基于EIS的杠杆随机波动率模型的极大似然估计①

吴鑫育[1,2]，周海林[1]，汪寿阳[3]，马超群[2]
(1. 安徽财经大学金融学院，蚌埠 233030; 2. 湖南大学工商管理学院，长沙 410082;
3. 中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100190)

摘要: 杠杆随机波动率(SV-L)模型在金融计量学文献中已经引起了广泛的关注，然而，它的参数估计一直是一个难点. 本文基于有效重要性抽样(EIS)技巧，给出了SV-L模型的极大似然(ML)估计方法. 为了检验提出的EIS-ML方法的精确性以及小样本性质，构建了蒙特卡罗(MC)模拟实验. 结果表明，EIS-ML方法是非常准确和有效的. 最后，将EIS-ML方法应用于实际数据，选取上证和深证综合指数的日对数收益率数据为研究样本，利用SV-L模型对中国股市进行了实证分析. 结果表明，中国股市具有很强的波动持续性，并且存在显著的杠杆效应.

关键词: 随机波动率; 杠杆效应; 有效重要性抽样; 极大似然
中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2013)01-0074-13

0 引言

资产收益率的波动率在金融实践中发挥着巨大的作用，它是期权定价和风险管理的一个重要变量. 从资产收益率序列中能经常观察到波动率具有时变性，并且存在“波动率聚集”(volatility clustering)现象(即波动率可能在一些时间段上高，而在另一些时间段上低). 目前，用来刻画波动率的这些特征的模型主要有两类: 自回归条件异方差(ARCH)类模型和随机波动率(SV)模型. 在ARCH类模型中，波动率是过去信息集的一个确定性函数，而在SV模型中，由于在波动过程中引入了一种新的随机过程，使得SV模型比ARCH类模型更灵活. 实证研究表明，SV模型比ARCH类模型能更好地拟合金融时间序列[1]. 而且，SV模型还有一个显著的优点就是它与资产定价理论中的连续时间SV模型有着直接的联系.

基本的SV模型对于描述金融时间序列有很多的局限性. 大量研究表明，资产收益率和波动率之间存在负向相关关系，即负的收益率联系着一个波动率的增加，这称为“杠杆效应”(leverage effect). 在金融市场中，通常一般认为坏消息会造成资产价格下降，引起公司的资本负债率(也就是金融杠杆)和风险的增加，造成对未来期望波动率的增加. 从而，杠杆效应意味着资产收益率与波动率之间的负向相关关系. Black[2]和Christie[3]最早发现杠杆效应存在的证据，并且，Christie在Modigliani/Miller经济模式下给出了杠杆效应的一个理论解释. 经验研究发现，虽然一般汇率市场的杠杆效应比较低，但是对于股票市场却很重要，忽略金融市场中普遍存在的杠杆效应，可能会对期权定价、投资组合构造以及风险管理产生重要影响. 因此，在基本的SV模型中引入杠杆效应是非常重要的.

关于SV模型的参数估计，在金融计量经济

① 收稿日期: 2010-12-27; 修订日期: 2012-11-20.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71101001; 71201013); 国家杰出青年科学基金资助项目(70825006); 教育部“长江学者和创新团队发展计划”资助项目(IRT0916); 国家自然科学基金创新研究群体科学基金资助项目(71221001).
作者简介: 吴鑫育(1982—)，男，湖南衡山人，博士生. Email: xy.wu@hotmail.com

学中一直是一个难点. SV 模型是一种典型的非线性、非高斯状态空间模型，其似然函数是一个极为复杂的高维积分，这导致 SV 模型中的参数向量非常难以估计. 特别对于杠杆 SV(SV-L) 模型，由于引入了杠杆效应，模型的参数估计变得更为困难. 近几十年来，在 SV 模型的参数估计方面已经取得了很大的进展. 为了估计 SV 模型，人们提出了许多的方法，包括广义矩方法(GMM) [4]、拟极大似然(QML) 方法[5]、有效矩方法(EMM) [6,7]和马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC) 方法[1,8,9]等. Broto 和 Ruiz[10]对估计 SV 模型的各种参数估计方法进行了一个比较研究. 国内学者从 2000 年以来对 SV 模型也进行了大量的研究探讨，这些研究包括: 王春峰等[11]通过基于 MC-MC 模拟的贝叶斯分析方法，估计了基本的 SV 模型，并对中国股市进行了实证分析; 孟利锋等[12]对 SV-L 模型进行了贝叶斯分析，并使用基于 Gibbs 取样的 BUGS 软件对模型的参数进行了估计，发现沪、深两个股票市场都存在显著的杠杆效应; 孟利锋等[13]借助经验特征函数方法估计了基本的 SV 模型和 SV-L 模型，并对上海和深圳股市进行了实证研究，也发现都存在显著的杠杆效应; 刘凤芹和吴喜之[14]则利用一种改进的 MCMC 算法估计了基本的 SV 模型，并对上海股市进行了波动性分析; 周宏山和冀云[15]采用基于 MCMC 模拟的贝叶斯分析方法对 SV-L 模型进行了参数估计，并对沪深股市波动进行了实证研究，也都发现了杠杆效应.

在估计 SV 模型的各种方法中，GMM、QML 和 EMM 方法较为简单，但研究发现它们的有限样本性质和估计有效性不如 MCMC 方法. MCMC 方法本质上是一种基于似然的方法，它对 SV 模型的估计比 GMM、QML 和 EMM 方法都有效. 然而，MCMC 方法在计算上负担较大，而且，在应用 MCMC 方法时,需要根据经验规则来确定模型参数的先验分布,而先验分布的确定并不是一件容易的事，错误的设定可能会导致不合理的结果. 因此，有必要寻找一种有效、计算量较小且易于实现的估计方法来估计 SV 模型. 在众多的参数估计方法中，具有一致性和有效性的极大似然(ML) 方法无疑是最有吸引力的. 然而，由于运用 ML 方法估计 SV 模型会遇到一个很大的困难——估计高维积分似然函数. 所以，只有极少数文献关注 SV 模型的 ML 估计. Durham[16,17]基于拉普拉斯重要性抽样(LIS) 技巧，对 SV 模型进行了 ML 估计，然而，由于 LIS 技巧只是对似然函数的一个局部高斯逼近，其适用性窄,估计的精确性不高. 本文基于 Richard 和 Zhang[18]提出的有效重要性抽样(EIS) 技巧，使用 ML 方法估计 SV-L 模型的参数. EIS 技巧是一个非常有效的估计高维积分的蒙特卡罗(MC) 方法，它通过最小化重要性抽样—MC 估计的方差，可以得到高维积分非常精确的全局逼近. 因为 SV 模型的似然函数是一个非常复杂的高维积分，EIS 技巧非常适用于估计 SV 模型的似然函数. 本质上，EIS-ML 方法与 ML 方法一样，在适当的正则性条件下，估计是一致和有效的. 因此，EIS-ML 方法比 GMM、QML 和 EMM 估计方法都有效. 而且，EIS-ML 方法非常容易实现，可以很灵活地应用于各种模型[19-21]. 此外，EIS-ML 方法只需较小的计算量，可以获得非常高的估计精确性[22]. 为了检验 EIS-ML 估计方法的精确性及小样本性质，本文构造了 MC 模拟实验. 最后，将 EIS-ML 方法应用于实际数据，利用 SV-L 模型对中国股市进行了实证分析.

