一个最优的捆绑数量使得零售商的利润达到最大化. 图中的最优捆绑数量是在已知捆绑价格 $p = 24$ 的情况下得到的，在不同的捆绑价格下对应着不同的最优捆绑数量，在下面的部分会有更为详细的说明.

由图8 可以看到 π_1 和 π_2 有两个交点，将这两个点记为 a_1 和 a_2，经计算得到 $a_1 = 8.35$，$a_2 = 11.94$，说明若当捆绑价格 $p = 24$，$t = 5$ 时，捆绑数量在 [9, 11] 时，捆绑销售的利润是高于单独销售的，而当 $a = 10$ 时捆绑销售的利润达到了最高点.

4.1.3.1　最优捆绑数量与捆绑价格的关系

显然，捆绑时间是影响捆绑数量的重要因素，图9 给出了捆绑时间为 [4, 8] 之间，捆绑价格为 [15, 29] 之间的最优捆绑数量—捆绑价格的关系图. 由图9 所示，当捆绑价格确定的情况

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

下，最优捆绑的数量随着捆绑价格的增加而增加.

4.1.3.2 最优捆绑数量与捆绑时间的关系

捆绑价格对于捆绑时间也有着重要的影响，图 10 给出了捆绑价格为 [20,28] 之间，捆绑时间为 [0,7] 之间，最优捆绑数量 — 捆绑时间的关系，由图 10 可以看出，在其他条件不变的情况下，随着捆绑时间的递进，捆绑的数量是逐渐递增的. 说明产品越不新鲜，需要捆绑的数量越多来吸引顾客.

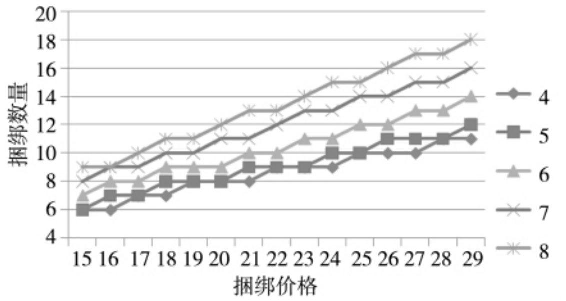


图 9 最优捆绑数量 - 捆绑价格的关系图

Fig. 9 The relationship of bundling quantity and price

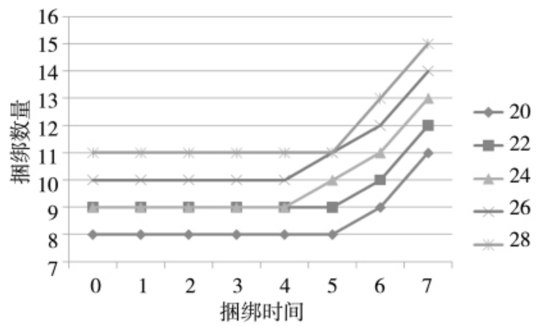


图 10 最优捆绑数量 - 捆绑时间的关系图

Fig. 10 The relationship of bundling quantity and time

4.2 双变量最优决策

对于双变量的最优决策，分别需要决策的问题为

1) 捆绑最优价格和临界时间: 假设零售商决定将 10 个捆绑进行促销，此时捆绑的数量已经确定，零售商面临的问题就是选择合理的价格和临界捆绑时间，使得自身的利润达到最大化.

2) 最优捆绑数量和临界时间: 假设零售商在决定采取将以一定数量的产品并以 $p = 24$ 的价格捆绑出售，面临的问题就是如何选取最优的数量和临界捆绑时间，来使自己的利润达到最大化.

3) 最优捆绑数量和价格: 假设零售商在 $t = 5$ 时，将一定数量的时鲜产品，并以一定的价格进行捆绑销售，零售商需要对这个捆绑组合选择合理的数量并进行定价，使得自身的利润达到最大化.

