

泡沫变化过程的动态贝叶斯模型研究^①

刘振涛¹, 左浩苗², 张振轩²

(1. 厦门大学财务管理与会计研究院, 厦门 361005;

2. 厦门大学王亚南经济研究院, 厦门 361005)

摘要: 构建了能够刻画资产价格泡沫形成、增长到破灭过程的统计模型. 通过估计模型里的时变系数, 可以确定泡沫产生的时点和持续时间. 该模型也同时刻画了泡沫破灭的概率随着资产价格偏离其基本价值越来越远而变得越来越大的特征. 为了对模型进行估计, 提出了贝叶斯递归算法和近似算法, 并以北京房地产市场为例对模型的应用进行了探讨.

关键词: 资产泡沫; 贝叶斯统计; 房地产价格

中图分类号: F224.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2012)09-0074-10

0 引言

从17世纪荷兰著名的郁金香泡沫开始到美国上世纪90年代末的互联网泡沫, 资产价格的大幅上涨和下跌, 一直是投资者、政府当局和学者关注的问题. 顾名思义, 投机泡沫的特征是价格在初期不断攀升, 接下来突然暴跌. 从理论研究的角度来看, Burmeister^[1], Cass 和 Shell^[2], Tirole^[3], Diba 和 Grossman^[4] 认为这种价格的走势反映了经济人的非理性行为. 从实证研究的角度来看, 学者们的主要兴趣是: 相比其他模型, 上述的价格走势是否能够被投机泡沫更好地解释? 目前, 各种统计方法主要关注于对投机泡沫的存在性和持续性的检验. 这些检验方法都是基于价格序列的发散性或不稳定性^[5-6].

当泡沫增长时, 价格序列表现出发散的特征; 而当泡沫破灭时, 价格序列则会出现向下跳跃. 这个特征虽然对定义投机泡沫非常重要, 但对它进行统计分析难度较大. Shiller^[7]、LeRoy 和 Porter^[8] 提出了方差边界检验 (variance bounds test), 对泡沫的检验特别是股市泡沫的检验做了开创性的工作. 但之后的 Flavin^[9] 以及 Marsh 和 Mer-

ton^[10] 指出当股利或股价是非平稳的时候, 这个检验就会失效. West^[6] 构造了两步检验的方法, 试图同时检验模型的设定和泡沫是否存在. Flood 和 Hodrick^[11] 指出文献 [6] 的检验对代表性主体期望形成方式的设定和时间序列遍历性 (ergodicity) 的假设比较敏感.

另一方面, 泡沫过程也被认为是重复生成和破灭的过程. Evans^[12] 指出 Diba 和 Grossman^[13] 的检验对周期性破灭的泡沫过程没有足够的功效 (power). Hall 等^[14] 提出机制转换的单位根检验来检测周期性破灭的泡沫. Phillips 等^[15] 提出了递归单位根检验 (recursive unit-root test) 来避免文献 [13] 的不足. 他们通过对不同样本的序贯 Dickey-Fuller 检验来验证爆炸性增长的备择假设, 同时能够将时间序列从泡沫产生到爆炸性增长的结构突变点识别出来作为泡沫开始的时间. Homm 和 Breitung^[16] 比较了 Bhargava^[17]、Buseti 和 Taylor^[18] 与 Kim^[19] 检验、扩展的邹检验和 Phillips 等^[15] 检验的效果. Pavlidis 等^[20] 应用了文献 [17] 的检验对美国房地产市场是否存在泡沫进行检验并认为房价只有在高速上涨时期才对消费

① 收稿日期: 2010-08-20; 修订日期: 2011-09-21.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71001087); 教育部人文社会科学研究规划基金资助项目(11YJA790095); 教育部博士研究生学术新人奖资助项目; 厦门大学优秀博士培养计划资助项目; 厦门大学基础创新科研基金资助项目(201222G008).

作者简介: 刘振涛(1965—), 男, 吉林龙井人, 博士, 副教授. Email: lzt@xmu.edu.cn

有重要的影响. Asako 等^[21]对美国股市泡沫进行研究,特别考察了1987年股灾前的泡沫. Gürkaynak^[22]的综述文章指出,截止到目前,对泡沫的计量检验仍然没有达到令人满意的准确程度,对于每个被认为找到泡沫证据的序列,总有不用泡沫的假设即可以拟合数据的方法.因此,这些检验仍然不能将泡沫与时变的或者存在机制转换的基本面变化区分开来.同时,这些检验的小样本问题仍然没有解决.

从文献回顾中可以看到,对于泡沫识别的统计检验仍有很大的发展空间,同时,文献中也较少关注对泡沫演变过程本身的刻画.本文的目的就是要构建投机泡沫的统计模型来描述上述价格变化趋势. Harrison 和 Stevens^[23]构建了动态线性模型 (dynamic linear model, DLM) 来描述价格趋势的突然变化.他们同时也构建了概率加权的多状态 DLM 模型.本文拓展了上述模型,同时刻画了时变系数、时变系数的转移过程和状态依赖的泡沫破灭概率,这使得简单的极大似然估计变得不可行.因此本文采用了贝叶斯递归计算方法,同时提出了近似算法来降低计算量.

1 模型描述

本文考虑的投机泡沫模型为

$$x_t = \begin{cases} \beta_t x_{t-1} + u_t, & \text{(A) 概率为 } \pi_t \\ u_t, & \text{(B) 概率为 } 1 - \pi_t \end{cases} \quad (1)$$

其中: x_t 表示价格序列对其基本面的偏离; π_t 表示 x_t 依赖 x_{t-1} 的概率; u_t 为正态随机干扰项,其均值为0,方差为 σ_u^2 ; 系数 β_t 是时变的参数,它的变化遵从下面的随机游走过程

$$\beta_t = \beta_{t-1} + v_t, v_t \sim N(0, \sigma_v^2) \quad (2)$$

其中 σ_u^2, σ_v^2 是未知常数.

当资产如股票或者不动产的价格序列中投机泡沫持续的时候, x_t 作为价格对基本面的偏离,应该是发散的时间序列.本文通过自回归模型 (A) 来描述这个过程,此时要求 β_t 大于1,表明泡沫持续扩大.同样,在投机泡沫的定义中,发散的泡沫序列在某一未知的时间内会突然崩溃.本文用模型 (A) 到模型 (B) 的转换来刻画.此外 $0 < \beta_t \leq 1$ 对应泡沫并没有继续放大,也没有马上破灭的中间状态.