1　SV-L 模型与参数估计

1.1　SV-L 模型

考虑一个连续时间 SV 模型

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ln S_t &= \mu \mathrm{d}t + \sigma_S \exp(V_t/2)\,\mathrm{d}W_t^{(S)} \\ \mathrm{d}V_t &= \psi V_t \mathrm{d}t + \sigma_V \mathrm{d}W_t^{(V)} \end{aligned} \tag{1}$$

其中 S_t 是 t 时刻资产的对数价格，V_t 是 t 时刻资产收益率的对数波动率，$W_t^{(S)}$ 和 $W_t^{(V)}$ 是标准的布朗运动，且有相关系数 $\mathrm{corr}(\mathrm{d}W_t^{(S)}, \mathrm{d}W_t^{(V)}) = \rho$. 当相关系数 $\rho = 0$ 时，模型(1) 退化为基本的连续时间 SV 模型. 也就是说，该模型中没有杠杆效应. 通常情况下 $\rho < 0$，这意味着资产收益率与波动率之间存在着负向相关关系，退化负的收益率联系着一个波动率的增加，这代表“杠杆效应”[23]. 连续时间 SV 模型(1) 在金融计量经济学文献中已经引起了广泛的关注，例如 Durham[16]，Yu[23]，Chernov 等[24]和

Cheng 等[25].

为了使用离散观测数据估计连续时间 SV 模型(1)，对连续时间 SV 模型(1)进行 Euler-Maruyama 离散化，得到离散时间 SV-L 模型

$$
\begin{aligned}
X_t &= \mu + \sigma_X \exp(V_{t-1}/2)\varepsilon_t \\
V_t &= \phi V_{t-1} + \sigma_V \eta_t
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中 $X_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$ 是对数收益率，$\sigma_X = \sigma_S$，$\phi = \psi + 1$ 度量波动的持续性，为了保证对数波动率过程的平稳性，一般假定 $|\phi| < 1$，$\varepsilon_t = W_t^{(S)} - W_{t-1}^{(S)}$，$\eta_t = W_t^{(V)} - W_{t-1}^{(V)}$，显然，$\varepsilon_t$ 和 η_t 均为独立同分布(i.i.d)的标准正态分布随机变量，即 $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.} N(0,1)$，$\eta_t \sim \text{i.i.d.} N(0,1)$，且 $corr(\varepsilon_t, \eta_t) = \rho$. 下面主要研究离散时间 SV-L 模型(2)的参数估计问题.

1.2 ML 估计

本文采用 ML 方法来估计 SV-L 模型(2)的参数. 设有 T 个观测变量 X_t，即 $X = (X_1, \cdots, X_T)'$，以及 T 个不可观测变量(隐变量) V_t，即 $V = (V_1, \cdots, V_T)'$. 设参数向量 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma_X, \phi, \sigma_V, \rho)'$. 为了简化，把 V_0 当作模型的附加参数与 $\boldsymbol{\theta}$ 一起估计，得到 SV-L 模型(2)的似然函数表达式为

$$L(X;\boldsymbol{\theta},V_0) = \int p(X,V;\boldsymbol{\theta},V_0)\,\mathrm{d}V \tag{3}$$

其中 $p(X,V;\boldsymbol{\theta},V_0)$ 是 X 和 V 的联合密度函数. 因此，式(3)相应的 ML 估计量为

$$(\hat{\theta},\hat{V}_0) = \arg\max_{(\boldsymbol{\theta},V_0)} \ln L(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta},V_0) \tag{4}$$

在适当的正则性条件下，参数估计量 $(\hat{\theta},\hat{V}_0)$ 是一致的并且服从渐近正态分布.

然而，通常情况下，式(3)是一个非常复杂的高维积分，不存在解析解. 为了对 SV-L 模型(2)进行 ML 估计，需要用数值方法来近似高维积分(3). 然而，由于典型的金融时间序列有几百到上万个观测值，传统的数值分析方法不能应用，一个可行的解决办法是使用 MC 方法. 事实上，设 $q(V|X)$ 表示某个密度函数(称为重要性抽样器)，式(3)可以写为

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta},V_0) &= \int \frac{p(X,V;\boldsymbol{\theta},V_0)}{q(V|X)} q(V|X)\,\mathrm{d}V \\
&= \mathrm{E}_q\left[\frac{p(X,V;\boldsymbol{\theta},V_0)}{q(V|X)}\right]
\end{aligned} \tag{5}
$$

其中 $\mathrm{E}_q[\cdot]$ 表示 q 测度下的期望. 利用 MC 模拟方法，可以得到似然函数 $L(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta},V_0)$ 相应的重要性抽样—MC 估计为

$$\tilde{L}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta},V_0) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \frac{p(X,V^{(s)};\boldsymbol{\theta},V_0)}{q(V^{(s)}|X)} \tag{6}$$

其中 $\{V^{(s)}\}_{s=1}^{S}$ 是从重要性抽样器 $q(V|X)$ 抽取的样本. 为了保证似然函数 MC 估计式(6)的精确性，重要性抽样器 $q(V|X)$ 的选取非常重要.

2 基于 EIS 的似然估计

2.1 自然重要性抽样

在 SV-L 模型(2)中，(X,V) 的联合密度函数可以写为

$$p(X,V;\boldsymbol{\theta},V_0) = \prod_{t=1}^{T} p(X_t,V_t|V_{t-1},\boldsymbol{\theta}) \tag{7}$$

其中 $p(X_t,V_t|V_{t-1},\boldsymbol{\theta})$ 是正态分布密度函数，且其均值向量与协方差矩阵分别为

$$
\begin{bmatrix} \mu \\ \phi V_{t-1} \end{bmatrix} \text{和}
\begin{bmatrix} \sigma_X^2 \exp(V_{t-1}) & \sigma_X\sigma_V\rho\exp(V_{t-1}/2) \\ \sigma_X\sigma_V\rho\exp(V_{t-1}/2) & \sigma_V^2 \end{bmatrix} \tag{8}
$$

自然重要性抽样器即选取

$$
\begin{aligned}
q(V|X) &= \prod_{t=1}^{T} q_t(V_t|X_t,V_{t-1}) \\
&= \prod_{t=1}^{T} \frac{p(X_t,V_t|V_{t-1},\boldsymbol{\theta})}{p(X_t|V_{t-1},\boldsymbol{\theta})}
\end{aligned} \tag{9}
$$

其中 $p(X_t|V_{t-1},\boldsymbol{\theta}) = \int p(X_t,V_t|V_{t-1},\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}V_t$. 因为 $p(X_t,V_t|V_{t-1},\boldsymbol{\theta})$ 是二元正态分布密度函数，所以 $q_t(V_t|X_t,V_{t-1}) = p(X_t,V_t|V_{t-1},\boldsymbol{\theta})/q_t(X_t|V_{t-1},\boldsymbol{\theta})$ 是正态分布密度函数，且其均值与方差为

$$\mu_t = \phi V_{t-1} + \rho\frac{\sigma_V}{\sigma_X\exp(V_{t-1}/2)}(X_t - \mu) \tag{10}$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_V^2(1-\rho^2) \tag{11}$$

基于自然重要性抽样器(9),可以得到 SV-L 模型的似然函数 $L(X;\boldsymbol{\theta},V_0)$ 相应的自然重要性抽样—MC 估计为

$$\begin{aligned}\tilde{L}(X;\boldsymbol{\theta},V_0) &= \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\frac{p(X,V^{(s)};\boldsymbol{\theta},V_0)}{q(V^{(s)}\mid X)} \\ &= \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\left[\prod_{t=1}^{T}\frac{p(X_t,V_t^{(s)}\mid V_{t-1}^{(s)},\boldsymbol{\theta})}{q_t(V_t^{(s)}\mid X_t,V_{t-1}^{(s)})}\right]\end{aligned} \tag{12}$$

其中$\{V^{(s)}\}_{s=1}^{S}$是从自然重要性抽样器(9)中抽取的样本.

