第15卷第8期 管理科学学报 Vol. 15 No. 8
2012年8月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Aug. 2012

异质性时间偏好与资产定价①

袁 宁[1]，施嘉岳[2]
（1. 北京大学光华管理学院，北京 100871；2. 烟台大学经济与工商管理学院，烟台 264005）

摘要： 引入异质性投资者是资产定价理论的重要发展方向之一. 将异质性时间偏好纳入 Lucas 纯交换经济框架，发展出连续时间、存在异质性时间偏好投资者的动态资产定价模型，给出了模型资产价格和收益的解析解，并且分析投资者的最优消费和投资策略，最后数值分析了异质性时间偏好的资产定价含义.

关键词： 异质性时间偏好；代表性代理人；资产定价
中图分类号： F224；F830 **文献标识码：** A **文章编号：** 1007－9807(2012)08－0050－10

0 引 言

Lucas 纯交换经济或禀赋经济[1]奠定了以代表性代理人消费禀赋为核心假设的资产定价理论研究框架. Lucas 考察了具有相同消费者和单一商品的纯交换经济中均衡资产价格的随机行为，其中最重要的假设就是，股票市场的红利等同于总产出（禀赋），并且等同于总消费. 均衡时可以根据外生给定的消费过程、效用函数以及代表性代理人的一阶欧拉方程推导出随机贴现因子（SDF）. 此时 SDF 为代表性代理人的跨期边际替代率，资产价格可以表示为消费增长和 SDF 的二阶条件矩.

代表性代理人是经济学和金融学中具有高度简洁性、便利性和抽象性的假设. 现实经济体系往往由大量分散的消费者组成，这些消费者的加总行为能否以及如何由代表性代理人的行为来描述，是个十分复杂的问题，经济学家给出了一些充分条件——加总定理，Huang 和 Litzenberger[2]对此有很好的综述.

另一方面，建立在代表性代理人假设基础上的经典金融理论完全忽略了交易的存在性. 因为代表性代理人模型中，均衡资产价格总是调整到投资者持有市场组合、消费禀赋为止，这时消费者没有交易的动机，市场交易并不发生. 解释交易的存在就必须突破代表性代理人框架的束缚，一种方法就是在模型中引入具有不同禀赋、偏好或信息的异质性投资者，其中，引入偏好的异质性就是很有价值的研究方向. 一些文献，如 Grossman 和 Zhou[3]，Wang[4]，Chan 和 Kogan[5]等，探讨存在市场摩擦或者投资组合保险约束时，具有不同风险规避系数或时间偏好的投资者之间发生的交易，认为这种源自异质性偏好的交易能够产生时变市场风险价格，从而有助于解释 Mehra 和 Prescott[6]的“股权溢价之谜”.

Cochrane 等[7]在两棵树的 Lucas 连续时间模型中研究了市场出清引致复杂资产价格动态的行为，指出即使投资者的偏好平稳（对数效用），资产具有独立同分布的红利现金流，市场出清条件也可能导致具有时变波动性的 SDF，复杂的资产价格和收益行为. Longstaff[8]在 Lucas 和 Cochrane 等的模型基础上进行了拓展，在具有两类资产和异质性风险容忍度投资者的连续时间 Lucas 纯交换经济模型

① 收稿日期：2009－10－09；修订日期：2011－11－22.
基金项目：教育部规划基金资助项目(12YJA790072).
作者简介：袁 宁(1973—)，男，江苏南京人，博士后. Email：yuan-ning@sohu.com

中，探讨了流动性约束对资产价格的影响.

Gollier 和 Zeckhauser [9] 研究了代表性代理人的时间偏好是如何受到个体消费者时间偏好异质性影响的. 他们的研究证明了如果有无限多数量的具有指数分布急躁度的消费者，那么代表性代理人的时间贴现因子呈双曲线分布. Malamud 和 Trubowitz [10] 表明，在离散时间模型中代表性代理人的风险规避随时间变化的方式取决于个体消费者的谨慎度与急躁度之间的加权协方差. Hara [11] 拓展了 Gollier 和 Zeckhauser [9] 的研究，指出，当且仅当经济中的消费者具有相同的常数相对风险规避系数时，代表性代理人的时间贴现因子是一些完全单调函数的幂函数.

Hara [12] 研究了在具有完全市场的连续时间模型中个体消费者在风险容忍度和时间偏好上的异质性是如何影响代表性代理人的风险容忍度和时间偏好的. 他的研究结果表明代表性代理人的时间容忍度随时间而递增，而他的风险容忍度随时间的变化取决于个体消费者的谨慎度与急躁度之间的某种加权协方差的符号.

国内相关文献中，吴卫星和汪勇祥 [13] 较早地研究了在国有股全流通背景下流动性对资产定价的影响. 袁宁 [14] 探讨了在均方差有效理论框架下存在非流动性资产时，是否存在能为所有流动性资产定价的 SDF 以及类似 CAPM 的线性定价方程. 陈彦斌和周业安 [15] 研究了在异质性投资者经济中财富偏好对资产定价的影响，推导出资产市场具有两基金分离现象，进而指出不能在异质投资者经济中将 CCAPM 推广到包含财富偏好的资产定价模型. 袁宁 [16] 在 Merton 跨期最优消费和资产组合的理论框架内引入非流动性资产，构造了三资产的连续时间经济模型，探讨流动性约束对投资者最优消费和投资决策的影响. 邹小芃等 [17] 将投资者面临的市场流动性风险分解为外生和内生两种，并引入流动性需求状态变量随机化的证券持有期限，得出基于流动性风险调整的资产定价模型.

本文将异质性纳入 Lucas 纯交换经济框架，提出连续时间、存在异质性投资者的动态资产定价模型. 模型中，单一资产的所有权被具有不同主观时间偏好的两类投资者分别持有，资产的红利动态服从独立同分布(i. i. d.) 的几何布朗运动. 给出了资产价格和收益的解析解，分析投资者的最优消费和投资策略，并且数值分析了异质性时间偏好的资产定价含义.