具体来说,假设泡沫持续的可能性可表示为

$$\pi_t = e^{-\gamma - \alpha |x_{t-1}|}, \alpha, \gamma > 0 \quad (3)$$

其中 α 和 γ 是未知的参数.这个公式表示泡沫破灭的可能性是观察到的资产价格与其基本面的偏离(泡沫大小)的函数, $|x_{t-1}|$ 的绝对值越大,破灭的可能性越大.当 $\alpha = 0$ 时, π_t 独立于 x_{t-1} ,此时,泡沫破灭的可能性是恒定的;当 $\alpha = \gamma = 0$ 时,整个过程就可以完全被自回归的过程 (A) 来描述;当 γ 的值比较大时或者 $\beta_t = 0$ 时,这个过程退化为一个白噪音过程,投机泡沫就不存在了.因此,通过对参数的估计,可以在统计上检验这个过程的性质.

当泡沫是理性的,则 β_t, π_t 与折现率 r_t 之间的关系为

$$r_t = \pi_t \beta_t - 1 \quad (4)$$

因此 β_t 是一个关于 π_t 与 r_t 的方程,并且不是常数.这个模型允许 β_t 随时间变化,但是不能预先排除理性的泡沫.原则上,可以通过设定 u_t 服从更一般的随机模型,比如 ARMA 过程,或者通过向转移概率的函数形式中引入描述基本面价值的变量来一般化模型.然而,本文力图在揭示问题本质的前提下使模型尽可能简单.

当考虑泡沫破灭的概率结构时,发现泡沫不可能永远地持续.当它增长的时候,破灭的可能性趋向于1,并且 x_t 迟早会被拉回到它的均值0处.这样,价格的时间序列就不会永远发散,而是在长期中表现出稳定的特征.

本文关于泡沫过程的设定式(1)与 Diba 和 Grossman^[4]等的经典设定是一致的.他们设定泡沫过程 B_t 服从 $B_{t+1} = \theta_{t+1} B_t + \varepsilon_{t+1}$ 的过程,并且当 $\theta_{t+1} = 0$ 时泡沫破灭. Evans^[12]更进一步指出泡沫存在破灭的概率,但他假设这个概率为常数,并根据这一特征构造了检验统计量. Homm 和 Breitung^[16]的综述文章中所比较的 Bhargava^[17]、Busetti 和 Taylor^[18]、Kim^[19]、扩展的邹与 Phillips 等^[15]的检验方法均是基于当泡沫扩大时价格将不是单位根过程,而是扩散或者放大的过程.本文的区别在于引入了时变的参数 β_t , 刻画动态过程,并且给出了 β_t 和概率 π_t 的动态过程的合理设定,通过 β_t 与1的比较判断泡沫的持续状况.在此基础上,直接对这个动态过程进行估计,通过时变参数提取更多的信息.

从统计意义来看,上述模型通过引入依赖泡

沫水平的泡沫破灭概率,使得时间序列即使在短期内是发散的,在长期也会表现出稳定的性质.一些实际的时间序列如股价没有出现永远发散的情况,在某种程度上是因为存在监管机构的干预.这种现象也可以用这个模型来描述.此外,通过构建用来描述泡沫现象的模型,既能检验泡沫是否存在,同时也能估计它的基本特性.

2 递归估计

在这部分,本文描述用来估计本文模型参数的贝叶斯递归算法.首先,给出在第1期的估计过程($P(x_1 | x_0)$)的具体解释,估计过程是在假设初值 x_0 和第1个观测 x_1 已经给出的条件下进行的,然后得出估计的一般递归公式.

2.1 初始阶段

用 $(Y | X)$ 表示以 X 为条件的随机变量 Y ; $P(Y | X)$ 表示 Y 的条件概率密度, X 和 Y 可以是随机变量或随机向量.首先假设式(3)中的 α, γ 和式(1)中 β_0 的概率密度如下

$$\begin{cases} P(\alpha | x_0) = \hat{a}_0 e^{-\hat{a}_0 \alpha} \hat{a}_0 > 0 \\ P(\gamma | x_0) = \hat{c}_0 e^{-\hat{c}_0 \gamma} \hat{c}_0 > 0 \\ P(\beta_0 | x_0) = N_{\beta_0}(\hat{\beta}_0, \hat{\sigma}_0^2) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $N_x(\xi, \zeta)$ 表示 x 的均值为 ξ 、方差为 ζ 的正态

$$\hat{c}_0 e^{-(\hat{c}_0+1)\gamma} \hat{a}_0 e^{-(\hat{a}_0+1)\alpha} N_{x_1}(\beta_1 x_0, \sigma_u^2) N_{\beta_1}(\hat{\beta}_0, \hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2) - \hat{c}_0 e^{-(\hat{c}_0+1)\gamma} \hat{a}_0 e^{-(\hat{a}_0+1)\alpha} N_{x_1}(0, \sigma_u^2) \times N_{\beta_1}(\hat{\beta}_0, \hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2) + \hat{c}_0 e^{-\hat{c}_0 \gamma} \hat{a}_0 e^{-\hat{a}_0 \alpha} N_{x_1}(0, \sigma_u^2) N_{\beta_1}(\hat{\beta}_0, \hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2) \quad (10)$$

然后,使用如下关系

$$N_{x_1}(\beta_1 x_0, \sigma_u^2) N_{\beta_1}(\hat{\beta}_0, \hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2) = N_{x_1}(\hat{\beta}_0 x_0, (\hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2) x_0^2 + \sigma_u^2) \times N_{\beta_1} \left(\frac{(\hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2) x_1 x_0 + \sigma_u^2 \hat{\beta}_0}{(\hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2) x_0^2 + \sigma_u^2}, \frac{(\hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2) \sigma_u^2}{(\hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2) x_0^2 + \sigma_u^2} \right) \quad (11)$$