2.2　EIS

自然重要性抽样—MC 估计式(12)比较简单,便于计算,然而,它的一个主要缺点是其方差比较大. 为了保证似然函数的 MC 估计的精确性,不得不抽取非常大的样本,而这势必会造成很大的计算负担,因此,式(12)的实际应用价值并不大. 为了降低似然函数自然重要性抽样—MC 估计的方差,使用 EIS 抽样器代替自然重要性抽样器. EIS 的原理是对自然重要性抽样器进行参数化扩展,以最小化似然函数重要性抽样—MC 估计的方差. 具体地,设 $m(V\mid X,a)=\prod_{t=1}^{T}m_t(V_t\mid X_t,V_{t-1},a_t)$ 是对自然重要性抽样器(9)进行参数化扩展得到的辅助重要性抽样器(即EIS抽样器),SV-L 模型的似然函数可以写为

$$\begin{aligned}L(X;\boldsymbol{\theta},V_0) &= \int\frac{p(X,V;\boldsymbol{\theta},V_0)}{m(V\mid X,a)}m(V\mid X,a)\,\mathrm{d}V \\ &= \mathrm{E}_m\left[\frac{p(X,V;\boldsymbol{\theta},V_0)}{m(V\mid X,a)}\right]\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\mathrm{E}_m[\,]$ 表示 m 测度下的期望,$a=(a_1,\cdots,a_T)'$是 EIS 辅助参数,则式(13)相应的 EIS-MC 估计为

$$\begin{aligned}\hat{L}(X;\boldsymbol{\theta},V_0) &= \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\left[\frac{p(X,V^{(s)};\boldsymbol{\theta},V_0)}{m(V^{(s)}\mid X,a)}\right] \\ &= \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\left[\prod_{t=1}^{T}\frac{p(X_t,V_t^{(s)}\mid V_{t-1}^{(s)},\boldsymbol{\theta})}{m_t(V_t^{(s)}\mid X_t,V_{t-1}^{(s)},a_t)}\right]\end{aligned} \tag{14}$$

其中$\{V^{(s)}\}_{s=1}^{S}$是从EIS抽样器$m(V\mid X,a)$中抽取的样本.

在实际应用中,首先需要确定 EIS 抽样器 $m(V\mid X,a)$ 的形式,然后估计辅助参数 a,以使得似然函数的 EIS-MC 估计(14)的方差最小化. 具体地,令

$$m_t(V_t\mid X_t,V_{t-1},a_t) = \frac{k_t(V_t\mid X_t,V_{t-1},a_t)}{\chi_t(X_t,V_{t-1},a_t)} \tag{15}$$

$$\chi_t(X_t,V_{t-1},a_t) = \int k_t(V_t\mid X_t,V_{t-1},a_t)\,\mathrm{d}V_t \tag{16}$$

其中$k_t(V_t\mid X_t,V_{t-1},a_t)$是一个密度核函数. 事实上,对于 SV-L 模型,可以取

$$\begin{aligned}&k_t(V_t\mid X_t,V_{t-1},a_t) = \\ &\quad q_t(V_t\mid X_t,V_{t-1})\exp\{a_{1,t}V_t+a_{2,t}V_t^2\}\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $a_t=(a_{1,t},a_{2,t})$,相应的χ_t 的显式表达式见附录. 从而,根据式(15)和(17),有

$$\begin{aligned}\frac{p(X,V;\boldsymbol{\theta},V_0)}{m(V\mid X,a)} &= \prod_{t=1}^{T}\frac{p(X_t,V_t\mid V_{t-1},\boldsymbol{\theta})}{m_t(V_t\mid X_t,V_{t-1},a_t)} \\ &= \prod_{t=1}^{T}\frac{p(X_t,V_t\mid V_{t-1},\boldsymbol{\theta})\chi_t(X_t,V_{t-1},a_t)}{k_t(V_t\mid X_t,V_{t-1},a_t)} \\ &= \prod_{t=1}^{T}\frac{p(X_t,V_t\mid V_{t-1},\boldsymbol{\theta})\chi_t(X_t,V_{t-1},a_t)}{q_t(V_t\mid X_t,V_{t-1})\exp\{a_{1,t}V_t+a_{2,t}V_t^2\}} \\ &= \prod_{t=1}^{T}\frac{p(X_t\mid V_{t-1},\theta)\chi_t(X_t,V_{t-1},a_t)}{\exp\{a_{1,t}V_t+a_{2,t}V_t^2\}} \\ &= p(X_1\mid V_0,\theta)\chi_1(X_1,V_0,a_1)\times \\ &\quad\left[\prod_{t=1}^{T}\frac{p(X_{t+1}\mid V_t,\theta)\chi_{t+1}(X_{t+1},V_t,a_{t+1})}{\exp\{a_{1,t}V_t+a_{2,t}V_t^2\}}\right]\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $p(X_{T+1}\mid V_T,\theta)\equiv\chi_{T+1}(X_{T+1},V_T,a_{T+1})\equiv 1$. 根据 Richard 和 Zhang[18] 的研究,为了最小化 EIS-MC 估计(14)的方差,需要求解如下的最小化问题

$$\begin{aligned}\hat{a}_t(\theta) = \arg\min_{a_t}\sum_{s=1}^{S}\{&\ln[p(X_{t+1}\mid V_t^{(s)},\theta)\chi_{t+1}(X_{t+1},V_t^{(s)},\\ &\hat{a}_{t+1})]-c_t-\ln[\exp\{a_{1,t}V_t^{(s)}+a_{2,t}(V_t^{(s)})^2\}]\}^2\end{aligned} \tag{19}$$

其中 c_t 是常数,需要与 a_t 同时估计得到. 容易看到,最小化问题(19)等价于如下的线性回归

问题

$$\ln p(X_{t+1} \mid V_t^{(s)}, \theta) + \ln \chi_{t+1}(X_{t+1}, V_t^{(s)}, \hat{a}_{t+1}) = c_t + \ln[\exp\{a_{1,t}V_t^{(s)} + a_{2,t}(V_t^{(s)})^2\}] = c_t + a_{1,t}V_t^{(s)} + a_{2,t}(V_t^{(s)})^2, \ s = 1, \cdots, S \tag{20}$$

2.3 EIS 迭代算法

给定 X，$\boldsymbol{\theta}$，V_0 和 $\{V^{(s)}\}_{s=1}^{S}$，通过对式(20)进行逐步线性回归，可以得到 EIS 辅助参数估计 $\hat{a} = (\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_T)'$，其中，初始的 $\{V^{(s)}\}_{s=1}^{S}$ 是从自然重要性抽样器(9)中抽取. Richard 和 Zhang 建议，在初次迭代得到参数估计 $\hat{a}$ 后，需要从 EIS 抽样器 $m(V \mid X, \hat{a})$ 中抽取新的样本，然后作下一次迭代，重复迭代数次，直到 $\hat{a}$ 收敛.

总结起来，EIS 迭代算法的具体步骤如下:

步骤 1　从自然重要性抽样器(9)中抽取样本 $\{V^{(s)}\}_{s=1}^{S}$.

步骤 2　对式(20)进行逐步线性回归($t = T \to 1$)，得到 EIS 辅助参数估计 $\hat{a}$.

步骤 3　从 EIS 抽样器 $m(V \mid X, \hat{a})$ 中抽取新的样本 $\{V^{(s)}\}_{s=1}^{S}$.

步骤 4　重复步骤 2 和步骤 3 直到收敛.

步骤 5　将 EIS 辅助参数 a 的估计值 $\hat{a}$ 代入式(14)，得到似然函数的 EIS-MC 估计值为

$$\hat{L}(X; \boldsymbol{\theta}, V_0) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\left[\prod_{t=1}^{T}\frac{p(X_t, V_t^{(s)} \mid V_{t-1}^{(s)}, \boldsymbol{\theta})}{m_t(V_t^{(s)} \mid X_t, V_{t-1}^{(s)}, \hat{a}_t)}\right]$$

在数值实验中，发现 EIS 迭代算法的收敛速度非常快，一般只需 3 - 5 次迭代即可达到较高的收敛精度. 关于 EIS 迭代算法的收敛性可以参考 Koopman 等[26].

