基于乘客异质性的高峰期公交出行均衡研究[①]

田　琼，刘　鹏
（北京航空航天大学经济管理学院，北京 100191）

摘要： 在假设乘客对拥挤敏感程度具有异质性的基础上分析公交乘车的成本构成，并利用 Wardrop 用户分配第一准则对多起点单讫点的公交线路建立了基本均衡模型，通过数学推导，证明了在该假设下早高峰的存在性，并探索了均衡条件下不同类型的乘客间的混成特点以及分布特征. 算例结果支持了模型的结论. 这有助于加深对复杂交通行为的理解，对改进公交规划与管理具有理论指导价值.

关键词： 公共交通；乘客异质性；Wardrop 均衡；均衡性质
中图分类号： F570　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 1007－9807(2013)03－0082－06

0　引　言

进入 20 世纪 90 年代，研究公共交通系统中乘客的动态出行行为逐渐成为热点. Kraus 和 Yoshida[1] 在假设公交线路容量和换乘点拥挤的基础上分析了在单线路模型，他们用车站排队等待时间成本来反映公交拥挤. Lam 等[2] 研究了由于香港公交系统内上下车的拥挤而引起公共交通实际服务频率的动态变化. Tian 等[3] 在多起点单讫点的公交系统中研究了不同站点乘客的班次选择行为差异和车厢容量对乘客出行时间选择的影响，分析乘客的动态出行行为并考察了早高峰的产生和消散，田琼等[4] 进而又考虑了座位因素对均衡的影响. 这些研究都是建立在乘客具有同质性的假设基础上，然而现实中不同乘客的单位时间成本以及对拥挤的敏感程度往往不同. Lindsey[5] 将乘客分为多个类型，并分析了在瓶颈模型中多用户类型假设下出行成本的性质以及均衡的存在性和唯一性.

本文在考虑了公交系统内拥挤成本的基础上，将乘客按照对拥挤敏感程度不同划分为若干类. 通过对双起点单讫点这一简单的公交系统开展研究，推导出均衡状态下不同类型乘客混乘特点以及出行时间分布特征，以揭示不同类型乘客利用公共交通系统出行的内在规律. 为优化发展公共交通、改善公共交通管理、缓解城市交通拥堵状况提供科学依据和理论支持.

1　基本假设及数学模型

本文研究的对象是个双起点单讫点的地铁线路，该地铁线路从居住地 H_1 站出发经停居住地 H_2 站后最终到达工作地 W. 假设乘客是理性的，并且通过长期适应，已经了解了此公交系统的全部信息. 假设乘客有多个类别，不同类别的乘客对同样的拥挤程度感受不同. 同时，假设地铁的速度是恒定的，因此从 H_1 到 H_2 的时间 τ_1 与从 H_2 到 W 的时间 τ_2 恒定. 则某乘客乘坐地铁的总成本为

$$TC_{jak} = P_a + \sum_{t=a}^{2} g_k\Big(\sum_{s=1}^{t}\sum_{k} n_{jsk}\Big)\tau_t + \alpha\sum_{t=a}^{2}\tau_t + \delta(j)\,,\quad \forall a\in A,\ j\in Z,\ k\in Q \tag{1}$$

① 收稿日期：2011－07－01；修订日期：2012－12－11.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70801002；71071011；71271017)；国家 973 重大基础研究计划资助项目(2012CB725401).
作者简介：田　琼(1981—)，男，河北廊坊人，博士，副教授. Email: tianqiong@buaa.edu.cn

式中 TC_{jak} 表示第 k 类乘客在第 a 站选择乘坐第 j 车次的总成本;P_a 表示在第 a 站乘坐地铁的票价;$\sum_{t=a}^{2} g_k(\sum_{s=1}^{t}\sum_{k} n_{jsk})\tau_t$ 表示第 k 类乘客在第 a 站选择乘坐第 j 车次的拥挤成本,其中 n_{jsk} 表示第 k 类乘客在第 s 站选择乘坐第 j 车次的乘客数;$\alpha\sum_{t=a}^{2}\tau_t$ 表示乘客在第 a 站乘坐地铁到达终点站的时间成本;$\delta(j)$ 表示乘 j 车次到达工作地时早到或迟到时间成本;A 表示车站的集合,$A=\{1,2\}$;Z 表示车次的集合;Q 表示乘客对拥挤感受类型的集合.