本文的模型丰富了异质性资产定价理论这一方兴未艾的研究领域. Hara [12] 的模型侧重于分析如何将异质性个体投资者的效用函数加总得到代表性代理人的效用函数，进而分析代表性代理人的时间偏好和风险规避特征. 与 Hara 的模型不同，本文的模型侧重于分析具有不同时间偏好的两类投资者是如何通过交易资产平滑消费的. Cochrane 等 [7] 的模型假设有两种资产和一个具有对数效用的投资者. 与之不同，本文的模型假设有一种资产和两个具有异质性风险规避系数的 CRRA 效用的投资者.

1　模型描述

考察一个 Lucas 禀赋经济，该经济体系中只存在一种资产或一棵“资产树”，资产产生的红利现金流 D_t 服从 i. i. d. 的几何布朗运动

$$\frac{\mathrm{d}D_t}{D_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}Z \tag{1}$$

其中，μ 和 σ 是常数; Z 是标准几何布朗运动. 这里将资产的股份数量正规化为 1.

经济体系中有两个投资者，假设第 1 个投资者和第 2 个投资者持有该资产的初始禀赋数量分别为 w 和 $1 - w$，$w \in (0,1)$. 两个投资者 t 时刻的消费分别为 C_{1t} 和 C_{2t}，初始消费分别为 C_1 和 C_2. 他们的偏好都可以用 CRRA 的等弹性效用函数来描述，即

$$U_{1t} = \mathrm{E}_t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta s}\frac{C_{1\,t+s}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\mathrm{d}s \tag{2}$$

$$U_{2t} = \mathrm{E}_t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta s}\frac{C_{2\,t+s}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\mathrm{d}s \tag{3}$$

两个投资者具有相同的相对风险规避系数 γ，只是各自具有不同的主观时间贴现因子 β 和 δ，因此投资者的异质性体现在时间贴现因子和初始禀赋上. 不妨假设 $\beta > \delta$，即第 1 个投资者的容忍度低于第 2 个投资者，更倾向于提前消费. 这是拓展了的 Lucas

纯交换经济,两个投资者通过资本市场交换股份,平滑各自消费路径,以实现其终生效用的最大化.

2 模型的求解

与 Lucas 纯交换经济相比,由于存在异质性,两个投资者都有交换资产以平滑消费的动机,交易开始出现. 分别求解出均衡资产价格和收益动态、投资者的最优消费动态和最优资产持有数量.

2.1 资产价格

资产的价格由两个投资者共同确定,市场均衡时每个投资者的跨期边际替代率(IMRS) 都可以作为有效的SDF 给资产定价. 将式(2) 和(3) 中的效用函数分别对各自的消费求导,可求得两个投资者的边际效用分别为

$$M_{1t} = e^{-\beta t} C_{1t}^{-\gamma} \tag{4}$$

$$M_{2t} = e^{-\delta t} C_{2t}^{-\gamma} \tag{5}$$

由M_{1t}和M_{2t}可得到每个投资者的IMRS,进而可以用IMRS 对资产定价,即

$$\begin{aligned} P_t &= E_t \int_0^\infty \frac{M_{1\,t+s}}{M_{1t}} D_{t+s}\,ds \\ &= E_t \int_0^\infty e^{-\beta s}\left(\frac{C_{1\,t+s}}{C_{1t}}\right)^{-\gamma} D_{t+s}\,ds \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} P_t &= E_t \int_0^\infty \frac{M_{2\,t+s}}{M_{2t}} D_{t+s}\,ds \\ &= E_t \int_0^\infty e^{-\delta s}\left(\frac{C_{2\,t+s}}{C_{2t}}\right)^{-\gamma} D_{t+s}\,ds \end{aligned} \tag{7}$$

上式成立需满足 SDF 的等价条件,即

$$e^{-\beta s}\left(\frac{C_{1\,t+s}}{C_{1t}}\right)^{-\gamma} = e^{-\delta s}\left(\frac{C_{2\,t+s}}{C_{2t}}\right)^{-\gamma} \tag{8}$$

对所有 t 和 s 都成立.

Lucas 禀赋经济中,所有投资者的消费总和等于资产总产出或资产红利,因此有市场出清条件

$$D_{t+s} = C_{1\,t+s} + C_{2t+s} \tag{9}$$

利用市场出清条件式(9) 和 SDF 的等价条件式(8) 可以解得

$$C_{1\,t+s} = \frac{C_{1t}}{C_{1t} + e^{(\beta-\delta)s/\gamma} C_{2t}} D_{t+s} \tag{10}$$

$$C_{2\,t+s} = \frac{e^{(\beta-\delta)s/\gamma} C_{2t}}{C_{1t} + e^{(\beta-\delta)s/\gamma} C_{2t}} D_{t+s} \tag{11}$$

将式(10) 代入式(6) ,利用红利 D_t 的动态式(1) ,就可以解出价格 P_t.

附录 1 证明了资产价格 P_t 可以表示为

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{1}{\delta - \lambda} D_t^{1-\gamma} C_{2t}^{\gamma} \times \\ &\quad F\left(-\gamma, \xi\gamma; \xi\gamma + 1; -\frac{C_{1t}}{C_{2t}}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

其中,定义

$$\xi = \frac{\delta - \lambda}{\beta - \delta} \tag{13}$$

$$\lambda = (1-\gamma)\mu - \gamma(1-\gamma)\sigma^2/2 \tag{14}$$

函数 $F(a,b;c;z)$ 是标准的超几何函数②,定义为

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{15}$$

其中$(a)_n$,$(b)_n$,$(c)_n$ 可表示为

$$(s)_n = s(s+1)\cdots(s+n-1) = \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)}$$

$$n \geqslant 1;\ (s)_0 = 1;\ (s)_1 = s$$

当 $\|z\| < 1$ 时,超几何函数$F(a,b;c;z)$ 收敛并有如下积分表示式

$$\begin{aligned} F(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \times \\ &\quad \int_0^1 w^{b-1}(1-w)^{c-b-1}(1-wz)^{-a}\,dw \end{aligned} \tag{16}$$

在单位圆 $\|z\| = 1$ 上($z = 1$ 除外) ,当$\mathrm{Re}(a+b-c) \geqslant 1$ 时 $F(a,b;c;z)$ 发散,其他情形下$F(a,b;c;z)$ 均收敛. 对于复平面$z = 1$ 至$z = \infty$($|\arg(-z)| < \pi$,对$\|z\| \geqslant 1$) ,无穷级数 $F(a,b;c;z)$ 定义了单值解析函数,可用转换公式③求解.