3 MC 模拟实验

为了检验 EIS-ML 估计方法的精确性以及小样本性质，构建了 MC 模拟实验. 考虑两组不同的真实参数值 $\theta = (\mu, \sigma_x, \phi, \sigma_v, \rho)'$，分别设为 (0.000 4, 0.013 7, 0.968 4, 0.225 9, -0.230 2) 和 (0.000 3, 0.014 6, 0.967 8, 0.231 7, -0.208 9)，参数选取主要基于第 4 部分中的沪深股市研究的实证结果. 一般而言，均值参数 μ 接近于 0. 为了保证对数波动率过程是平稳的，一般假设持续性参数 $0 < \phi < 1$，事实上，研究发现 ϕ 一般大于 0.9. 相关系数 ρ 用以度量资产收益率与波动率之间的杠杆效应，介于 -1 和 0 之间，一般在 -0.5 左右. 这里对每组参数值分别按照离散时间的 SV-L 模型(2)产生 $T = 500$，$T = 1\,000$，$T = 2\,000$ 与 $T = 5\,000$ 四种不同的样本长度. 因此，将对不同参数设定和不同样本长度实现八种随机模拟实验.

实验中，设置 $S = 32$，为了保证充分收敛，EIS 迭代次数设为 5 次. 对每组数据重复模拟 100 次以获得参数估计的均值、标准差和均方根误差(RMSE). EIS-ML 算法采用 Matlab7.8.0 编程，在 Pentium (R) Dual Core Intel 1.6GHz PC Windows XP 上运行实现. 表 1—表 4 给出了数值模拟的实验结果. 从表 1—表 4 可以看出，对于样本长度 $T = 500$，1 000，2 000 和 5 000，参数估计值都非常接近于真实参数值，即使对于样本观测值只有 $T = 500$ 的情形，参数估计值与真实值的绝对偏差都没有超过 0.01，表明本文的 EIS-ML 估计方法是相当精确的. 而且，参数估计值的标准差非常接近于 RMSE，表明有限样本偏差是非常小的. 除了参数 ρ 的估计值的标准差偏大外，其它都比较小. 从表 1—表 4 还可以看出，当样本长度从 $T = 500$ 增加到 $T = 5\,000$ 时，参数 μ，σ_X，ϕ 和 σ_V 的估计值均越接近于真实参数值，模拟参数的 RMSE 变得越小，说明这四个参数的估计值随样本长度 T 的增加而趋于收敛于参数的真实值. 其次，考虑参数 ρ，当样本长度从 $T = 500$ 增加到 $T = 5\,000$ 时，参数 ρ 的估计值与真实值的偏差有所变大，然而参数估计值的标准差却逐渐变小. 事实上，对于 MCMC 估计方法，ρ 的估计值与真实值的偏差问题也同样存在[9,23]. 但是，由于 ρ 的估计值的标准差较小，这并不影响它们估计的有效性. 从表 1—表 4 中也可以看到，用 EIS 迭代算法估计 SV-L 模型的似然函数所需要的平均计算时间约为 0.181 9s($T = 500$) 到 3.416 3s($T = 5\,000$) 之间，说明 EIS 迭代算法的效率是非常高的.

表 1　数值模拟实验结果：$T = 500$

Table 1 Estimation results for simulated series of 500 observations

参数	真实值	均值	标准差	RMSE	CPU
μ	0.000 4	0.000 4	0.000 6	0.000 6	0.181 9s
σ_X	0.013 7	0.013 6	0.002 3	0.002 3	
ϕ	0.968 4	0.956 8	0.020 6	0.023 5	
σ_V	0.225 9	0.232 6	0.048 6	0.048 8	
ρ	−0.230 2	−0.227 6	0.177 0	0.176 2	
μ	0.000 3	0.000 3	0.000 6	0.000 6	0.193 1s
σ_X	0.014 6	0.014 5	0.002 5	0.002 5	
ϕ	0.967 8	0.953 9	0.023 2	0.027 0	
σ_V	0.231 7	0.242 1	0.049 7	0.050 6	
ρ	−0.208 9	−0.205 4	0.176 3	0.175 4	

注：$S = 32$；EIS 迭代 5 次；重复 100 次实验得到均值、标准差和 RMSE，其中 RMSE 是估计值与真实值之间的均方根误差；CPU 表示用 EIS 迭代算法估计似然函数所需要的平均计算时间.

表 2　数值模拟实验结果：$T = 1\ 000$

Table 2 Estimation results for simulated series of 1 000 observations

参数	真实值	均值	标准差	RMSE	CPU
μ	0.000 4	0.000 4	0.000 4	0.000 4	0.416 3s
σ_X	0.013 7	0.013 6	0.001 3	0.001 3	
ϕ	0.968 4	0.961 7	0.013 5	0.015 0	
σ_V	0.225 9	0.235 3	0.040 6	0.041 5	
ρ	−0.230 2	−0.233 1	0.115 4	0.114 9	
μ	0.000 3	0.000 3	0.000 4	0.000 4	0.420 1s
σ_X	0.014 6	0.014 5	0.001 4	0.001 4	
ϕ	0.967 8	0.960 5	0.014 5	0.016 1	
σ_V	0.231 7	0.242 0	0.042 8	0.043 8	
ρ	−0.208 9	−0.212 0	0.114 9	0.114 3	

注：$S = 32$；EIS 迭代 5 次；重复 100 次实验得到均值、标准差和 RMSE，其中 RMSE 是估计值与真实值之间的均方根误差；CPU 表示用 EIS 迭代算法估计似然函数所需要的平均计算时间.

表 3　数值模拟实验结果：$T = 2\ 000$

Table 3 Estimation results for simulated series of 2 000 observations

参数	真实值	均值	标准差	RMSE	CPU
μ	0.000 4	0.000 4	0.000 2	0.000 2	1.163 2s
σ_X	0.013 7	0.013 7	0.001 2	0.001 2	
ϕ	0.968 4	0.964 6	0.008 7	0.009 5	
σ_V	0.225 9	0.229 1	0.025 5	0.025 6	
ρ	−0.230 2	−0.249 4	0.089 0	0.090 6	
μ	0.000 3	0.000 3	0.000 3	0.000 3	1.125 8s
σ_X	0.014 6	0.014 5	0.001 3	0.001 3	
ϕ	0.967 8	0.963 8	0.009 0	0.009 8	
σ_V	0.231 7	0.235 0	0.025 8	0.025 9	
ρ	−0.208 9	−0.228 0	0.088 2	0.089 9	

注：$S = 32$；EIS 迭代 5 次；重复 100 次实验得到均值、标准差和 RMSE，其中 RMSE 是估计值与真实值之间的均方根误差；CPU 表示用 EIS 迭代算法估计似然函数所需要的平均计算时间.

表 4 数值模拟实验结果: T = 5 000

Table 4 Estimation results for simulated series of 5 000 observations

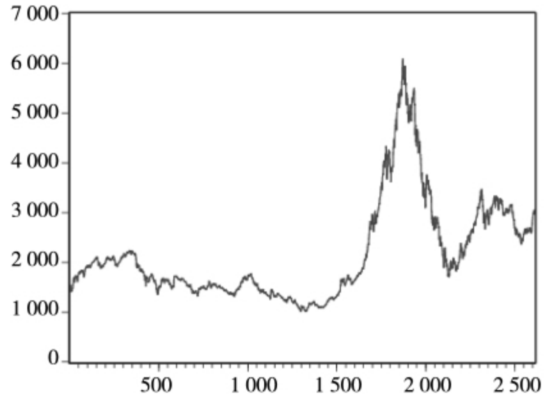
参数	真实值	均值	标准差	RMSE	CPU
μ	0.000 4	0.000 4	0.000 2	0.000 2	3.416 3s
σ_X	0.013 7	0.013 8	0.000 8	0.000 8	
ϕ	0.968 4	0.967 0	0.005 5	0.005 6	
σ_V	0.225 9	0.226 3	0.014 2	0.014 1	
ρ	−0.230 2	−0.235 3	0.056 2	0.056 2	
μ	0.000 3	0.000 3	0.000 2	0.000 2	3.413 4s
σ_X	0.014 6	0.014 7	0.000 8	0.000 8	
ϕ	0.967 8	0.966 5	0.005 6	0.005 7	
σ_V	0.231 7	0.231 6	0.014 2	0.014 2	
ρ	−0.208 9	−0.214 5	0.056 2	0.056 2	

注: S = 32; EIS 迭代 5 次; 重复 100 次实验得到均值、标准差和 RMSE，其中 RMSE 是估计值与真实值之间的均方根误差; CPU 表示用 EIS 迭代算法估计似然函数所需要的平均计算时间.