当第 a 站的乘客选择乘坐车次时 P_a 和 $\alpha\sum_{t=a}^{2}\tau_t$ 是既定的,这两方面的成本并不能影响选择结果,而 $\sum_{t=a}^{2} g_k(\sum_{s=1}^{t}\sum_{k} n_{jk}^{s})\tau_t$ 和 $\delta(j)$ 两方面成本受到每个乘客选择乘坐的车次影响,因此要研究均衡的性质,只需考虑拥挤成本和早到或迟到的时间成本. 令

$$\lambda_{jak}=\sum_{t=a}^{2} g_k(\sum_{s=1}^{t}\sum_{k} n_{jsk})\tau_i+\delta(j) \tag{2}$$

其中对于 $\forall k\in Q$,有 $g_k(\cdot)$ 表示第 k 类乘客的拥挤成本函数,并有 $g_k(0)=0$、$g_k'(n)>0$,$n\geqslant 0$;对于两种不同类型的乘客有 $g_k'(n)\neq g_l'(n)$.

设乘客早到或者迟到的时间成本 $\delta(j)=\beta|j-j^*|$,其中 j^* 表示最优到达车次,此车次到达终点的时间正好是准时上班时间. 由于假设早到和迟到惩罚力度相同,则可以知道每站每类乘客关于 j^* 对称的两个车次乘坐人数相同,因此每站在对称车次上总的乘坐人数相等.

根据 Wardrop 用户分配第一准则,有

$$n_{jak}(\lambda_{jak}-\lambda_{ak})=0,\ a\in A,\ j\in Z,\ k\in Q \tag{3}$$

$$\lambda_{jak}-\lambda_{ak}\geqslant 0,\ a\in A,\ j\in Z,\ k\in Q \tag{4}$$

$$\sum_{j\in z} n_{jak}=n_{ak},\ a\in A,\ k\in Q \tag{5}$$

$$n_{jak}\geqslant 0,\ a\in A,\ j\in Z,\ k\in Q \tag{6}$$

式中 λ_{ak} 表示在第 a 站第 k 类乘客对于选择不同车次时所能到达的最小成本. 可以看出,若 $\lambda_{jak}>\lambda_{ak}$,则 $n_{jak}=0$,表示在第 a 站第 k 类乘客若乘坐 j 车次的成本大于最低成本,则在第 a 站第 k 类乘客不乘坐 j 车次;若 $n_{jak}>0$,则 $\lambda_{jak}=\lambda_{ak}$,表示在第 a 站第 k 类乘客若有人乘坐 j 车次,则其成本等于最低成本.

2 均衡的性质

性质1 在均衡条件下,对于 $\forall j\in Z$,若 $\sum_k n_{j2k}>0$,则 $\sum_k n_{j1k}>0$.

证明 假设第1站无乘客乘坐 j 车次,则 $\sum_k n_{j1k}=0$,所以 $\forall k\in Q$,有 $\lambda_{j1k}\geqslant\lambda_{1k}$. 在均衡条件下,若第2站有乘客乘坐 j 车次,则有 $\sum_k n_{j2k}>0$,不妨设第 k 类乘客乘坐,由式(3)可得

$$\lambda_{j2k}=\lambda_{2k}$$

由式(2)可得

$$\lambda_{j1k}-\lambda_{j2k}=g_k(\sum_k n_{j1k})\tau_1$$

所以有 $\lambda_{j1k}-\lambda_{j2k}=0$,因此 $\lambda_{1k}-\lambda_{2k}\leqslant\lambda_{j1k}-\lambda_{j2k}=0$,可得 $\lambda_{1k}\leqslant\lambda_{2k}$.

不妨设第1站第 k 类乘客乘坐 i 车次,则有 $\lambda_{i1k}=\lambda_{1k}$,$\sum_k n_{i1k}>0$;第2站的第 k 类乘客未必乘坐 i 车次,则有 $\lambda_{i2k}\geqslant\lambda_{2k}$. 由式(2)可得

$$\lambda_{i1k}-\lambda_{i2k}=g_k\tau_1\sum_k n_{i1k}>0$$

所以 $\lambda_{i1k}>\lambda_{i2k}$. 因为 $\lambda_{1k}=\lambda_{i1k}>\lambda_{i2k}\geqslant\lambda_{2k}$,所以有 $\lambda_{1k}>\lambda_{2k}$.