定义资产的价格 - 红利比率为 A_t,则

② 参见金玉明主编《实用积分表》,中国科学技术大学出版社,2006,第 478 页.

③ 一个典型的转换公式如下

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{-b} F\left(b, c-a; c; \frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{c-a-b} F\left(c-a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right)$$

参见 Gradshteyn 和 Ryzhik [13] 方程 9.131.1.

$$A_t = \frac{P_t}{D_t} = \frac{1}{\delta - \lambda}\left(\frac{C_{2t}}{D_t}\right)^{\gamma} \times F\left(-\gamma, \xi\gamma; \xi\gamma + 1; -\frac{C_{1t}}{C_{2t}}\right) \tag{17}$$

资产价格 P_t 是红利 D_t 以及消费 C_{1t} 和 C_{2t} 的函数，定义 t 时刻第 1 个投资者的消费占红利的比例为 s_t，有

$$s_t = C_{1t}/D_t \tag{18}$$

s_t 是决定价格和消费动态的状态变量. 利用 s_t 可将价格 – 红利比率 A_t 表示为

$$A_t = \frac{1}{\delta - \lambda}(1 - s_t)^{\gamma} \times F\left(-\gamma, \xi\gamma; \xi\gamma + 1; \frac{s_t}{s_t - 1}\right) \tag{19}$$

可见 A_t 完全由 s_t 所刻画，s_t 和红利动态 D_t 一起控制了资产价格 P_t 的演进过程.

将式(10) 应用到零时刻，有

$$s_t = \frac{C_1}{C_1 + e^{(\beta - \delta)t/\gamma} C_2} \tag{20}$$

s_t 随时间增加而递减，第 1 个投资者的消费最终趋近于零. 此外，两投资者的初始消费 C_1 和 C_2 是决定 s_t 的关键参数.

2.2　初始消费

为了求解均衡消费动态，必须求解初始消费. 首先考虑零时刻第 1 个投资者的消费、红利和价格之间的关系. 第 1 个投资者零时刻的消费为 C_1，剩余财富为其初始禀赋的价值减去消费，即 $w(P + D) - C_1$. 均衡时，第 1 个投资者的未来消费流按 SDF 贴现到零时刻的现值应当等于零时刻的剩余财富，即

$$\begin{aligned} w(P + D) - C_1 &= \mathrm{E}\left[\frac{M_{1\,t+s}}{M_{1\,t}} C_{1t}\mathrm{d}t\right] \\ &= \mathrm{E}\int_0^{\infty} e^{-\beta t}\left(\frac{C_{1t}}{C_1}\right)^{-\gamma} C_{1t}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{E}\int_0^{\infty} e^{-\beta t}\left(\frac{C_{1t}}{C_1}\right)^{-\gamma}(D_t - C_{2t})\,\mathrm{d}t \\ &= P - \mathrm{E}\int_0^{\infty} e^{-\beta t}\left(\frac{C_{1t}}{C_1}\right)^{-\gamma} C_{2t}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{21}$$

其中利用了市场出清条件 $D_t = C_{1t} + C_{2t}$，以及价格式(6). 定义后一无条件期望值为 Q，求解 C_1 需要解出 Q. 事实上容易证明 Q 是第 2 个投资者的未来消费流按 SDF 贴现到零时刻的现值，即第 2 个投资者零时刻的剩余财富，这是因为

$$\begin{aligned} (1 - w)(P + D) - C_2 &= E\left[\frac{M_{2\,t+s}}{M_{2\,t}} C_{2t}\mathrm{d}t\right] \\ &= \mathrm{E}\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\left(\frac{C_{1t}}{C_1}\right)^{-\gamma} C_{2t}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{E}\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\left(\frac{C_{1t}}{C_1}\right)^{-\gamma} C_{2t}\mathrm{d}t = Q \end{aligned} \tag{22}$$

其中利用了两个投资者随机贴现因子的等价条件式(8).

附录 2 给出了 Q 两种形式不同，但又完全等价的解. 第 1 种将 Q 表示为初始时刻红利 D 和消费 C_1、C_2 的显性函数，即

$$Q = \frac{1}{\delta - \lambda} D^{1-\gamma} C_2^{\gamma} \times F\left(1 - \gamma, \xi\gamma; \xi\gamma + 1; -\frac{C_1}{C_2}\right) \tag{23}$$

第 2 种则将 Q 表示为价格 P 和红利 D 的线性函数这一更为简洁的形式

$$Q = -\left(\frac{\lambda - \beta}{\beta - \delta}\right)P - \left(\frac{1}{\beta - \delta}\right)D \tag{24}$$

将价格方程(12) 应用到零时刻，有

$$P = \frac{1}{\delta - \lambda} D^{1-\gamma} C_2^{\gamma} \times F\left(1 - \gamma, \xi\gamma; \xi\gamma + 1; -\frac{C_1}{C_2}\right) \tag{25}$$

分别将 P 和 Q 的显性形式式(25) 和式(23) 代入式(21)，有

$$w(P + D) - C_1 = P - Q = \frac{1}{\delta - \lambda} D^{1-\gamma} C_2^{\gamma}\left[F\left(-\gamma, \xi\gamma; \xi\gamma + 1; -\frac{C_1}{C_2}\right) - F\left(1 - \gamma, \xi\gamma; \xi\gamma + 1; -\frac{C_1}{C_2}\right)\right]$$

利用超几何函数的高斯递归方程④

$$c\,F(a, b; c; z) - c\,F(a + 1, b; c; z) + bzF(a, b; c; z) = 0 \tag{26}$$

可以将上式化简为

---

④　参见 Gradshteyn 和 Ryzhik [13] 方程 9.137.12.