4 实证分析

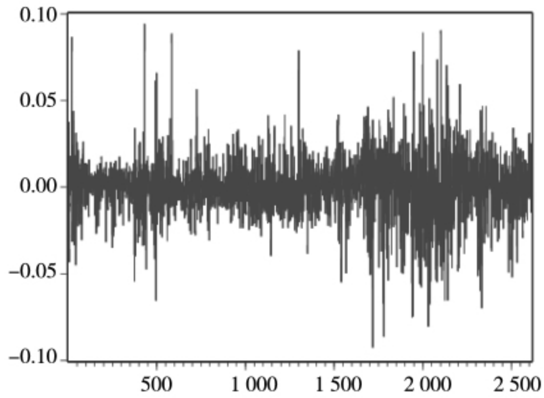
将 EIS-ML 方法应用于实际数据，利用 SV-L 模型对中国股市进行实证分析. 采用的数据为上证综合指数从 2000 年 1 月 4 日到 2010 年 10 月 28 日和深证综合指数从 1998 年 1 月 5 日到 2010 年 10 月 28 日的日收盘价格，其中沪市共 2 611 个观测值，深市 3 096 个观测值. 数据来源于国泰安 CSMAR 数据库. 将上证和深证综合指数价格转化为对数收益率: $X_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$，其中 S_t 是 t 时刻的上证或深证综合指数的收盘价格. 图 1—图 2 给出了上证和深证综合指数价格及其日对数收益率的序列图.

从图 1(b) 和图 2(b) 可以看出，上证和深证综合指数的日对数收益率序列均存在明显的波动率时变性和波动率聚集特征，即价格变化高低在波动率时段的聚集. 表 5 给出了上证和深证综合指数的日对数收益率序列的描述性统计量. 从表 5 可以看出，上证和深证综合指数的日对数收益率序列的分布均存在尖峰厚尾的特征; Jarque-Bera 统计量都很大，拒绝正态分布的假定. 因此，为了刻画这种时变波动率的特征以及允许在模型中体现波动率对正的和负的资产收益率的非对称效应(即杠杆效应)，考虑拟合 SV-L 模型.



(a) 上证综合指数价格

(a) Time series of prices of Shanghai Stock Exchange Compostite Index

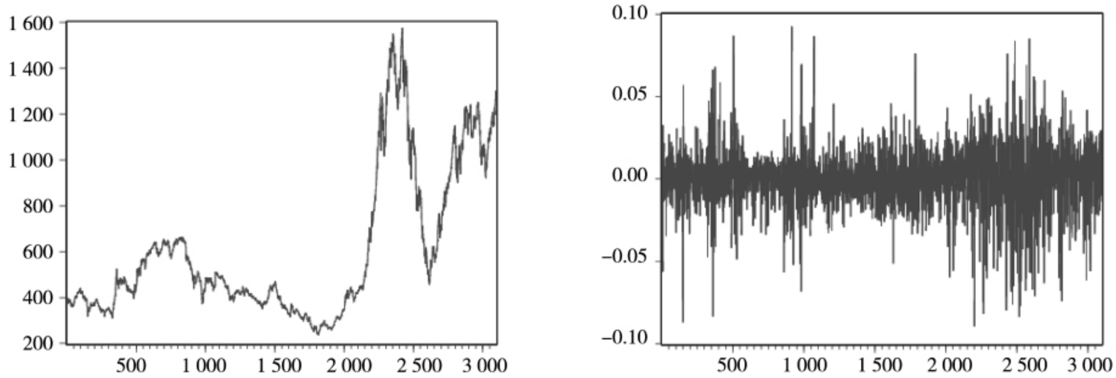


(b) 上证综合指数日对数收益率

(b) Time series of daily log-relurns of Shanghai Stock Exchange Composite Index

图 1 上证综合指数价格及其日对数收益率序列图，样本区间 2000-01-04—2010-10-28

Fig. 1 Time series of SSE component index prices and daily log returns, sample period: 2000-01-04—2010-10-28



(a) 深证综合指数价格

(a) Time series of prices of Shenzhen Stock Exchange Composite Index

(b) 深证综合指数日对数收益率

(b) Time series of daily log-returns of Shenzhen Stock Exchange Composite Index

图 2　深证综合指数价格及其日对数收益率的序列图，样本区间 1998 - 01 - 05—2010 - 10 - 28

Fig. 2 Time series of SZSE component index prices and daily log returns, sample period: 1998 - 01 - 05—2010 - 10 - 28

表 5　上证和深证综合指数的日对数收益率序列的描述性统计量

Table 5 Descriptive statistics of daily log-returns for SSE and SZSE composite indices

	均值	标准差	偏度	峰度	Jarque-Bera
上证综指	0.000 3	0.017 1	- 0.098 8	6.874 9	1 637.077 (0.000)
深证综指	0.000 4	0.018 0	- 0.330 8	6.357 3	1 509.952 (0.000)

注: ( ) 中是 Jarque-Bera 统计量的 P 值.

现在考虑上证和深证综合指数的日对数收益率数据，拟合 SV-L 模型. SV-L 模型的参数估计采用 EIS-ML 方法，参数估计结果见表 6. 从表 6 可以看出，上证综合指数的日对数收益率序列的波动持续性参数 ϕ 值为 0.968 4，深证综合指数的日对数收益率序列的波动持续性参数 ϕ 值为 0.967 8，沪深股市的波动持续性参数都达到了 0.96 以上，说明我国沪深股市的波动性冲击都是高度持续的. 上证和深证综合指数的 ρ 值都为负，说明上证和深证综合指数的日对数收益率与波动率过程在抽样阶段内存在显著的负向相关关系，即沪深股市存在显著的杠杆效应. 这是非常重要的，因为在很多 SV 模型中，为了简化，常设置 $\rho = 0$. 从所估计的结果可以看出，这种设置显然与实际不符. 从表 6 也可以看到，上海股市的杠杆效应略强于深圳股市，但其差别不大.

表 6　SV-L 模型参数估计结果

Table 6 Estimation results for the SV-L model

参数	ln L	μ	σ_X	ϕ	σ_V	ρ
上证综指	7 294.65 [0.045 6]	0.000 4 (0.000 3) [< 0.000 1]	0.013 7 (0.001 0) [< 0.000 1]	0.968 4 (0.007 5) [< 0.000 1]	0.225 9 (0.023 6) [0.000 2]	- 0.230 2 (0.060 1) [0.000 1]
深证综指	8 492.97 [0.078 5]	0.000 3 (0.000 2) [< 0.000 1]	0.014 6 (0.001 0) [< 0.000 1]	0.967 8 (0.007 2) [< 0.000 1]	0.231 7 (0.022 2) [0.000 2]	- 0.208 9 (0.054 6) [0.000 1]

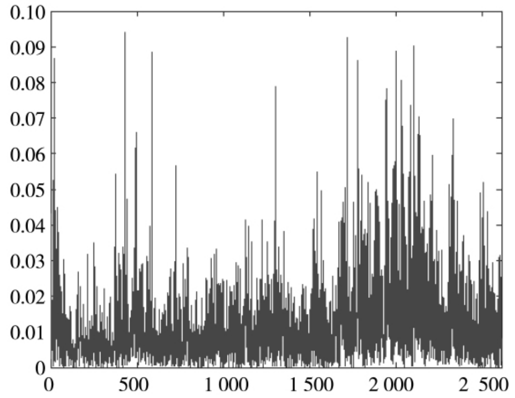
注: $S = 32$; EIS 迭代 5 次; ln L 是对数似然函数值; ( ) 中是 EIS - ML 估计的渐近标准误差 [ ] 中是取不同的随机数种子重复估计模型 20 次得到的参数估计的蒙特卡罗标准误差.