$\lambda_{1k}>\lambda_{2k}$ 与 $\lambda_{1k}\leqslant\lambda_{2k}$ 矛盾,因此第1站无人乘坐 j 车次的假设不成立,所以在均衡条件下,对于 $\forall j\in Z$,若 $n_{2j}>0$,则 $n_{1j}>0$. 因此在均衡条件下,若第2站有乘客乘坐 j 车次,则第1站也必有乘客乘坐 j 车次.

性质2 在均衡条件下,若 $i<j\leqslant j^*$,则 $\sum_k n_{i1k}+\sum_k n_{i2k}\leqslant\sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k}$.

证明 1)当 $\sum_k n_{j2k}>0$ 时,不妨设第 k 类乘客在第2站乘坐 i 车次,则由式(3)可得 $\lambda_{i2k}=\lambda_{2k}$. 第 k 类乘客在第2站未必乘坐 j 车次,则有 $\lambda_{j2k}\geqslant\lambda_{2k}$,所以 $\lambda_{j2k}\geqslant\lambda_{i2k}$,将此式代入式(2)可知

$$\begin{gathered}g_k(\sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k})\tau_2+\delta(j)\geqslant\\ g_k(\sum_k n_{i1k}+\sum_k n_{i2k})\tau_2+\delta(i)\end{gathered} \tag{7}$$

由于 $i < j \leqslant j^*$，所以有 $\delta(i) > \delta(j)$，故有

$$g_k\left(\sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k}\right)\tau_2 > g_k\left(\sum_k n_{i1k}+\sum_k n_{i2k}\right)\tau_2 \tag{8}$$

则 $\sum_k n_{j1k} + \sum_k n_{j2k} > \sum_k n_{i1k} + \sum_k n_{i2k}$ 成立.

2) 当 $\sum_k n_{i2k} = 0$ 且 $\sum_k n_{i1k} = 0$ 时，则必然有 $\sum_k n_{i1k}+\sum_k n_{i2k} \leqslant \sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k}$ 成立. 当 $\sum_k n_{i2k} = 0$ 且 $\sum_k n_{i1k} > 0$ 时，假设 $\sum_k n_{i1k} + \sum_k n_{i2k} > \sum_k n_{j1k} + \sum_k n_{j2k}$ 成立，则 $\sum_k n_{i1k} > \sum_k n_{j1k} + \sum_k n_{j2k}$.

由于 $\sum_k n_{i1k} > 0$，不妨设第 k 类乘客在第 1 站乘坐 i 车次，则有 $\lambda_{i1k} = \lambda_{1k}$，第 k 类乘客在第 1 站未必乘坐 j 车次，有 $\lambda_{j1k} \geqslant \lambda_{1k}$，所以 $\lambda_{j1k} \geqslant \lambda_{i1k}$，则有

$$\begin{aligned} & g_k\left(\sum_k n_{j1k}\right)\tau_1 + g_k\left(\sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k}\right)\tau_2 + \delta(j) \geqslant \\ & \quad g_k\left(\sum_k n_{i1k}\right)\tau_1 + g_k\left(\sum_k n_{i1k}\right)\tau_2 + \delta(i) \end{aligned} \tag{9}$$

又因为 $\delta(j) < \delta(i)$，所以

$$\begin{aligned} & g_k\left(\sum_k n_{j1k}\right)\tau_1 + g_k\left(\sum_k n_{j1k} + \sum_k n_{j2k}\right)\tau_2 > \\ & \quad g_k\left(\sum_k n_{i1k}\right)\tau_1 + g_k\left(\sum_k n_{i1k}\right)\tau_2 \end{aligned} \tag{10}$$

根据 $\sum_k n_{i1k} > \sum_k n_{j1k} + \sum_k n_{j2k}$，有

$$g_k\left(\sum_k n_{j1k}\right)\tau_1 < g_k\left(\sum_k n_{i1k}\right)\tau_1 \tag{11}$$

$$g_k\left(\sum_k n_{j1k}\right) + \sum_k n_{j2k}\big)\tau_2 < g_k\left(\sum_k n_{i1k}\right)\tau_2 \tag{12}$$