$$w(P+D)-C_1=\frac{1}{\beta-\delta}\frac{\gamma}{\xi\gamma+1}D^{1-\gamma}C_1C_2^{\gamma}\times$$
$$F\left(1-\gamma,\xi\gamma+1;\xi\gamma+2;-\frac{C_1}{C_2}\right) \tag{27}$$

这一方程计算 C_1 不是很直观,更为方便的是利用 Q 的化简形式. 将式(24) 代入式(21) ,有

$$\begin{aligned} w(P+D)-C_1 &= P-Q \\ &= \left(\frac{\lambda-\delta}{\beta-\delta}\right)P+\left(\frac{1}{\beta-\delta}\right)D \\ &= -\xi P+\left(\frac{1}{\beta-\delta}\right)D \end{aligned} \tag{28}$$

因此

$$C_1=(w+\xi)P+\left(w-\frac{1}{\beta-\delta}\right)D \tag{29}$$

将方程(29) 两边同除以 D,表示成初始时刻消费 C_1 与红利 D 之比 s 的形式,再将价格 – 红利比率方程(19) 应用到零时刻,有

$$\begin{aligned} s &= (w+\xi)A+\left(w-\frac{1}{\beta-\delta}\right) \\ &= \left(\frac{w+\xi}{\delta-\lambda}\right)(1-s)^{\gamma}F\left(1-\gamma,\xi\gamma;\xi\gamma+1;\frac{s}{s-1}\right)+ \\ &\quad \left(w-\frac{1}{\beta-\delta}\right) \end{aligned} \tag{30}$$

上述方程通常没有解析解,可用数值方法求解出 s,进而由红利 D 以及市场出清方程(9) 求出初始消费 C_1 和 C_2.

2.3 均衡消费动态

将式(10) 和(11) 应用到零时刻,有

$$C_{1t}=\frac{C_1}{C_1+e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}D_t \tag{31}$$

$$C_{2t}=\frac{e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}{C_1+e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}D_t \tag{32}$$

应用 Ito 公式和红利 D_t 服从的动态方程(1) ,可以求解出均衡时的消费动态,即

$$\begin{aligned} \frac{dC_{1t}}{C_{1t}} &= \left[\left(\frac{\delta-\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{C_{2t}}{D_t}\right)+\mu\right]dt+\sigma dZ \\ &= \left[\left(\frac{\delta-\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}{C_1+e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}\right)+\mu\right]dt+\sigma dZ \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_{2t}}{C_{2t}} &= \left[\left(\frac{\beta-\delta}{\gamma}\right)\left(\frac{C_{1t}}{D_t}\right)+\mu\right]dt+\sigma dZ \\ &= \left[\left(\frac{\beta-\delta}{\gamma}\right)\left(\frac{C_1}{C_1+e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}\right)+\mu\right]dt+\sigma dZ \end{aligned} \tag{34}$$

表示成显性形式,有

$$C_{1t}=D\left[\frac{C_1}{C_1+e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}\right]e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma Z_t} \tag{35}$$

$$C_{2t}=D\left[\frac{e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}{C_1+e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}\right]e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma Z_t} \tag{36}$$

其中 Z_t 服从 $N(0,t)$ 的正态分布,是驱动红利动态 D_t 的不确定来源.

由式(33) 和(34) 可以看出,两个投资者消费增长的波动率相同,但期望增长率不同,有

$$E\left(\frac{dC_{1t}}{C_{1t}}\right)=\left[\left(\frac{\delta-\beta}{\gamma}\right)(1-s_t)+\mu\right]dt \tag{37}$$

$$E\left(\frac{dC_{2t}}{C_{2t}}\right)=\left[\left(\frac{\beta-\delta}{\gamma}\right)s_t+\mu\right]dt \tag{38}$$

2.4 最优资产持有数量

假设第 1 个投资者 t 时刻的最优资产持有数量为 N_t,由供给均衡,第 2 个投资者 t 时刻的最优资产持有数量为 $1-N_t$. 两个投资者分别选择最优资产和消费配置(N_t, C_{1t}) 和 ($1-N_t$, C_{2t}) ,以使得各自消费路径上效用最大化. 均衡时,t 时刻每个投资者的消费和资产选择应满足自融资策略,即未来消费流按 SDF 贴现的现值应当等于 t 时刻减去消费后的剩余财富价值,也等于持有的最优资产数量的价值. 因此对第 1 个投资者有

$$N_tP_t=E_t\int_0^{\infty}e^{-\beta s}\left(\frac{C_{1t+s}}{C_{1t}}\right)^{-\gamma}C_{1t+s}\,ds \tag{39}$$

与式(28) 一样可以将方程(39) 右边的积分表示为价格 P_t 和红利 D_t 的线性组合

$$N_tP_t=-\xi P_t+\left(\frac{1}{\beta-\delta}\right)D_t$$

因此

$$N_t=-\xi+\left(\frac{1}{\beta-\delta}\right)\frac{D_t}{P_t}=-\xi+\left(\frac{1}{\beta-\delta}\right)\frac{1}{A_t} \tag{40}$$

最优资产持有数量为 N_t 是价格 – 红利比率 A_t 倒数的线性函数.

2.5 资产收益

与单一代表性代理人情形不同,存在两个投资者时的瞬时无风险利率 r_t 呈现出时变特征,利用 $M_{1t}=e^{-\beta t}C_{1t}^{-\gamma}$ 以及消费 C_{1t} 的动态,有

$$\begin{aligned} r_t dt &= -E_t\left(\frac{dM_{1t}}{M_{1t}}\right) \\ &= \beta dt+\gamma E_t\left(\frac{dC_{1t}}{C_{1t}}\right)- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\mathrm{Var}_t\left(\frac{\mathrm{d}C_{1t}}{C_{1t}}\right) &= [\beta+(\delta-\beta)(C_{2t}/D_t)+\\ &\quad \gamma\mu-\gamma(\gamma+1)\sigma^2/2]\,\mathrm{d}t\\ &= [\beta+(\delta-\beta)(1-s_t)+\\ &\quad \gamma\mu-\gamma(\gamma+1)\sigma^2/2]\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{41}$$

状态变量 s_t 控制了 r_t 的时变特征.