下面对 SV-L 模型进行模型诊断分析，检验其对沪深股市金融时间序列的拟合能力. 在进行

模型诊断分析之前，需要获得隐含的波动率序列. 采用 Gordon 等[27] 提出的粒子滤波(particle filter) 算法来获得滤过的波动率序列(即 $E[\exp(V_t/2) \mid F_t]$，其中 F_t 是 t 时刻的信息集). 图 3— 图 4 给出了上证和深证综合指数日对数收益率的绝对值及其滤过的波动率序列图. 如图所示，沪市和深市波动率的变化特征与收益率的绝对值的变化大小的特征非常吻合，表明 SV-L 模型较好地描述了上证和深证综合指数的日对数收益率变化的时变波动特征.

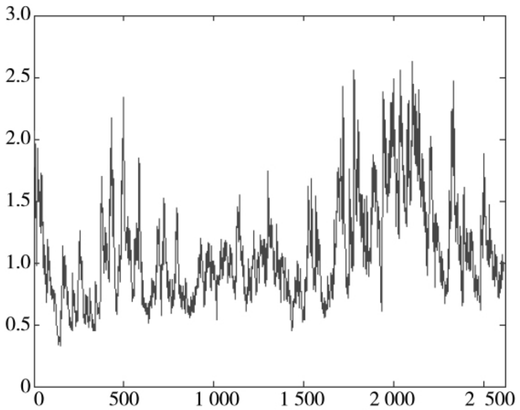
进一步，分析 SV-L 模型的标准化残差序列

$$z_t = \frac{X_t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}_X \hat{v}_{t-1}} \tag{21}$$



(a) 上证综合指数日对数收益率的绝对值序列

(a) Time series of absolute of daily log-retruns of Shanghai Stock Exchange Composite Index

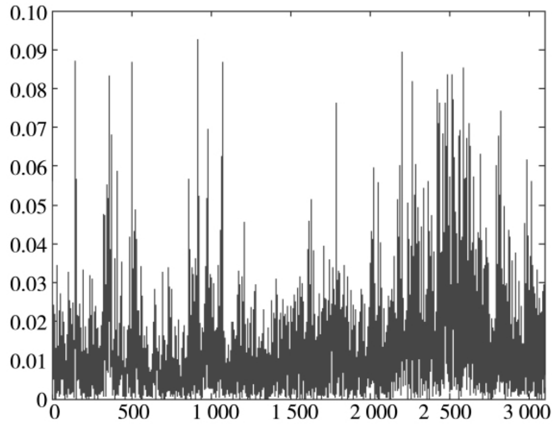


(b) 上证综合指数日对数收益率的绝对值

(b) Time series of filtered volatilities of Shanghai Stock Exchange Composite Index

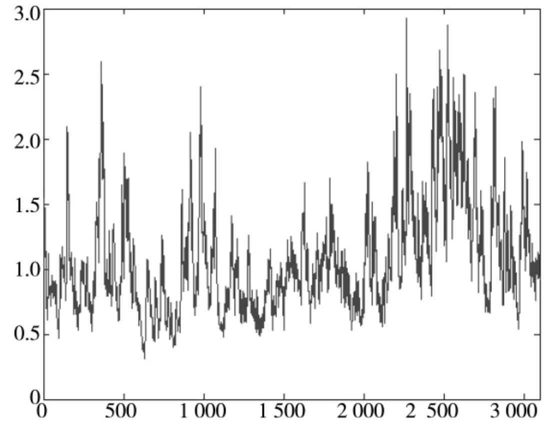
图 3 上证综合指数日对数收益率的绝对值及滤过的波动率序列图

Fig. 3 Time series of absolute of daily log-returns and filtered volatilities of Shanghai Stock Exchange Composite Index



(a) 深证综合指数日对数收益率的绝对值序列

(a) Time series of absolute of daily log-returns of Shenzhen Stock Exchange Composite Index



(b) 深证综合指数滤过的波动率序列

(b) Time series of filtered volatilities of Shenzhen Stock Exchange Composite Index

图 4 深证综合指数日对数收益率的绝对值及滤过的波动率序列图

Fig. 4 Time series of absolute of daily log-returns and filtered volatilities of Shenzhen Stock Exchange Composite Index

其中 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}_X$ 是 EIS-ML 估计值，$\hat{v}_t$ 是滤过的波动率序列，即 $\hat{v}_t = E[\exp(V_t/2) \mid F_t]$. 表 7 和图 5— 图 6 给出了 SV-L 模型的标准化残差序列诊断分析结果，从表 7 的 Ljung-Box 统计量可以看出，对于上海股市，残差平方序列的 Ljung-Box 统计量为 $Q(10) = 10.018$，$Q(20) = 19.329$，对应的 p 值分别为 0.439 和 0.501. 对于深圳股市，残差平方序列的 Ljung-Box 统计量为 $Q(10) = 7.805$，$Q(20) = 16.215$，p 值分别为 0.648 和 0.703. 因此，SV-L 模型能够很好地刻画沪深股市的波动率的动态性. 从图 5— 图 6 的残差平方序列的样本自相关函数(ACF) 也可以得出同样的结论. 进一

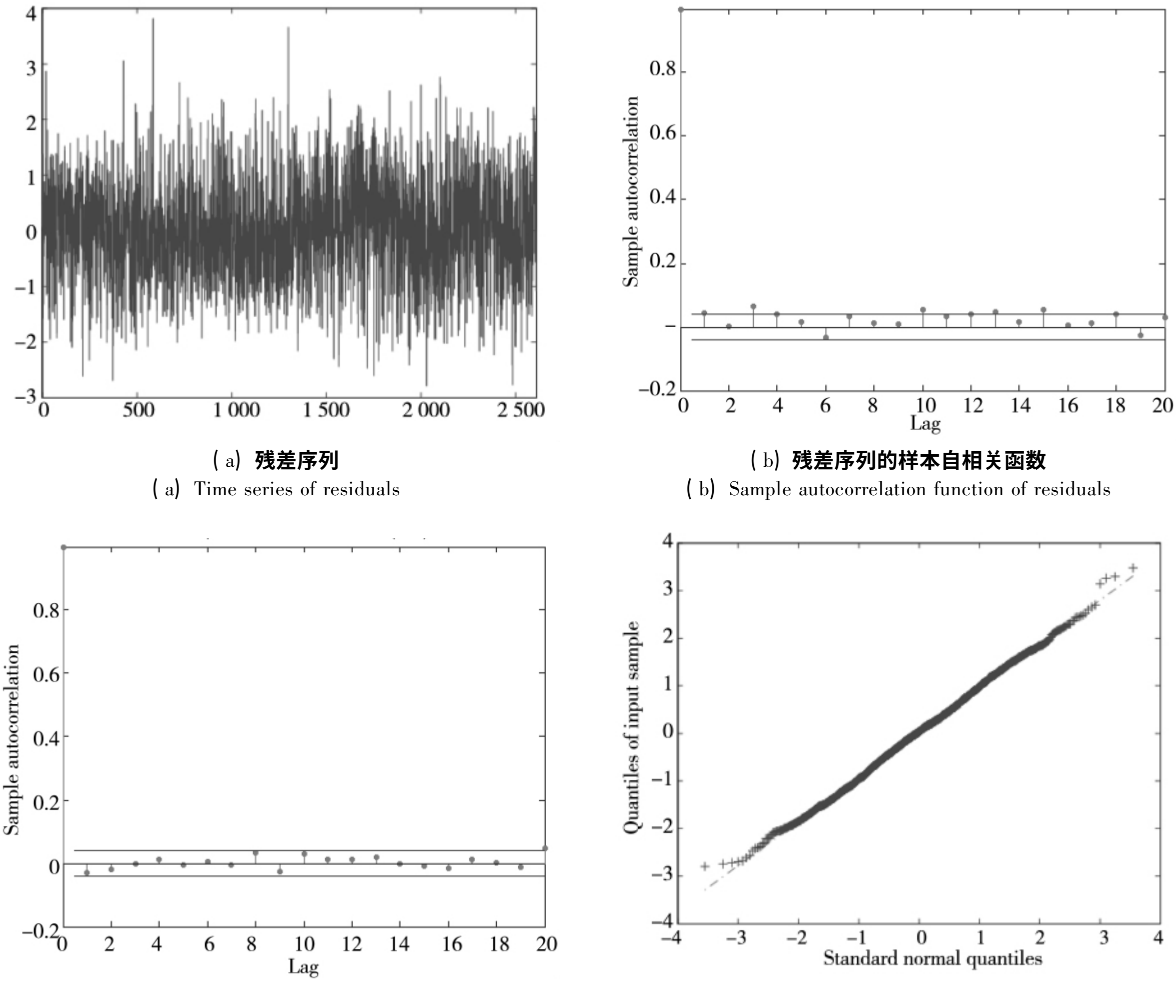
步，表 7 的 Jarque-Bera 统计量表明，在 10% 置信水平下，不能拒绝残差序列正态分布的假设. 图 5—图 6 的 Q-Q 图也表明经过 SV-L 模型拟合后，残差序列都基本上为一个 i. i. d 的标准正态分布序列. 事实上，从表 7 也可以看到，上证和深证综合指数的残差序列的偏度和峰度也都接近正态分布. 上述说明所拟合的 SV-L 模型是充分的.