并且通过直接计算下面的边际密度

$$P(x_1 | x_0) = \iiint P(x_1 | \alpha, \beta_1, \gamma | x_0) d\alpha d\beta_1 d\gamma \\ = \frac{\hat{c}_0}{\hat{c}_0 + 1} \frac{\hat{a}_0}{\hat{a}_0 + |x_0|} N_{x_1}(\hat{\beta}_0 x_0, (\hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2) x_0^2 + \sigma_u^2) + \left(1 - \frac{\hat{c}_0}{\hat{c}_0 + 1} \frac{\hat{a}_0}{\hat{a}_0 + |x_0|}\right) N_{x_1}(0, \sigma_u^2) \quad (12)$$

可以得到如下的密度公式

$$P(\alpha, \beta, \gamma | x_1, x_0) = \frac{P(x_1 | \alpha, \beta_1, \gamma | x_0)}{P(x_1 | x_0)} = \sum_{i=1}^3 f(i) g(i) P_i(\alpha, \gamma | x_1, x_0) N_{\beta_1}(\hat{\mu}(i), \hat{\sigma}^2(i)) \quad (13)$$

概率密度函数. α 和 γ 的初始分布是指数分布.假设随机变量 $(\alpha | x_0)$ 、 $(\beta_0 | x_0)$ 和 $(\gamma | x_0)$ 是互相独立的,有

$$P(\alpha, \beta_0, \gamma | x_0) = P(\alpha | x_0) P(\beta_0 | x_0) P(\gamma | x_0) \\ = \hat{a}_0 e^{-\hat{a}_0 \alpha} \hat{c}_0 e^{-\hat{c}_0 \gamma} N_{\beta_0}(\hat{\beta}_0, \hat{\sigma}_0^2) \quad (6)$$

如果式(6)是正确的,那么,从式(2)可以得出

$$P(\alpha, \beta_1, \gamma | x_0) = P(\alpha | x_0) P(\beta_1 | x_0) P(\gamma | x_0) \\ = \hat{a}_0 e^{-\hat{a}_0 \alpha} \hat{c}_0 e^{-\hat{c}_0 \gamma} N_{\beta_1}(\hat{\beta}_0, \hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2) \quad (7)$$

从模型(1)的设定可以得出随机变量 $(x_1 | \alpha, \beta_1, \gamma, x_0)$ 的密度函数为 $N_{x_1}(\beta_1 x_0, \sigma_u^2)$ 的概率为 π_1 ;密度函数为 $N_{x_1}(0, \sigma_u^2)$ 的概率为 $1 - \pi_1$.可以更确切地得到

$$P(x_1 | \alpha, \beta_1, \gamma, x_0) = e^{-\gamma - \alpha |x_0|} N_{x_1}(\beta_1 x_0, \sigma_u^2) + (1 - e^{-\gamma - \alpha |x_0|}) N_{x_1}(0, \sigma_u^2) \quad (8)$$

但是,显然有

$$P(x_1 | \alpha, \beta_1, \gamma | x_0) = P(x_1 | \alpha, \beta_1, \gamma, x_0) P(\alpha, \beta_1, \gamma | x_0) \quad (9)$$

从式(7)和式(8),可以得到式(9)的右边为

在给定 x_0 和 x_1 结合公式 (2) 和后验概率密度公式 (13) 就能够计算 α β_2 和 γ 的联合密度. 然后, 把所得到的密度在下一步中替换掉式 (7) 就可以进行递归估计了. 在式 (13) 中

$$P_i(\alpha \gamma | x_1 x_0) = [(\hat{c}_0 + \delta(i)) e^{-(\hat{c}_0 + \delta(i))\gamma}] \times [(\hat{a}_0 + |x_0| \delta(i)) e^{-(\hat{a}_0 + |x_0| \delta(i))\alpha}], \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

其中 $\delta(i)$ 的定义为

$$\delta(i) = \begin{cases} 1 & \text{对于 } i = 1, 2 \\ 0 & \text{对于 } i = 3 \end{cases} \quad (15)$$

其他系数定义如下

$$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{P(x_1 | x_0)} \times N_{x_1}(\hat{\beta}_0 x_0 | (\hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2)x_0^2 + \sigma_u^2) \\ f(2) = -f(3) = -\frac{1}{P(x_1 | x_0)} N_{x_1}(0 | \sigma_u^2) \end{cases} \quad (16)$$

$$g(i) = \left[\frac{\hat{a}_0}{\hat{a}_0 + |x_0| \delta(i)} \right] \left[\frac{\hat{c}_0}{\hat{c}_0 + \delta(i)} \right], \quad i = 1, 2, 3 \quad (17)$$

$$\hat{\mu}(1) = \frac{(\hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2)x_1 x_0 + \sigma_u^2 \hat{\beta}_0}{(\hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2)x_0^2 + \sigma_u^2} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \hat{\mu}(2) = \hat{\mu}(3) = \hat{\beta}_0 \\ \hat{\sigma}^2(1) = \frac{(\hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2)\sigma_u^2}{(\hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2)x_0^2 + \sigma_u^2} \\ \hat{\sigma}^2(2) = \hat{\sigma}^2(3) = \hat{\sigma}_0^2 + \sigma_v^2 \end{cases} \quad (19)$$

在时期 1 的 α β_1 和 γ 的期望值被用作这些参数的估计值, 并可过式 (13) 计算如下

$$\hat{\alpha}_1 = E(\alpha | x_1 x_0) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\hat{a}_0 + |x_0| \delta(i)} f(i) g(i) \quad (20)$$

$$\hat{\beta}_1 = E(\beta_1 | x_1 x_0) = \sum_{i=1}^3 f(i) g(i) \hat{\mu}(i) \quad (21)$$

$$\hat{\gamma}_1 = E(\gamma | x_1 x_0) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\hat{c}_0 + \delta(i)} f(i) g(i) \quad (22)$$

$\hat{\alpha}_1$ 与 $\hat{\gamma}_1$ 可用来估计泡沫从 0 时期到 1 时期的持续概率

$$\hat{\pi}_1 = e^{-\hat{\gamma}_1 - \hat{\alpha}_1 |x_0|} \quad (23)$$

π_1 期望值的表达式也可以准确写为

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1 &= E(e^{-\gamma - \alpha |x_0|} | x_1 x_0) \\ &= \sum_{i=1}^3 f(i) g(i) \left[\frac{\hat{c}_0 + \delta(i)}{\hat{c}_0 + 1 + \delta(i)} \right] \times \left[\frac{\hat{a}_0 + |x_0| \delta(i)}{\hat{a}_0 + |x_0| (1 + \delta(i))} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

理论上应该用 $\tilde{\pi}$ 而不是 $\hat{\pi}_1$ 来估计泡沫持续的可能性. Jensen 不等式表明 $\tilde{\pi}_1$ 不小于 $\hat{\pi}_1$, 表示式 (23) 的使用相对地低估了泡沫持续的可能性.