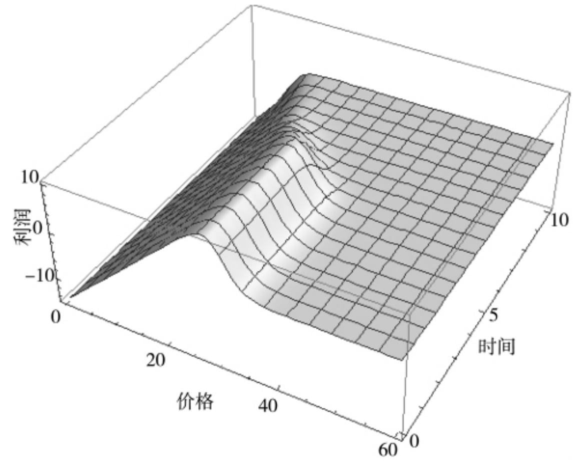


图 11 给定捆绑数量下的最优捆绑销售利润

Fig. 11 The profit with given bundling quantity

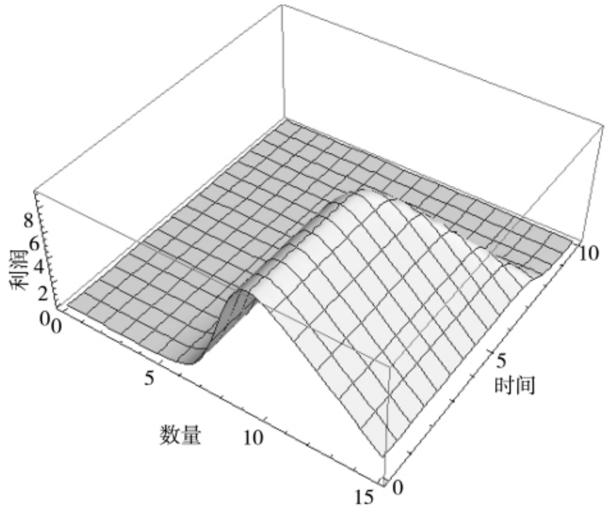


图 12 给定捆绑价格下的最优捆绑销售利润

Fig. 12 The profit with given bundling price

4.2.1 最优捆绑价格和临界捆绑时间

根据在给定捆绑数量 $\hat{a} = 10$ 时，根据给出的定理 5，可以得到最优捆绑数量和捆绑价格的关系，以及捆绑利润情况，如图 11 所示. 相应地可以得到此时的最优策略为: 当捆绑时间 $t^* = 4.66$，捆绑价格 $p^* = 26.34$ 时，利润达到最大化为 $\pi_1^* = 9.67$. 根据最优捆绑时间的模型，可以知道当 $p = 26$，$t = 4.66$ 时，利润达到最大为 9.64，反映出此时的策略比只考虑一个变量变动情况下更好.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

4.2.2　最优捆绑数量与临界捆绑时间

给定捆绑价格 $\hat{p}=24$ 时，根据定理 6，可以得到最优捆绑数量和捆绑价格的关系，以及捆绑利润情况，如图 12 所示. 相应地可以得到此时的最优策略为: 当捆绑时间 $t^*=4.73$，捆绑数量 $a^*=10$ 时，利润达到最大化为 $\pi_1^*=8.75$. 同样根据最优捆绑时间模型，可以获得当 $t=4.75$，$a=10$ 时，利润达到最大为 8.59，虽然与不进行捆绑销售时的利润值相差不大，但是也反映出两个变量同时变化时可以找出只有一个变量变化时更好的策略.