表 7　SV-L 模型的残差序列诊断分析结果

Table 7 Diagnostics for the residuals of SV-L model

	偏度	峰度	Jarque-Bera	Ljung-Box(10)	Ljung-Box(20)
上证综指	0.032	2.887	1.843 (0.398)	10.018 (0.439)	19.329 (0.501)
深证综指	−0.047	3.094	2.261 (0.323)	7.805 (0.648)	16.215 (0.703)

注: Ljung-Box 检验基于 SV-L 模型的残差平方序列; ( ) 中是对应统计量的 p 值



(a) 残差序列
(a) Time series of residuals

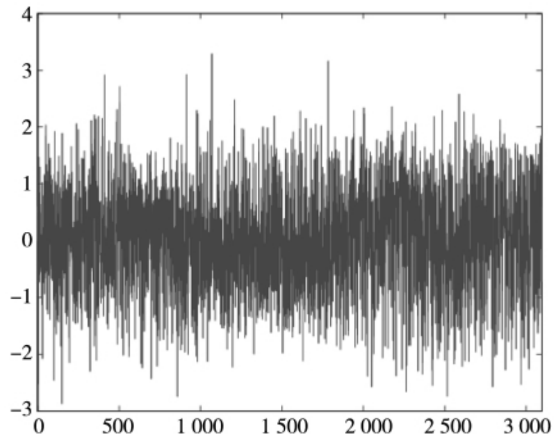
(b) 残差序列的样本自相关函数
(b) Sample autocorrelation function of residuals

(c) 残差平方序列的样本 ACF
(c) Sample autocorrelation function of squard residuals

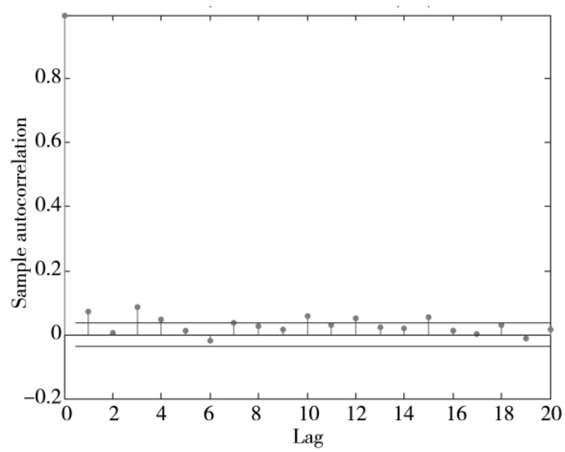
(d) 残差序列的 Q-Q 图
(d) Q-Q plot of residuals

图 5　对上证综合指数的日对数收益率所建的 SV-L 模型的诊断

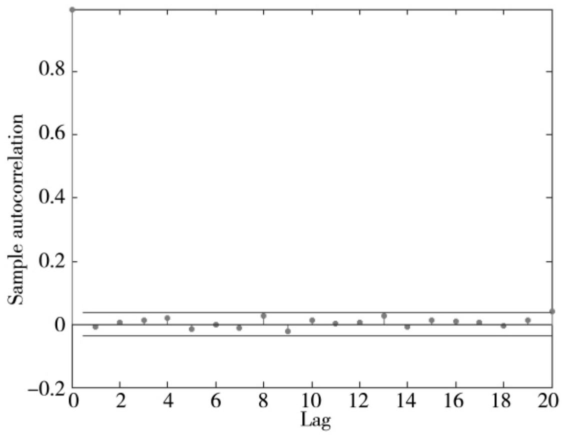
Fig. 5 Diagnostics for the SV-L model for Shanghai Stock Excharge Composite Index



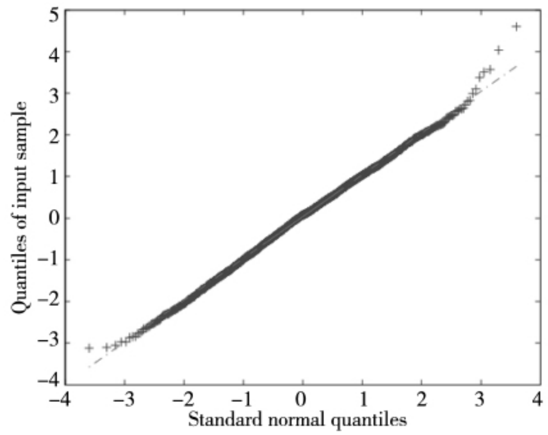
(a) 残差序列
(a) Time series of residuals



(b) 残差序列的样本自相关函数
(b) Sample autocorrelation function of residuals



(c) 残差平方序列的样本自相关函数
(c) Sample autocorrelation function of squared residuals



(d) 残差序列的 Q-Q 图
(d) Q-Q plot of residuals

图 6　对深证综合指数的日对数收益率所建的 SV-L 模型的诊断

Fig. 6 Diagnostics for the SV-L model for Shenzhen Stock Exchange Composite Index

5　结束语

本文探讨了一种具有杠杆效应的 SV 模型的参数估计问题，给出了一种基于 EIS 技巧的 ML 估计方法. 通过 MC 模拟实验，结果表明 EIS-ML 方法是非常精确和有效的. 虽然杠杆效应参数随样本长度变大，模拟均值对真实值的偏离变大，但标准差减小，其余参数随样本长度变大，模拟均值趋于逼近参数真实值. 利用中国股市数据进行的实证研究表明，SV-L 模型能够较好地描述我国股市的波动情况，模型诊断分析结果说明所拟合的 SV-L 模型是充分的. 最后，研究结果还表明我国沪深股市具有很强的波动持续性，波动率对收益率杠杆效应显著存在，且沪市杠杆效应略微强于深市杠杆效应.

参 考 文 献:

[1] Kim S, Shephard N, Chib S. Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models [J]. Review of Economic Studies, 1998, 65: 361 – 393.

[2] Black F. Studies of stock price volatility changes [C]. Proceedings of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association, 1976: 177 – 181.

[3] Christie A A. The stochastic behavior of common stock variances [J]. Journal of Financial Economics, 1982, 10: 407

-432.

[4] Melino A, Turnbull S M. Pricing foreign currency options with stochastic volatility [J]. Journal of Econometrics, 1990, 45: 239-265.

[5] Harvey A C, Ruiz E, Shephard N. Multivariate stochastic variance models [J]. Review of Economic Studies, 1994, 61: 247-264.

[6] Gallant A R, Tauchen G. Estimation of continuous-time models for stock returns and interest rates [J]. Macroeconomic Dynamics, 1997, 1: 135-168.