对于 β_1 , 得到其方差的估计为

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\beta_1}^2 &= \text{Var}(\beta_1 | x_1 x_0) \\ &= \sum_{i=1}^3 f(i) g(i) (\hat{\sigma}^2(i) + \hat{\mu}^2(i)) - \hat{\beta}_1^2 \end{aligned} \quad (25)$$

得到均值式 (21) 后, 就可以通过计算 t 值来判断 β_1 的显著性水平.

2.2 一般递归方程

上述的过程可以拓展得到从 $t-1$ 期到 t 期一般递归方程, 并且可以根据 t 期之前的时间序列来估计参数. 定 t 期之前的一系列观测值为 $X^t = \{x_t, x_{t-1}, \dots, x_0\} = \{x_t, X^{t-1}\}$, 定义一整数序列为 $I^t = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$, 其每个元素 $i_s (s = 1, 2, \dots, t)$ 可以取值 1, 2 或者 3.

应用上述符号, 把 α β_{t-1} 和 γ 的条件联合密度表示为

$$\begin{aligned} P(\alpha \beta_{t-1} \gamma | X^{t-1}) &= \sum_{I^{t-1}} f(I^{t-1}) g(I^{t-1}) \times \\ &P_{I^{t-1}}(\alpha \gamma | X^{t-1}) N_{\beta_{t-1}}(\hat{\mu}(I^{t-1}) | \hat{\sigma}^2(I^{t-1})) \end{aligned} \quad (26)$$

公式 (26) 右半部分的定义在下面给出. 注意总和是所有项数的和, 项数为 3^{t-1} . 所以, 给定 X^{t-1} , α , β_t 和 γ 的联合概率为

$$\begin{aligned} P(\alpha \beta_t \gamma | X^{t-1}) &= \sum_{I^{t-1}} f(I^{t-1}) g(I^{t-1}) \times \\ &P_{I^{t-1}}(\alpha \gamma | X^{t-1}) N_{\beta_t}(\hat{\mu}(I^{t-1}) | \hat{\sigma}^2(I^{t-1}) + \sigma_v^2) \end{aligned} \quad (27)$$

现在的主要工作是利用贝叶斯原理来计算下一时期的后验概率

$$\begin{aligned} P(\alpha \beta_t \gamma | X^t) &= \\ &\frac{P(\alpha \beta_t \gamma | X^{t-1}) P(x_t | \alpha \beta_t \gamma | X^{t-1})}{P(x_t | X^{t-1})} \end{aligned} \quad (28)$$

根据式 (8) ,可以得到

$$P(x_t | \alpha \beta_t \gamma \mathbf{X}^{t-1}) = e^{-\gamma - \alpha x_{t-1}} N_{x_t}(\beta_t x_{t-1} \sigma_u^2) + (1 - e^{-\gamma - \alpha x_{t-1}}) N_{x_t}(0 \sigma_u^2) \quad (29)$$

因此 鉴于式 (28) ,当且仅当下面式 (30) 到式 (34) 成立 ,式 (27) 和式 (29) 的乘积就可产生式 (27) 在 t 期的更新式

$$P_t(\alpha \gamma | \mathbf{X}^t) = \left(\hat{c}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \delta(i_s) \right) \exp \left[- \left(\hat{c}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \delta(i_s) \right) \gamma \right] \times \left(\hat{a}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} |x_s| \delta(i_s) \right) \times \exp \left[- \left(\hat{a}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} |x_s| \delta(i_s) \right) \alpha \right] \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(\mathbf{I}^{t-1} \ 1) &= \frac{f(\mathbf{I}^{t-1})}{P(x_t | \mathbf{X}^{t-1})} \times \\ &N_{x_t}(\hat{\mu}(\mathbf{I}^{t-1}) x_{t-1} (\hat{\sigma}^2(\mathbf{I}^{t-1}) + \sigma_v^2) x_{t-1}^2 + \sigma_u^2) \\ f(\mathbf{I}^{t-1} \ 2) &= -f(\mathbf{I}^{t-1} \ 3) \\ &= -\frac{f(\mathbf{I}^{t-1})}{P(x_t | \mathbf{X}^{t-1})} N_{x_t}(0 \sigma_u^2) \end{aligned} \right. \quad (31)$$

其中

$$g(\mathbf{I}^t) = g(\mathbf{I}^{t-1} \ i) = g(\mathbf{I}^{t-1}) \left[\frac{\hat{a}_0 + \sum_{s=0}^{t-2} |x_s| \delta(i_s)}{\hat{a}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} |x_s| \delta(i_s)} \right] \times \left[\frac{\hat{c}_0 + \sum_{s=0}^{t-2} \delta(i_s)}{\hat{c}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \delta(i_s)} \right] = \left[\frac{\hat{a}_0}{\hat{a}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} |x_s| \delta(i_s)} \right] \times \left[\frac{\hat{c}_0}{\hat{c}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \delta(i_s)} \right] \quad (32)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\mu}(\mathbf{I}^{t-1} \ 1) &= \frac{(\hat{\sigma}^2(\mathbf{I}^{t-1}) + \sigma_v^2) x_{t-1} x_t + \sigma_u^2 \hat{\mu}(\mathbf{I}^{t-1})}{(\hat{\sigma}^2(\mathbf{I}^{t-1}) + \sigma_v^2) x_{t-1}^2 + \sigma_u^2} \quad (33) \\ \hat{\mu}(\mathbf{I}^{t-1} \ 2) &= \hat{\mu}(\mathbf{I}^{t-1} \ 3) = \hat{\mu}(\mathbf{I}^{t-1}) \\ \hat{\sigma}^2(\mathbf{I}^{t-1} \ 1) &= \frac{(\hat{\sigma}^2(\mathbf{I}^{t-1}) + \sigma_v^2) \sigma_u^2}{(\hat{\sigma}^2(\mathbf{I}^{t-1}) + \sigma_v^2) x_{t-1}^2 + \sigma_u^2} \\ \hat{\sigma}^2(\mathbf{I}^{t-1} \ 2) &= \hat{\sigma}^2(\mathbf{I}^{t-1} \ 3) = \hat{\sigma}^2(\mathbf{I}^{t-1}) + \sigma_v^2 \end{aligned} \right. \quad (34)$$