资产的收益 R_t 由资本利得和红利收益两部分组成,即

$$R_t = \frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} + \frac{D_t}{P_t}\mathrm{d}t \tag{42}$$

其中,红利收益部分显然就是价格 – 红利比率 A_t 的倒数; 而资本利得部分可由 $P_t = A_t D_t$ 以及红利 D_t 的动态方程(1) 利用 Ito 公式求得

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \left(\frac{A_t'}{A_t}+\mu\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}Z \tag{43}$$

其中,A_t'为资产的价格 – 红利比率 A_t 对 t 的导数,可由价格方程(17) 求解,有

$$\begin{aligned} A_t' &= \left(\frac{C_{2t}}{D_t}\right)^{\gamma}\left[\frac{1}{\xi}\frac{C_{1t}}{D_t}F\left(-\gamma,\xi\gamma;\xi\gamma+1;\ -\frac{C_{1t}}{C_{2t}}\right)-\frac{\gamma}{\xi\gamma+1}\frac{C_{1t}}{C_{2t}}F\left(-\gamma+1,\xi\gamma+1;\xi\gamma+2;\ -\frac{C_{1t}}{C_{2t}}\right)\right]\\ &= (1-s_t)^{\gamma}\left[\frac{1}{\xi}s_tF\left(-\gamma,\xi\gamma;\xi\gamma+1;\frac{s_t}{s_t-1}\right)-\frac{\gamma}{\xi\gamma+1}\frac{s_t}{1-s_t}F\left(-\gamma+1,\xi\gamma+1;\xi\gamma+2;\frac{s_t}{s_t-1}\right)\right] \end{aligned} \tag{44}$$

其中利用了超几何函数的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(a,b;c;z) = \frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;z) \tag{45}$$

因此资产的收益可表示为

$$R_t = \left(\frac{A_t'+1}{A_t}+\mu\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}Z \tag{46}$$

资产的期望收益和收益的方差分别为

$$\mathrm{E}_t(R_t) = \left(\frac{A_t'+1}{A_t}+\mu\right)\mathrm{d}t \tag{47}$$

$$\mathrm{Var}_t(R_t) = \sigma^2\mathrm{d}t \tag{48}$$

资产收益和红利增长率、消费增长率一样具有相同的方差,但是期望收益呈现出时变特征.

3　资产定价含义

为了更好地评价存在异质投资者的资产定价模型,提供数值分析以清晰地反映主要变量和参数之间的关系. 考虑到价格显性解中超几何函数的复杂性,选取如下的参数: 两个投资者的主观时间贴现因子 $\beta = 0.06$,$\delta = 0.03$; 红利的期望增长率 $\mu = 0.04$,波动率 $\sigma = 0.1$. 在合适的相对风险规避系数 $1 \leqslant \gamma \leqslant 8$ 范围,对不同的初始股权比例 w 研究模型的资产定价含义.

3.1　价格 – 红利比率 A

表 1 给出了零时刻资产的价格 – 红利比率 A. 可以看出 A 随着 w 增加而减少. 例如 $\gamma = 1$ 时,当 $w = 0$,$A = 33.33$; 当 $w = 0.5$,A 减少至 22.33; 而当 $w = 1$,$A = 16.67$,只有 $w = 0$ 时的一半. 由方程(30) ,A 可以表示成

$$A = \frac{-w+s+\dfrac{1}{\beta-\delta}}{w+\xi} \tag{49}$$

由于最优消费比例 s 随 w 增加而增加,显然有 $\frac{\partial A}{\partial w} < 0$.

$w = 0$ 和 $w = 1$ 分别对应的是两投资者单独决定资产价格的代表性代理人情形. 投资者的异质性体现在主观时间贴现因子和初始禀赋 w 上,均衡时资产价格必然要反映每一个投资者的偏好特征和禀赋. 当 $0 < w < 1$ 时,A 某种程度上就是 $w = 0$ 和 $w = 1$ 时价格 – 红利比率的加权平均,因此介于两者之间.

表 1　零时刻价格 – 红利比率 A

Table 1 The price – dividend ratio A at time 0

A		w										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
γ	1	33.333 3	30.373 6	27.883 6	25.759 8	23.927 0	22.329 1	20.923 7	19.678 0	18.566 3	17.568 0	16.666 7
	5	11.111 1	10.754 4	10.419 5	10.104 5	9.807 7	9.527 5	9.262 6	9.011 8	8.773 9	8.548 1	8.333 3
	8	33.333 3	30.312 0	27.791 3	25.656 2	23.824 4	22.235 7	20.844 6	19.616 5	18.524 4	17.546 8	16.666 7

3.2 零时刻最优消费比例 s

表 2 反映零时刻第 1 个投资者的最优消费比例 s，显然 s 随股权比例 w 增加而增加. 相同 γ，当 $0 < w < 1$ 时，s 总是大于 w，这表明第 1 个投资者零时刻的消费数量大于自己根据禀赋 w 分配的红利数量. 这是因为第 1 个投资者的时间容忍度低于第 2 个投资者，比较而言更加厌恶推迟消费. 因此当存在和第 2 个投资者的交易机会时，第 1 个投资者最优选择是出售部分所持股权以提前消费.

当投资者具有对数效用，即 $\gamma = 1$ 时，s 明显高于 w，提前消费倾向显著. 例如当 $\gamma = 1$，$w = 0.1$ 时，$s = 0.177\,6$，比 w 高出近 80%. 而对于其他水平的 γ，s 只是略大于 w. 这是由于参数为 γ 的 CRRA 效用的跨期替代弹性 $1/\gamma$，始终小于对数效用的跨期替代弹性 1. 因此对数偏好下第 1 个投资者的提前消费倾向总是大于 CRRA 效用下的.