[7] Gallant A R, Hsieh D, Tauchen G. Estimation of stochastic volatility models with diagnostics [J]. Journal of Econometrics, 1997, 81(1): 159-192.

[8] Jacquier E, Polson N G, Rossi P E. Bayesian analysis of stochastic volatility models [J]. Journal of Business and Economic Statistics, 1994, 12: 371-389.

[9] Jacquier E, Polson N G, Rossi P E. Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors [J]. Journal of Econometrics, 2004, 122: 185-212.

[10] Broto C, Ruiz E. Estimation methods for stochastic volatility models: A survey [J]. Journal of Economic Surveys, 2004, 18(5): 613-649.

[11] **王春峰，蒋祥林，李　刚. 基于随机波动性模型的中国股市波动估计** [J]. **管理科学学报**, 2003, 6(4): 63-72.
Wang Chunfeng, Jiang Xianglin, Li Gang. Estimating volatility of Chinese stock market by stochastic volatility model [J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(4): 63-72. (in Chinese)

[12] **孟利锋，张世英，何　信. 具有杠杆效应 SV 模型的贝叶斯分析及其应用** [J]. **系统工程**, 2004, 22(3): 47-51.
Meng Lifeng, Zhang Shiyin, He Xin. Bayesian analysis of stochastic volatility model with leverage effect and its application [J]. Systems Engineering, 2004, 22(3): 47-51. (in Chinese)

[13] **孟利锋，张世英，何　信. SV 模型参数估计的经验特征函数方法** [J]. **系统工程**, 2004, 22(12): 92-95.
Meng Lifeng, Zhang Shiyin, He Xin. Estimation of SV models on the basis of empirical characteristic function method [J]. Systems Engineering, 2004, 22(12): 92-95. (in Chinese)

[14] **刘凤芹，吴喜之. 随机波动模型参数估计的新算法及其在上海股市的实证** [J]. **系统工程理论与实践**, 2006, 26(4): 27-31.
Liu Fengqin, Wu Xizhi. A new algorithm for estimating stochastic volatility model and the application in Shanghai stock market [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2006, 26(4): 27-31. (in Chinese)

[15] **周宏山，冀　云. 非对称随机波动模型在中国股市的应用** [J]. **统计与信息论坛**, 2007, 22(4): 70-73.
Zhou Hongshan, Ji Yun. An application of asymmetric stochastic volatility model in China's stock market [J]. Statistics & Information Forum, 2007, 22(4): 70-73. (in Chinese)

[16] Durham G B. Monte carlo methods for estimating, smoothing, and filtering one and two-factor stochastic volatility models [J]. Journal of Econometrics, 2006, 133: 273-305.

[17] Durham G B. SV mixture models with application to S&P 500 index returns [J]. Journal of Financial Economics, 2007, 85: 822-856.

[18] Richard J F, Zhang W. Efficient high-dimensional importance sampling [J]. Journal of Econometrics, 2007, 127(2): 1385-1411.

[19] Liesenfeld R, Richard J. Univariate and multivariate stochastic volatility models: Estimation and diagnostics [J]. Journal of Empirical Finance, 2003, 10: 505-531.

[20] Liesenfeld R, Richard J. Classical and bayesian analysis of univariate and multivariate stochastic volatility models [J]. Econometric Reviews, 2006, 25: 335-360.

[21] Bauwens L, Galli F. Efficient importance sampling for ML estimation of SCD models [J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2009, 53: 1974-1992.

[22] Liesenfeld R, Richard J F. Estimation of dynamic bivariate mixture models: Comments on Watanabe (2000) [J]. Journal of Business & Economic Statistics, 2003, 21(4): 570-576.

[23] Yu J. On leverage in a stochastic volatility model [J]. Journal of Econometrics, 2005, 127: 165-178.

[24] Chernov M, Gallant A R, Ghysels E, et al. Alternative models for stock price dynamics [J]. Journal of Econometrics, 2003, 116: 225-257.

[25] Cheng A R, Gallant A R, Ji C S, et al. A Gaussian approximation scheme for computation of option prices in stochastic volatility models [J]. Journal of Econometrics, 2008, 146: 44-58.

[26] Koopman S J, Shephard N, Creal D. Testing the assumptions behind importance sampling [J]. Journal of Econometrics,

2009, 149: 2 - 11.

[27] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation [J]. IEE Proceedings-F, 1993, 140: 107 - 113.

EIS-based maximum likelihood estimation of stochastic volatility model with leverage effect

WU Xin-yu[1,2], *ZHOU Hai-lin*[1], *WANG Shou-yang*[3], *MA Chao-qun*[2]

1. School of Finance, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu 233030, China;
2. School of Business Administration, Hunan University, Changsha 410082, China;
3. Academy of Mathematics and System Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

Abstract: The stochastic volatility model with a leverage effect (SV-L) has received a great deal of attention in the financial econometrics literature. However, estimation of the SV-L model poses difficulties. In this paper, we develop a method for maximum likelihood (ML) estimation of the SV-L model based on the efficient importance sampling (EIS) technique. Monte Carlo (MC) simulations are presented to examine the accuracy and small sample properties of our proposed method. The experimental results show that the EIS-ML method performs very well. Finally, the EIS-ML method is illustrated with real data. We apply the EIS-ML method of SV-L model to the daily log returns of SSE and SZSE Component Index. Empirical results show that a high persistence of volatility and a significant leverage effect exist in China stock market.

Key words: stochastic volatility; leverage effect; efficient importance sampling; maximum likelihood

附录:

假设 $m_t(V_t \mid X_t, V_{t-1}, a_t)$ 是均值和方差分别为 μ_{a_t} 和 $\sigma^2_{a_t}$ 的正态分布密度，那么它的对数为

$$-\frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2_{a_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{V_t - u_{a_t}}{\sigma_{a_t}}\right)^2 = -\frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2_{a_t} - \frac{V_t^2}{2\sigma^2_{a_t}} + \frac{\mu_{a_t}}{\sigma^2_{a_t}}V_t - \frac{\mu^2_{a_t}}{2\sigma^2_{a_t}} \tag{22}$$

根据式(15)和(17)，有

$$\begin{aligned}\ln m_t(V_t \mid X_t, V_{t-1}, a_t) &= \ln k_t(V_t \mid X_t, V_{t-1}, a_t) - \ln \chi_t(X_t, V_{t-1}, a_t)\\ &= -\frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma_t^2 - \frac{(V_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2} + a_{1,t}V_t + a_{2,t}V_t^2 - \ln \chi_t(X_t, V_{t-1}, a_t)\\ &= -\frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma_t^2 + \left(a_{2,t} - \frac{1}{2\sigma_t^2}\right)V_t^2 + \left(a_{1,t} + \frac{\mu_t}{\sigma_t^2}\right)V_t - \frac{\mu_t^2}{2\sigma_t^2} - \ln \chi_t(X_t, V_{t-1}, a_t)\end{aligned} \tag{23}$$

其中

$$\mu_t = \phi V_{t-1} + \rho\frac{\sigma_V}{\sigma_X \exp(V_{t-1}/2)}(X_t - \mu), \sigma_t^2 = \sigma_V^2(1 - \rho^2)$$

比较式(22)和(23)，可以得到

$$\mu_{a_t} = \sigma^2_{a_t}\left(a_{1,t} + \frac{\mu_t}{\sigma_t^2}\right) \tag{24}$$

$$\sigma^2_{a_t} = \frac{\sigma_t^2}{1 - 2a_{2,t}\sigma_t^2} \tag{25}$$

和

$$\ln \chi_t(X_t, V_{t-1}, a_t) = \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2_{a_t} + \frac{\mu^2_{a_t}}{2\sigma^2_{a_t}} - \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma_t^2 - \frac{\mu_t^2}{2\sigma_t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sigma^2_{a_t}}{\sigma_t^2} + \frac{\mu^2_{a_t}}{2\sigma^2_{a_t}} - \frac{\mu_t^2}{2\sigma_t^2} \tag{26}$$