$$P(x_t | \mathbf{X}^{t-1}) = \iiint P(x_t | \alpha \beta_t \gamma | \mathbf{X}^{t-1}) d\alpha d\beta_t d\gamma = \sum_{\mathbf{I}^{t-1}} f(\mathbf{I}^{t-1}) g(\mathbf{I}^{t-1} \ 1) \times N_{x_t}(\hat{\mu}(\mathbf{I}^{t-1}) x_{t-1} (\hat{\sigma}^2(\mathbf{I}^{t-1}) + \sigma_v^2) x_{t-1}^2 + \sigma_u^2) - \sum_{\mathbf{I}^{t-1}} f(\mathbf{I}^{t-1}) g(\mathbf{I}^{t-1} \ 2) N_{x_t}(0 \sigma_u^2) + \sum_{\mathbf{I}^{t-1}} f(\mathbf{I}^{t-1}) g(\mathbf{I}^{t-1} \ 3) N_{x_t}(0 \sigma_u^2) \quad (35)$$

$$P(x_t | \alpha \beta_t \gamma | \mathbf{X}^{t-1}) = P(x_t | \alpha \beta_t \gamma \mathbf{X}^{t-1}) P(\alpha \beta_t \gamma | \mathbf{X}^{t-1}) \quad (36)$$

$\alpha \beta_t$ 和 γ 在 t 期间的估计值是关于 \mathbf{X}^t 的条件期望值

$$\hat{\alpha}_t = E(\alpha | \mathbf{X}^t) = \sum_{\mathbf{I}^t} \frac{1}{\hat{a}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} |x_s| \delta(i_s)} f(\mathbf{I}^t) g(\mathbf{I}^t) \quad (37)$$

$$\hat{\beta}_t = E(\beta_t | \mathbf{X}^t) = \sum_{\mathbf{I}^t} f(\mathbf{I}^t) g(\mathbf{I}^t) \hat{\mu}(\mathbf{I}^t) \quad (38)$$

$$\hat{\gamma}_t = E(\gamma | \mathbf{X}^t) = \sum_{\mathbf{I}^t} \frac{1}{\hat{c}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \delta(i_s)} f(\mathbf{I}^t) g(\mathbf{I}^t) \quad (39)$$

和式 (23) 与式 (24) 一样 ,也可以得到从 $t-1$ 期到 t 期泡沫持续的概率的估计值

$$\hat{\pi}_t = e^{-\hat{\gamma}_t - \hat{\alpha}_t x_{t-1}} \quad (40)$$

或者

$$\hat{\pi}_t = E(e^{-\gamma - \alpha x_{t-1}} | \mathbf{X}^t) = \sum_{\mathbf{I}^t} f(\mathbf{I}^t) g(\mathbf{I}^t) \times \left[\frac{\hat{a}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} |x_s| \delta(i_s)}{\hat{a}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} |x_s| \delta(i_s) + |x_{t-1}|} \right] \times \left[\frac{\hat{c}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \delta(i_s)}{\hat{c}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \delta(i_s) + 1} \right] \quad (41)$$

最后 给出变量 β_t 的方差估计值

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_t^2 &= \text{Var}(\beta_t | X^t) \\ &= \sum_{I^t} f(I^t) g(I^t) (\hat{\mu}(I^t) + \hat{\sigma}^2(I^t)) - \hat{\beta}_t^2 \end{aligned} \quad (42)$$

至此, 很容易发现 2.2 节的推导是 2.1 节推导的一般化. 根据数学归纳法, 可以证明一般化的递归方程对所有 $t \geq 1$ 期都是有效的.

2.3 近似

尽管递归方程在理论上对任何长度的样本都是可行的, 但是所需的计算量会以几何级数的速度增长. 因此, 必需要有减少计算量的近似方法. 本文构造了简单的近似方法, 它相当于 Harrison 和 Stevens^[23] 中的“压缩”过程. 具体来说, 可以利用具有式 (6) 形式的联合密度函数来近似式 (13) 代表的后验密度, 近似时保证每个变量的一阶矩和二阶矩不变. 即, 在初始阶段, 用下式近似式 (13)

$$\hat{a}_1 e^{-\hat{a}_1 \alpha} \hat{c}_1 e^{-\hat{c}_1 \gamma} N_{\beta_1}(\hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_1^2) \quad (43)$$

然后, 在第 2 阶段的联合密度可表示为

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta_2, \gamma | x_1, x_0) &= \\ \hat{a}_1 e^{-\hat{a}_1 \alpha} \hat{c}_1 e^{-\hat{c}_1 \gamma} N_{\beta_2}(\hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_1^2 + \sigma_v^1) \end{aligned} \quad (44)$$

其中: \hat{a}_1 和 \hat{c}_1 分别等于期望估计方程式 (20) 与式 (21) 的估计值的倒数, 表示如下

$$\hat{a}_1 = 1/\hat{\alpha}_1 \quad (45)$$

$$\hat{c}_1 = 1/\hat{\gamma}_1 \quad (46)$$

$\hat{\beta}_1$ 与 $\hat{\sigma}_1^2$ 是由式 (21) 和式 (25) 给出的估计值. 这个过程可以在任何一个阶段重复.

2.4 方差参数的估计

为了进行以上的递归过程, 必须设定两个参数, 即随机误差项的方差 σ_u^2 和 σ_v^2 . 这些参数的似然函数可以通过以下方式得到. 简化起见, 记 $\sigma^2 = (\sigma_u^2, \sigma_v^2)$. 如果有 T 个时期的观测样本, σ^2 的似然函数为

$$\begin{aligned} P_T(x_1, x_2, \dots, x_T | x_0, \sigma^2) &= P_T(x_T | X^{T-1}, \sigma^2) \times \\ &P_{T-1}(x_{T-1} | X^{T-2}, \sigma^2) \cdots P_1(x_1 | x_0, \sigma^2) \\ &= \prod_{t=1}^T P_t(x_t | X^{t-1}, \sigma^2) \end{aligned} \quad (47)$$

随后, 利用式 (35) 或者近似算法, 通过极大似然估计法, 可以得到 $\sigma^2 = (\sigma_u^2, \sigma_v^2)$ 的估计值 $\hat{\sigma}^2 = (\hat{\sigma}_u^2, \hat{\sigma}_v^2)$.