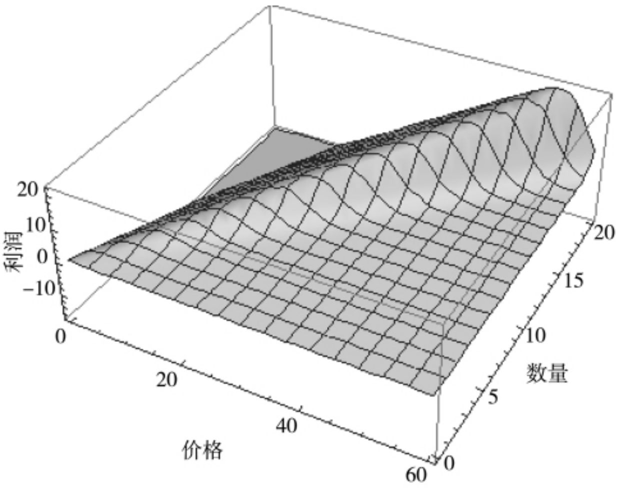


图 13　给定捆绑时间下的最优捆绑销售利润

Fig. 13 The profit with given bundling time

4.2.3　最优捆绑数量与捆绑价格

对于给定捆绑时间 $\hat{t}=5$ 时，根据捆绑销售捆绑利润函数，对于捆绑数量为 [0,20] 之间，捆绑价格为 [0, 60] 之间，可以获得捆绑利润情况，如图 13 所示. 同时，根据给出的定理 4，可以得到最优捆绑数量和捆绑价格的关系，得到此时的最优策略为: 经计算得出当捆绑价格为 $p^*=49.39$，捆绑数量 $a^*=18$ 时，零售商的最大利润为 $\pi^*=18.72$.

5　结束语

研究了同质时鲜产品捆绑销售的最优捆绑价格、捆绑最优临界时间以及最优捆绑数量的问题. 对时鲜产品捆绑销售的最优捆绑价格、最优捆绑临界时间以及最优捆绑数量问题进行了描述，利用随机效用理论建立了消费者选择捆绑销售时鲜产品概率的多项式 Logit 模型. 获得了同质时鲜产品捆绑销售的最优捆绑价格、捆绑最优临界时间、最优捆绑数量以及相应的最大利润. 进而研究了同质时鲜产品捆绑销售的双变量组合决策问题，并给出了最优双变量组合决策和条件.

通过分析最优捆绑价格、时间与数量之间的相互作用，发现在捆绑组合数量既定的情况下，零售商的最优捆绑价格随着捆绑时间的增加而呈现递减的趋势; 在捆绑时间既定的情况下，零售商的最优捆绑价格随着捆绑数量的增加几乎成线性增长的趋势. 类似地，发现在捆绑组合数量既定的情况下，零售商的最优捆绑临界时间随着捆绑价格的增加而呈现 U 形的趋势，即最优捆绑时间随着捆绑价格的增加是先递减后递增; 当捆绑价格既定的情况下，最优捆绑时间随着捆绑数量的增加而递增. 还发现在捆绑组合时间既定的情况下，最优捆绑数量随着捆绑价格的增加而递增; 当捆绑价格既定的情况下，最优捆绑数量随着捆绑时间的增加而递增.

由于对于时鲜产品捆绑销售的研究目前还不够深入，因此，关于时鲜产品捆绑销售问题还可进一步研究，主要可以从以下方面进行研究

1）研究不同质产品的捆绑销售情况. 本文只考虑了同质产品的捆绑问题，根据捆绑销售的分类，还可以考虑互补产品和完全不相关产品的捆绑销售的问题. 对于互补品，还需要考虑由于产品的互补性，对于产品使用价值的影响程度，并将这种影响程度引入到消费者效用当中去.

2）考虑多阶段的情况. 本文的研究只考虑一个阶段，零售商只考虑在这个阶段中的利润最大化问题，事实上单阶段的利润最大化，并不等于整体的利润最大化的情况，因此在以后的研究中，可以考虑多阶段情况下的捆绑销售问题.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参 考 文 献:

[1] Stigler G. A note on block booking [J]. The Supreme Court Review, 1963: 152 – 157.

[2] Adams W, Yellen J. Commodity bundling and the burden of monopoly [J]. The Quarterly Journal of Economics, 1976, 90 (3): 475 – 498.

[3] Bakos Y, Brynjolfsson E. Bundling information goods: Pricing, profits, and efficiency [J]. Management Science, 1999, 45 (12): 1613 – 1630.

[4] 曹 洪. 捆绑销售的经济学层面思考 [J]. 安徽大学学报(哲学社会科学版), 2004, 28(2): 91 – 94.

Cao Hong. A study of the bundling-sale at the level of economics [J]. Journal of Anhui University(Philosopy and Social Sience), 2004, 28(2): 91 – 94. (in Chinese)

[5] 曹 洪. 捆绑销售的社会福利分析 [J]. 学术研究, 2004, 2: 40 – 43.