表 2 零时刻最优消费比例 s

Table 2 The optimal consumption proportion s at time 0

s		w										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
γ	1	0	0.177 6	0.327 0	0.454 4	0.564 4	0.660 3	0.744 6	0.819 3	0.886 0	0.945 9	1.000 0
	5	0	0.105 3	0.209 1	0.311 6	0.412 8	0.513 0	0.612 1	0.710 3	0.807 6	0.904 2	1.000 0
	8	0	0.109 9	0.216 2	0.319 7	0.420 8	0.520 2	0.618 1	0.714 8	0.810 6	0.905 6	1.000 0

3.3 零时刻最优资产持有数量 N

表 3 反映第 1 个投资者零时刻的最优资产持有数量 N，它与股权比例成正比，与 s 的情况正相反. 当 $0 < w < 1$ 时，N 总是小于 w，这是由于第 1 个投资者部分出售股权以提前消费的缘故. 第 1 个投资者超过其禀赋份额 w 的消费 $(s - w)D$ 正是来自于出售股权数量的市场价值 $(w - N)P$，因此显然有

$$A = \frac{w - N}{s - w} \tag{50}$$

表 3 零时刻最优资产持有数量 N

Table 3 The optimal asset quantity N at time 0

N		w										
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
γ	1	0	0.097 4	0.195 4	0.294 0	0.393 1	0.492 8	0.593 1	0.693 9	0.795 4	0.897 4	1.000 0
	5	0	0.099 5	0.199 1	0.298 9	0.398 7	0.498 6	0.598 7	0.698 9	0.799 1	0.899 5	1.000 0
	8	0	0.099 7	0.199 4	0.299 2	0.399 1	0.499 1	0.599 1	0.699 2	0.799 4	0.899 7	1.000 0

3.4 零时刻资产收益状况

不难看出，零时刻瞬时无风险利率 r 和风险资产期望收益 $\mathrm{E}(R)$ 都是 w 的增函数，风险溢价 $\mathrm{E}(R) - r\mathrm{d}t$ 则与 w 无关，而由相对风险规避系数 γ 决定. 事实上可以证明风险溢价是 γ 的线性函数.

为了理解这一点，回忆离散时间资产定价基本方程⑤

$$p = \mathrm{E}(m\,x) \tag{51}$$

其中，m 是随机贴现因子；p 是资产支付 x 的价格. 如果存在利率为 r_f 的无风险借贷，则资产 x 的收益 R 满足

$$\mathrm{E}(R) - r_f = -r_f \mathrm{Cov}(R, m) \tag{52}$$

即资产的风险溢价由资产收益 R 和随机贴现因子 m 的协方差决定.

连续时间对应式(51)的资产定价基本方程为

$$0 = mD_t \mathrm{d}t + \mathrm{E}_t[\mathrm{d}(m\,P_t)] \tag{53}$$

对应式(52)的资产风险溢价为

$$\mathrm{E}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t}\right) + \frac{D_t}{P_t}\mathrm{d}t - r_t \mathrm{d}t = -\mathrm{E}_t\left[\frac{\mathrm{d}m}{m}\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t}\right] \tag{54}$$

⑤ 有关资产定价基本方程的主要结果参见文献[19]，连续时间资产定价参见文献[20]. 文献[21]是资产定价近 50 年的发展历程很好的综述.

将式(4)中的SDF代入式(54),可得

$$\mathrm{E}_t\left(\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t}\right)+\frac{D_t}{P_t}\mathrm{d}t-r_t\mathrm{d}t=\gamma\mathrm{E}_t\left(\frac{\mathrm{d}C_{1t}}{C_{1t}}\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t}\right)\quad(55)$$

其中等式左边前两项即资产收益R_t的条件期望.将消费C_{1t}和价格P_t的动态方程(33)和(43)代入式(55),可得到

$$\mathrm{E}_t(R_t)-r_t\mathrm{d}t=\gamma\sigma^2\mathrm{d}t\quad(56)$$

风险资产的期望收益$\mathrm{E}_t(R_t)$和无风险利率r_t由状态变量s_t决定,随时间变化.但是式(56)表明资产的风险溢价却保持不变,而由相对风险规避系数γ和红利波动方差σ^2决定.

实证资产定价文献中曾经积累了大量有关时变资产价格行为的发现,如动量效应,过度波动性、均值回复、价格对红利消息的反应过度或不足、价值和增长效应等.本文的模型表明,即使假设简单的红利动态过程和效用函数,包括时间容忍度、风险偏好、禀赋、信息等要素在内的异质性也将会导致复杂的资产价格和收益行为.本文模型中出现的复杂资产价格和收益动态为解释上述实证现象提供了思路.

4　结束语

本文在Lucas禀赋经济框架下,发展了存在异质性投资者的动态资产定价模型.在标准的代表性代理人资产定价模型中,投资者消费禀赋,没有交易发生.在CRRA偏好和i.i.d.几何布朗运动的红利动态假设下,资产价格正比于红利,投资机会集不随时间发生变化.

存在异质性投资者时,交易开始发生,两类具有不同主观时间偏好的投资者相互交换股份.本文证明了此时资产价格表现为复杂的超几何函数形式,而作为资本市场价值中枢的价格－红利比率概括了股权结构、红利动态、异质性偏好等资本市场和投资者的参数和结构.资产收益和无风险利率表现出明显的时变特征,意味着投资机会集随时间变化.还求解了投资者的最优消费和资产持有策略,同样体现出时变的特点.

参考文献:

[1] Lucas R E. Asset prices in an exchange economy [J]. Econometrica, 1978, 46(6): 1429－1445.

[2] Huang C F, Litzenberger R H. Foundations for Financial Economics [M]. New York: North Holland, 1988.

[3] Grossman S J, Zhou Z. Equilibrium analysis of portfolio insurance [J]. Journal of Finance, 1996, 51(4): 1379－1403.

[4] Wang J. The term structure of interest rates in a pure exchange economy with heterogeneous investors [J]. Journal of Financial Economics, 1996, 41(1): 75－110.

[5] Chan Y L, Kogan L. Heterogeneous Preferences and the Dynamics of Asset Prices [R]. NBER, 2001.

[6] Mehra R, Prescott E C. The equity premium: A puzzle [J]. Journal of Monetary Economics, 1985, 15(2): 145－161.