3 在北京房地产市场上的应用

3.1 研究方法及房价基本面的计算

房地产价格的高速上涨一直是政府、民众和学术界关心的热点问题. 学术界对我国房地产价格与经济基本面的关系存在诸多讨论, 目前大部分研究认为我国大中城市, 特别是一线城市存在比较严重的房地产泡沫. 例如: 沈悦和刘洪玉^[24] 对 1995 到 2002 年间我国 14 个城市住房价格与经济基本面变量进行分析, 认为 1998 年是重要的转折年份, 在这之后房价一直呈现快速增长趋势, 近年来部分城市房价增长过快, 已经无法用经济基本面和住房价格的历史信息来解释. 梁云芳和高铁梅^[25] 指出, 北京房价 2004 年以前处于相对平稳状态, 2004 年随着全国房地产市场的繁荣和北京申奥的成功开始上涨. 李爱华等^[26] 以北京市 2004 年相关数据为例, 采用房价收入比指标分析居民可支付的住房价格, 并给出了相应的政策建议. 梁云芳和高铁梅^[27] 指出我国各地房价的波动具有明显的地区不平衡性, 北京的房价在 2004 年开始被高估. 本文选取了北京市作为例子进行分析. 作为一线城市, 北京房价与全国房价在趋势上存在相似性, 但是放大了全国房价的变动, 具有一定的代表性. 同时, 考虑到北京的房价及相关数据比较完整准确, 符合准确测算基本面的需要.

由于本文的模型是对泡沫的动态生灭过程进行建模, 而对泡沫的度量是模型估计前的重要工作. 但是, 基本面的度量是比较困难的问题. 考虑到我国房地产市场和经济状况的特殊性, 本文借鉴吕江林^[28] 的基于房价收入比的方法对基本面进行度量. 他的理论模型得到最高情形下居民能够承受的房价收入比^②为 8.56, 合理上限应为 7 倍. 采用城镇家庭人均可支配收入的含义是买房

② 房价收入比定义为: 房价收入比 = 商品住宅平均单套价格 / 城镇家庭平均可支配年收入 = (商品住宅平均销售价格 × 商品住宅平均单套面积) / (城镇家庭人均可支配收入 × 城镇家庭户均人口数).

者的收入是处于平均值,如果考虑当年北京按揭贷款买房的为前 20% 的高收入户,或者城镇居民需求的平均住房面积不是商品住宅平均单套销售面积,而是人均住房建筑面积,这两种情况下房价收入比均会上升.在这两种保守情况下,16 倍的房价收入比为基本面估计的上限.照此上限,可以计算按照这一标准度量的房价基本面(= 16 × 城镇家庭人均可支配收入 × 城镇家庭户均人口数) / (商品住宅平均单套销售面积),超过上述部分即为泡沫.在计算中,数据来源为中经网和 CEIC 数据库,样本区间为 1998—03 ~ 2009—11.按照我国相关统计制度,1、2 月份合并统计,样本个数为 130.其中,商品住宅平均销售价格定义为商品房销售额(住宅)累计除以商品房销售面积(住宅)累计.商品住宅平均单套面积定义为商品房累计销售面积除以商品房销售套数.根据 2005 年末到 2009 年末数据取其平均数 117 为商品住宅平均单套销售面积的估计值.北京市城镇家庭人均可支配收入数据 2006 年以前为月度数据,2007 年到 2009 年为季度数据.本文利用 Eviews 6.0 的 Tramos/Seats 对季节性进行了调整,并对季度数据插值得到月度数据.城镇家庭户均人口数采用平均每户城镇家庭人口月末数据.北京市该数据从 1998 年 3 月平均每户 3.03 人逐步下降到 2009 年 9 月 2.80 人.该数据 2007 年后只有季度数据,月度数据为线性插值得到.另一种度量房价基本面的思路是将历年的房价对人均收入做线性回归模型,把模型的拟合值序列当作房价的基本面,而残差序列当作泡沫.

3.2 实证结果

图 1 中点线(标注为“回归”)给出了利用房价对收入进行回归得到的房价拟合值,虚线给出了当房价收入比为 16 时的房价基本面(标注为“房价收入比”).注意到,这两种方法得到的房价基本面的度量是相似的,北京市住房均价在 2000 年以前和 2007 年以后均存在一定程度的泡沫.限于篇幅,下文报告的结果是基于 16 倍房价收入比计算出的泡沫序列对模型进行估计得到的.

在估计中,关于初始值,采用了 $\hat{\beta}_0 = 0.7$, $\hat{\alpha}_0 = \hat{\gamma}_0 = \hat{\sigma}_0 = 0.01$,并假设初始观测为 $x_0 =$

x_1 .经尝试其他初值,发现结果基本不受影响.采用最大似然方法来估计两个参数 σ_u^2 和 σ_v^2 ,所得到的估计值为 $\hat{\sigma}_u^2 = 0.357^2$, $\hat{\sigma}_v^2 = 0.059^2$.

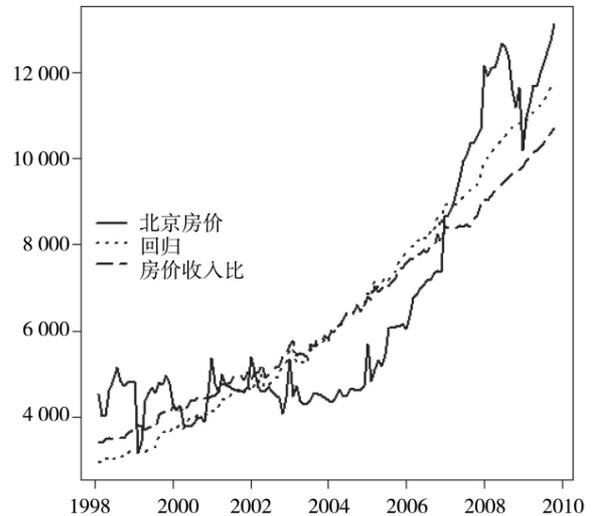


图 1 北京房价和基本面的度量

Fig. 1 The housing price and its fundamental value of Beijing

首先,考察系数 β_t 估计值的特征,从图 2 中可以看出 β_t 在较大范围内波动.估计值的最大值为 1.207,发生在 2008 年 2 月;最小值为 0.567 6,发生在 2002 年 4 月.结合估计出的 β_t 的方差,对 β_t 的估计值做了假设检验.在整个样本期间内,相对于备择假设 $\beta_t > 0$,原假设 $\beta_t = 0$ 在 1% 的显著性水平上全部被拒绝.因此,可以得出结论:泡沫 ($\beta_t > 1$) 或是稳定的投资狂热 ($0 < \beta_t < 1$) 在每