Cao Hong. Social welfare analysis of bunchy sell [J]. Academic Research, 2004, 2: 40 – 43. (in Chinese)

[6] 彭 赓, 寇纪淞, 李敏强. 信息商品捆绑销售与歧视定价分析 [J]. 系统工程学报, 2001, 16(1): 1 – 6.

Peng Geng, Kou Jisong, Li Minqiang. The analysis of information goods bundling selling and discrimination pricing [J]. Journal of Systems Engineering, 2001, 16(1): 1 – 6. (in Chinese)

[7] Hanson W, Martin R. Optimal bundle pricing [J]. Management Science, 1990, 36(2): 155 – 174.

[8] Venkatesh R, Vijay M. A probabilistic approach to pricing a bundle of products or services [J]. Journal of Marketing Research, 1993, 30(4): 494 – 508.

[9] Fuerderer R, Herrmann A, Wuebker G. Optimal Bundling: Marketing Strategies for Improving Economic Performance [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999: 45 – 62.

[10] Chung J, Rao V. A general choice model for bundles with multiple-category products: Application to market segmentation and optimal pricing for bundles [J]. Journal of Marketing Research, 2003, 40(2): 115 – 130.

[11] Shugan S, Radas S. Managing service demand: Shifting and bundling [J]. Journal of Service Research, 1998, 1(1): 47 – 64.

[12] Yadav M, Kent B. How buyers perceive savings in a bundle price: An examination of a bundle's transaction value [J]. Journal of Marketing Research, 1993, 30(3): 350 – 358.

[13] Yadav M. How buyers evaluate product bundles: A model of anchoring and adjustment [J]. Journal of Consumer Research, 1994, 21(2): 342 – 353.

[14] 刘会燕. 基于顾客选择行为的时鲜产品供应链研究 [J]. 企业活力, 2007, 9: 40 – 41.

Liu Huiyan. Fresh product supply chain on customer selection behavior [J]. Enterprise Vitality, 2007, 9: 40 – 41. (in Chinese)

[15] Chun Y. Optimal pricing and ordering policies for perishable commodities [J]. European Journal of Operational Research, 2003, 144 (1): 68 – 82.

[16] Chang H, et al. Retailer's optimal pricing and lot-sizing policies for deteriorating items with partial backlogging [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 168 (1): 51 – 64.

[17] Li M. Pricing non-storable perishable goods by using a purchase restriction with an application to airline fare pricing [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 134(3): 631 – 647.

[18] 李 军, 蔡小强. 易腐性产品运输设施选择博弈 [J]. 管理科学学报, 2009, 12(1): 23 – 29.

Li Jun, Cai Xiaoqiang. Transportation facility choice game of perishable products [J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(1): 23 – 29. (in Chinese)

[19] 唐 磊, 等. 基于货架期的易腐食品捆绑销售价格模型分析 [J]. 东南大学学报(自然科学版), 2006, 136(14): 677 – 680.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Tang Lei, et al. Pricing model analysis based on shelf life for perishable foods bundling selling [J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2006, 136(14): 677－680. (in Chinese)

[20] McFadden D. Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior in Frontiers in Econometrics [M]. New York: Academic Press, 1974: 105－142.

[21] Ghare P, Schrader G. A model for exponentially decaying inventories [J]. Journal of Industrial Engineering, 1963, 15: 238－243.

Optimal bundling sale strategy for homogenous fresh products

WEI Hang

School of International Business Administration, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China

Abstract: Due to the perishable property of fresh products, retailers usually use bundling as a sales strategy in order to sell the products as soon as possible. The paper focuses on the optimal decisions of the bundling price, the bundling time threshold, and the bundling quantity. In order to measure the probability of a given bundling portfolio, the MNL model is adopted to model the consumer behaviors. With the MNL model, the optimal bundling price, the bundling time threshold, and the bundling quantity can be determined for to maximize a retailer's profit. Furthermore, the bi-parameter decision problems are studied and the optimal conditions were given. At last, a numerical study is conducted to analyze the relationships among the optimal bundling price, the bundling time threshold, and the bundling quantity.

Key words: fresh product; bundling; MNL model; price; time; quantity

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net