[7] Cochrane J H, Longstaff F A, Santa-Clara P. Two Trees: Asset Price Dynamics Induced by Market Clearing [R]. NBER, 2003.

[8] Longstaff F A. Asset Pricing in Markets with Illiquid Assets [R]. NBER, 2005.

[9] Gollier C, Zeckhauser R. Aggregation of heterogeneous time preferences [J]. Journal of Political Economy, 2005, 113(4): 878－896.

[10] Malamud S, Trubowitz E. Aggregate Risk Aversion for Jointly Heterogeneous Discount Factors and Risk Tolerances [R]. SSRN, 2006.

[11] Hara C. Complete monotonicity of the representative consumer's discount factor [J]. Journal of Mathematical Economics, 2008, 44(12): 1321－1331.

[12] Hara C. Heterogeneous Impatience in a Continuous-Time Model [R]. Kyoto University, 2009.

[13] 吴卫星, 汪勇祥. 基于搜寻的有限参与、事件风险与流动性溢价 [J]. 经济研究, 2004, (8): 85－93.
Wu Weixing, Wang Yongxiang. The limited participation, event risk and liquidity premium based on searching [J]. Eco-

nomic Research Journal, 2004, (8): 85－93. (in Chinese)

[14] 袁 宁. 非交易性资产和资本市场均衡[J]. 数量经济技术经济研究, 2005, 22(6): 141－152.
Yuan Ning. Nonmarketable assets and the equilibrium in capital market[J]. Journal of Quantitative and Technical Economics, 2005, 22(6): 141－152. (in Chinese)

[15] 陈彦斌, 周业安. 异质性财富偏好和资产定价[J]. 经济学季刊, 2006, 5(2): 361－378.
Chen Yanbin, Zhou Yean. Heterogeneous wealth preference and asset pricing[J]. China Economic Quarterly, 2006, 5(2): 361－378. (in Chinese)

[16] 袁 宁. 非流动性市场中的跨期最优消费和投资策略[J]. 中国管理科学, 2009, 17(4): 39－45.
Yuan Ning. Intertemporal optimal consumption and portfolio selection in an illiquid market[J]. Chinese Journal of Management Science, 2009, 17(4): 39－45. (in Chinese)

[17] 邹小芃, 黄 峰, 杨朝军. 流动性风险、投资者流动性需求与资产定价[J]. 管理科学学报, 2009, 12(6): 141－152.
Zou Xiaopeng, Huang Feng, Yang Chaojun. The liquidity risk, liquidity demand and asset pricing[J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(6): 141－152. (in Chinese)

[18] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Tables of Integrals, Series, and Products[M]. Sixth Edition, New York: Academic Press, 2000.

[19] Cochrane J H. Asset Pricing[M]. Princeton: Princeton University Press, 2001.

[20] Merton R C. Continuous-Time Finance[M]. Blackwell: Oxford Press, 1992.

[21] Campbell J Y. Asset pricing at the millennium[J]. Journal of Finance, 2000, 55(4): 1515－1566.

Heterogeneous time preference and asset pricing

YUAN Ning[1], *SHI Jia-yue*[2]

1. School of Guanghua Management, Peking University, Beijing 100871, China;
2. School of Economics and Management, Yantai University, Yantai 264003, China

Abstract: Incorporating heterogeneous investors is an important research direction in asset pricing. In this paper, heterogeneity in time preference is incorporated in Lucas's pure exchange economy framework and a continuous-time dynamic asset pricing model is developed to analyze heterogeneous time preference. Analytical solutions of asset prices are presented and the investors' optimal consumption and investment policies are analyzed. Numerical analysis is given to demonstrate the asset pricing implications of time preference heterogeneity.

Key words: heterogeneous time preference; the representative agent; asset pricing

附录

1 求解价格 P_t

由式(10),均衡消费增长

$$\frac{C_{1\,t+s}}{C_{1\,t}} = \frac{1}{C_{1\,t} + \mathrm{e}^{(\beta-\delta)s/\gamma}C_{2t}}D_{t+s} \tag{A1}$$

代入价格公式(6),有

$$\begin{aligned} P_t &= \mathrm{E}_t\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta s}\left(\frac{C_{1\,t+s}}{C_{1\,t}}\right)^{-\gamma}D_{t+s}\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{E}_t\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta s}(C_{1\,t} + \mathrm{e}^{(\beta-\delta)s/\gamma}C_{2t})^{\gamma}D_{t+s}^{1-\gamma}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{A2}$$

由于红利 D_t 服从 i. i. d. 几何布朗运动,很容易证明

$$\mathrm{E}_t\left(\frac{D_{t+s}}{D_t}\right)^{1-\gamma} = \mathrm{e}^{\lambda s} \tag{A3}$$

其中 λ 定义为

$$\lambda = (1-\gamma)\mu - \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)\sigma^2 \tag{A4}$$

将式(A2)交换积分和期望算子次序并利用式(A3)可得

$$P_t = D_t^{1-\gamma}\int_0^\infty e^{(\lambda-\beta)s}(C_{1t} + e^{(\beta-\delta)s/\gamma}C_{2t})^\gamma ds \tag{A5}$$

定义 $x = e^{(\beta-\delta)s/\gamma}$，有

$$s = \frac{\gamma}{\beta-\delta}\ln x,$$

$$ds = \frac{\gamma}{\beta-\delta}\frac{1}{x}dx$$

对式(A4)进行积分变换可得

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{\gamma}{\beta-\delta}D_t^{1-\gamma}\int_1^\infty x^{\left(\frac{\lambda-\beta}{\beta-\delta}\right)\gamma-1}(C_{1t}+C_{2t}x)^\gamma dx \\ &= \frac{\gamma}{\beta-\delta}D_t^{1-\gamma}C_{1t}^\gamma\int_1^\infty x^{\left(\frac{\lambda-\beta}{\beta-\delta}\right)\gamma-1}\left(1+\frac{C_{2t}}{C_{1t}}x\right)^\gamma dx \end{aligned} \tag{A6}$$