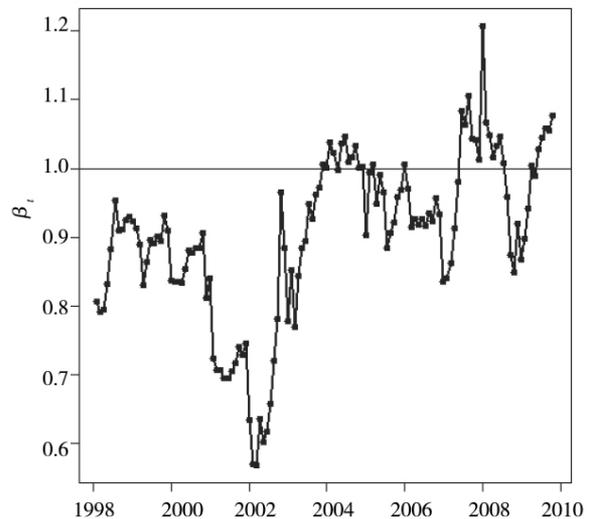


图 2 $\hat{\beta}_t$ 序列的时变估计

Fig. 2 The time-varying estimates of $\hat{\beta}_t$

个期间内都是存在的. 在样本的 130 个月内, $\beta_t > 1$ 的有 31 个月 $\beta_t < 1$ 的有 99 个月. 泡沫扩散的最长持续时间为 13 个月, 从 2007 年的 7 月到 2008 年 8 月. 此外, 2009 年的 7 月到 2009 年 11 月, 和 2004 年的 6 月到 12 月, 泡沫分别扩散了 5 个月和 7 个月. 然而, 用统计的方法来判断, 原假设 $\beta_t > 1$ 或 $0 < \beta_t < 1$ 都是不能被拒绝的, 因为 10% 的显著水平上, 明确的泡沫扩散期间只有 1 个月份(2008 年 2 月), 明确投资狂热期间有 6 个月份(2002 年 3 月、4 月、6 月和 7 月及 2008 年 10 月和 11 月), 分别与 β_t 高位和低位相对应.

此外, 对比图 3, 对估计的 β_t 序列进行解释, 注意到 β_t 的上升与下降过程与房价增速的变化过程大体一致. 如在 1999 年到 2002 年房价增速处于震荡过程时 β_t 也一直在低位, 表明泡沫并没有表现出明显的扩大或者发散的迹象. 而在 2003 年到 2004 年房价增速持续为负, 房价加速下跌过程中 β_t 的值逐渐接近并超过 1, 表明(负)泡沫有扩张的趋势. 特别地, 在 2005 年开始的房价增速持续为正, 房价加速上涨的过程中 β_t 的值也一直上升并超过 1, 在房价增速达到历史顶点时 β_t 也上升到历史高位, 表明泡沫在持续扩张, 而这时破灭的概率就会增大. 这表明 β_t 能准确预测房价对于基本面偏离的变化趋势, 它在增速震荡过程中处于低位, 表明风险相对较低, 而在房价加速上涨或下跌过程中处于上升通道或者高位, 表明风险的积聚, 市场的偏离在放大, 而这时出现逆转的可能性也在加大. 同时, 也注意到 β_t 也表现出领先于房价增速变动的特征. 例如, 在 1999 年 11 月开始 β_t 开始出现下降趋势, 表明泡沫在缩小而市场出现回调, 而房价增速在 1999 年 12 月才开始下降. 又如从 2002 年 4 月开始 β_t 开始上升, 表明房价(负)泡沫有扩大化的趋势, 随后 2002 年 5 月开始, 北京房价也开始进入一个长达两年的下降通

道中. 同样地, 在 2008 年 2 月 β_t 达到历史高位并开始下降时, 房价增速也开始下降. 当 2009 年 6 月 β_t 开始上升, 表明之前过度下跌后回调的趋势, 而北京房价增速在 2009 年 8 月开始降幅缩窄, 2009 年 9 月开始变为增长. 本文认为, 这种与基本趋势一致而适度领先的 β_t 的变化来源于动态贝叶斯模型对泡沫内在机制的刻画, 从而在短期具有一定的预测效力.

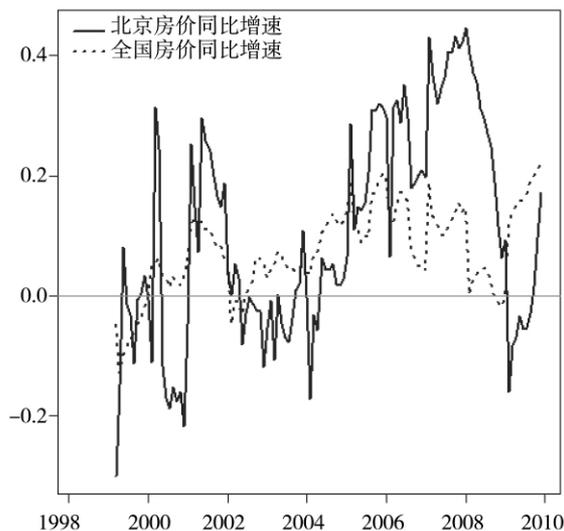


图3 全国和北京房价同比增速

Fig. 3 The year over year growth rate of housing price in China and in Beijing

4 结束语

本文构建了用来刻画资产价格中泡沫的持续和破灭过程的贝叶斯统计模型, 给出了对模型进行估计所需的理论推导和递归算法, 并引入了近似算法. 随后, 把这个模型应用到北京房地产市场中, 发现其对北京房地产市场价格偏离有很好的解释, 并对泡沫演化过程有一定的短期预测效力.