如果 $\lambda > \delta$，由文献[18]积分方程3.194.2[⑥]，将式(A6)整理可得

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{1}{\delta-\lambda}D_t^{1-\gamma}C_{2t}^\gamma \times \\ &\quad F\left(-\gamma, \xi\gamma; \xi\gamma+1; -\frac{C_{1t}}{C_{2t}}\right) \end{aligned} \tag{A7}$$

其中定义

$$\xi = \frac{\delta-\lambda}{\beta-\delta} \tag{A8}$$

如果 $\lambda < \delta$，对式(A5)做变换 $y = \frac{1}{x}$，$dx = -\frac{1}{y^2}dy$ 有

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{\gamma}{\beta-\delta}D_t^{1-\gamma}\int_0^1 y^{\left(\frac{\delta-\lambda}{\beta-\delta}\right)\gamma-1}(C_{1t}y+C_{2t})^\gamma dy \\ &= \frac{1}{\beta-\delta}D_t^{1-\gamma}C_{2t}^\gamma\int_0^1 y^{\left(\frac{\delta-\lambda}{\beta-\delta}\right)\gamma-1}\left(\frac{C_{1t}}{C_{2t}}t+1\right)^\gamma dy \end{aligned} \tag{A9}$$

根据文献[18]积分方程3.194.1[⑦]，由式(A9)同样有式(A7)成立. 这就是价格方程(12).

2　求解 Q

由式(22)，Q 可以表示为

$$Q = E\int_0^\infty e^{-\beta t}\left(\frac{C_{1t}}{C_1}\right)^{-\gamma}C_{2t}dt \tag{A10}$$

而消费由式(31)和(32)为

$$C_{1t} = \frac{C_1}{C_1 + e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}D_t \tag{A11}$$

$$C_{2t} = \frac{e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}{C_1 + e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2}D_t \tag{A12}$$

将式(A11)和(A12)代入式(A10)直接求解积分，有

$$Q = E\int_0^\infty e^{-\beta t}(C_1 + e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2)^{\gamma-1}C_2e^{(\beta-\delta)t/\gamma}D_t^{1-\gamma}dt \tag{A13}$$

定义 $x = e^{-(\beta-\delta)t/\gamma}$，有

$$t = -\frac{\gamma}{\beta-\delta}\ln x,$$

$$dt = -\frac{\gamma}{\beta-\delta}\frac{1}{x}dx$$

对式(A13)进行积分变换，整理可得到

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\gamma}{\beta-\delta}C_2D^{1-\gamma}\int_0^1 x^{\frac{\delta-\lambda}{\beta-\delta}\gamma-1}(C_1x+C_2)^{\gamma-1}dt \\ &= \frac{\gamma}{\beta-\delta}C_2^\gamma D^{1-\gamma}\int_0^1 x^{\xi\gamma-1}\left(\frac{C_1}{C_2}x+1\right)^{\gamma-1}dt \\ &= \frac{1}{\delta-\lambda}D^{1-\gamma}C_2^\gamma F\left(1-\gamma, \xi\gamma; \xi\gamma+1; -\frac{C_1}{C_2}\right) \end{aligned} \tag{A14}$$

其中利用了 ξ 的定义式(A8)，以及文献[18]积分方程3.194.1.

除了直接积分求解出 Q 的显性解式(A14)以外，还可以用分步积分法将 Q 表示为价格 P 和红利 D 的线性函数这一更为简洁的形式，即

$$\begin{aligned} Q &= E\int_0^\infty e^{-\beta t}\left(\frac{C_{1t}}{C_{1t}}\right)^{-\gamma}C_{2t}dt \\ &= E\int_0^\infty e^{-\beta t}(C_1 + e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2)^{\gamma-1}C_2e^{(\beta-\delta)t/\gamma}D_t^{1-\gamma}dt \\ &= D^{1-\gamma}\int_0^\infty e^{(\lambda-\beta)t}[C_1 + e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2]^{\gamma-1}C_2e^{(\beta-\delta)t/\gamma}dt \\ &= \left(\frac{D^{1-\gamma}}{\beta-\delta}\right)\int_0^\infty e^{(\lambda-\beta)t}d[C_1 + e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2]^\gamma \\ &= \left(\frac{D^{1-\gamma}}{\beta-\delta}\right)e^{(\lambda-\beta)t}[C_1 + e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2]^\gamma \Big|_0^\infty \\ &\quad - \left(\frac{D^{1-\gamma}}{\beta-\delta}\right)(\lambda-\beta)\int_0^\infty e^{(\lambda-\beta)t}[C_1 + e^{(\beta-\delta)t/\gamma}C_2]^\gamma dt \end{aligned}$$

假设 $\lambda < \delta$，并且利用价格方程(A4)，上述积分可解得

$$Q = -\left(\frac{\lambda-\beta}{\beta-\delta}\right)P - \left(\frac{1}{\beta-\delta}\right)D \tag{A15}$$

---

⑥ $\int_u^\infty \frac{x^{\mu-1}}{(1+\phi x)^v}dv = \frac{u^{\mu-v}}{\phi^v(v-\mu)}F\left(v, v-\mu; v-\mu+1; -\frac{1}{\phi u}\right)$
$\mathrm{Re}(\mu) > \mathrm{Re}(v)$
这里 $\mu = \left(\frac{\gamma-\beta}{\beta-\delta}\right)\gamma$，$v = -\gamma$，$\phi = \frac{C_{2t}}{C_{1t}}$，$u = 1$. $\lambda > \delta$ 保证了 $\mathrm{Re}(\mu) > \mathrm{Re}(v)$ 成立.

⑦ $\int_0^u \frac{x^{\mu-1}}{(1+\phi x)^v}dx = \frac{u^\mu}{\mu}F(v, \mu; \mu+1; -\phi u)$ $\mathrm{Re}(\mu) > 0$　$|\arg(1+\beta u)| < \pi$ 这里 $\mu = \xi$，$\nu = -\gamma$，$\phi = C_{1t}/C_{2t}$，$u = 1$. $\lambda < \delta$ 保证了 $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ 成立.