参考文献:

- [1] Burmeister E. On some conceptual issues in rational expectations modeling [J]. *Journal of Money, Credit and Banking*, 1980, 12(4): 800-816.
- [2] Cass D, Shell K. Do sunspots matter? [J]. *Journal of Political Economy*, 1983, 91(2): 193-227.
- [3] Tirole J. Asset bubbles and overlapping generations [J]. *Econometrica*, 1985, 53(5), 1071-1100.

- [4] Diba B T, Grossman H I. The theory of rational bubbles in stock prices [J]. *Economic Journal*, 1988, 98(392): 746 – 754.
- [5] Flood R P, Garber P M. Market fundamentals versus price-level bubbles: The first tests [J]. *Journal of Political Economy*, 1980, 88(4): 745 – 770.
- [6] West K D. A specification test for speculative bubbles [J]. *Quarterly Journal of Economics*, 1987, 102(3): 553 – 580.
- [7] Shiller R J. Do stock prices move too much to be justified by subsequent changes in dividends? [J]. *American Economic Review*, 1981, 71(3): 421 – 436.
- [8] LeRoy S F, Porter R. The present-value relation: Tests based on implied variance bounds [J]. *Econometrica*, 1981, 49(3): 555 – 674.
- [9] Flavin M. Excess volatility in the financial markets: A reassessment of the empirical evidence [J]. *Journal of Political Economy*, 1983, 91(6): 929 – 956.
- [10] Marsh T, Merton R. Dividend variability and variance bounds tests for the rationality of stock market prices [J]. *American Economic Review*, 1986, 76(3): 483 – 498.
- [11] Flood R P, Hodrick R J. Asset price volatility, bubbles, and process switching [J]. *The Journal of Finance*, 1986, 41(4): 831 – 842.
- [12] Evans G W. Pitfalls in testing for explosive bubbles in asset prices [J]. *American Economic Review*, 1991, 81(4): 922 – 930.
- [13] Diba B T, Grossman H I. Explosive rational bubbles in stock prices? [J]. *American Economic Review*, 1988, 78(3): 520 – 530.
- [14] Hall S G, Psaradakis Z, Sola M. Detecting periodically collapsing bubbles: A Markov switching unit root test [J]. *Journal of Applied Econometrics*, 1999, 14(2): 143 – 154.
- [15] Phillips P C B, Wu Y, Yu J. Explosive behavior in the 1990s Nasdaq: When did exuberance escalate asset values? [J]. *International Economic Review*, 2011, 52(1): 201 – 226.
- [16] Himm U, Breitung J. Testing for speculative bubbles in stock markets: A comparison of alternative methods [R]. Bonn: University Bonn, 2009.
- [17] Bhargava A. On the theory of testing for unit roots in observed time series [J]. *Review of Economic Studies*, 1986, 53(3): 369 – 384.
- [18] Busetti F, Taylor A M R. Tests of stationarity against a change in persistence [J]. *Journal of Econometrics*, 2004, 123(1): 33 – 66.
- [19] Kim J Y. Detection of change in persistence of a linear time series [J]. *Journal of Econometrics*, 2000, 95(1): 97 – 116.
- [20] Pavlidis E, Paya I, Peel D, et al. Bubbles in house prices and their impact on consumption: Evidence for the US [R]. Lancaster: Lancaster University Management School, 2009.
- [21] Asako K, Kanoh S, Liu Z. A statistical model of speculative bubbles and its application to the United States stock market [C]// Mineo: 5th Japanese-European Bayesian Econometrics and Statistics Meeting, 2009.
- [22] Gürkaynak R S. Econometric tests of asset price bubbles: Taking stock [J]. *Journal of Economic Surveys*, 2008, 22(1): 166 – 186.
- [23] Harrison P J, Stevens C F. Bayesian Forecasting [J]. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 1976, 38(3): 205 – 247.
- [24] 沈悦, 刘洪玉. 住宅价格与经济基本面: 1995 – 2002 年中国 14 城市的实证研究 [J]. *经济研究*, 2004, (6): 78 – 86.
Shen Yue, Liu Hongyu. Housing prices and economic fundamentals: A cross city analysis of China for 1995 – 2002 [J]. *Economic Research Journal*, 2004, (6): 78 – 86. (in Chinese)
- [25] 梁云芳, 高铁梅. 我国商品住宅销售价格波动成因的实证分析 [J]. *管理世界*, 2006, (8): 76 – 82.
Liang Yunfang, Gao Tiemei. On the empirical analysis of the causes of housing price volatility in China [J]. *Management World Monthly*, 2006, (8): 76 – 82. (in Chinese)

[26] 李爱华, 成思危, 李自然. 城镇居民住房购买力研究[J]. 管理科学学报, 2006, 9(5): 8-17.

Li Aihua, Cheng Siwei, Li Ziran. Study on housing purchasing power of urban residents[J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(5): 8-17. (in Chinese)

[27] 梁云芳, 高铁梅. 中国房地产价格波动区域差异的实证分析[J]. 经济研究, 2007, (8): 133-142.

Liang Yunfang, Gao Tiemei. Empirical analysis on real estate price fluctuation in different provinces of China[J]. Economic Research Journal, 2007, (8): 133-142. (in Chinese)

[28] 吕江林. 我国城市住房市场泡沫水平的度量[J]. 经济研究, 2010, (6): 28-41.

Lv Jianglin. The measurement of the bubble of urban housing market in China[J]. Economic Research Journal, 2010, (6): 28-41. (in Chinese)

Dynamic Bayesian model for evolution of bubbles

*LIU Zhen-tao*¹, *ZUO Hao-miao*², *ZHANG Zhen-xuan*²

1. Institute for Financial and Accounting Studies, Xiamen University, Xiamen 361005, China;

2. The Wang Yanan Institute for Studies in Economics, Xiamen University, Xiamen 361005, China

Abstract: This paper constructs a Bayesian statistical model to describe the formation, growth and burst of bubbles of asset prices. This model shows that, the probability for the bubbles to burst becomes larger and larger as the price of a financial asset deviates from its fundamental value further and further. Based on the time-varying parameter estimates implied by the model, the time for the bubbles to emerge and the duration for the bubbles to accumulate can be determined. A Bayesian method with approximation is developed to estimate the model and is applied to Beijing's real estate market as an example

Key words: asset bubbles; Bayesian statistical model; housing price