由式(11)、(12)可得

$$\begin{aligned} & g_k\left(\sum_k n_{j1k}\right)\tau_1 + g_k\left(\sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k}\right)\tau_2 < \\ & \quad g_k\left(\sum_k n_{i1k}\right)\tau_1 + g_k\left(\sum_k n_{i1k}\right)\tau_2 \end{aligned} \tag{13}$$

式(10)与式(13)矛盾，因此当 $\sum_k n_{i2k} = 0$ 且 $\sum_k n_{i1k} > 0$ 时，$\sum_k n_{i1k} + \sum_k n_{i2k} \leqslant \sum_k n_{j1k} + \sum_k n_{j2k}$ 成立.

由 1)、2) 可知，性质 2 成立. 所以越靠近最优到达时间的车次车内最终累计乘车总人数越多.

性质 3 在均衡条件下，$\forall i,j \leqslant j^*$ 且 $i \neq j$，对于 $\forall k,l \in Q$ 且 $k \neq l$ 不可能有 $n_{i2k} > 0$，$n_{i2l} > 0$，$n_{j2k} > 0$，$n_{j2l} > 0$ 同时成立.

证明 假设 $n_{i2k} > 0$，$n_{i2l} > 0$，$n_{j2k} > 0$，$n_{j2l} > 0$ 同时成立，则根据式(3)有 $\lambda_{j2k} = \lambda_{2k}$，$\lambda_{i2k} \geqslant \lambda_{2k}$，$\lambda_{j2l} \geqslant \lambda_{2l}$，$\lambda_{i2l} = \lambda_{2l}$ 同时成立. 则有 $\lambda_{j2k} - \lambda_{j2l} = \lambda_{2k} - \lambda_{2l} = \lambda_{i2k} - \lambda_{i2l}$，代入式(2)可得

$$\begin{aligned} & g_k\left(\sum_k n_{j1k} + \sum_k n_{j2k}\right) - g_l\left(\sum_l n_{j1l} + \sum_l n_{j2l}\right) = \\ & g_k\left(\sum_k n_{i1k} + \sum_k n_{i2k}\right) - g_l\left(\sum_l n_{i1l} + \sum_l n_{i2l}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

不妨设 $i < j$，$g_k'(\cdot) > g_l'(\cdot)$，则根据性质 2 有

$$\sum_k n_{i1k} + \sum_k n_{i2k} \leqslant \sum_k n_{j1k} + \sum_k n_{j2k}$$

所以

$$\begin{aligned} & g_k\left(\sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k}\right) - g_k\left(\sum_k n_{i1k}+\sum_k n_{i2k}\right) > \\ & \quad g_l\left(\sum_l n_{j1l}+\sum_l n_{j2l}\right) - g_l\left(\sum_l n_{i1l}+\sum_l n_{i2l}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

式(14)与式(15)矛盾，因此 $n_{i2k} > 0$，$n_{i2l} > 0$，$n_{j2k} > 0$，$n_{j2l} > 0$ 不能同时成立. 所以在第 2 站早于(晚于) j^* 的车次中两类乘客最多在 1 个车次混乘.

性质 4 在均衡条件下，若 $i < j \leqslant j^*$，$g_k'(\cdot) > g_l'(\cdot)$，则 $n_{i2k} > 0$ 和 $n_{i2l} > 0$ 不可能同时成立.

证明 假设 $n_{i2k} > 0$，$n_{i2l} > 0$ 同时成立，由式(3)可得 $\lambda_{i2l} = \lambda_{2l}$，$\lambda_{j2k} = \lambda_{2k}$ 同时成立. 但第 k 类乘客未必乘坐 i 车次，第 l 类乘客未必乘坐 j 车次，则有 $\lambda_{j2k} \geqslant \lambda_{2k}$，$\lambda_{i2k} - \lambda_{2l} \geqslant \lambda_{2k} - \lambda_{2l}$，$\lambda_{j2l} \geqslant \lambda_{2l}$，$\lambda_{2k} - \lambda_{j2l} \leqslant \lambda_{2k} - \lambda_{2l}$ 成立. 所以 $\lambda_{i2k} - \lambda_{2l} \geqslant \lambda_{2k} - \lambda_{j2l}$ 成立，又因为 $\lambda_{i2l} = \lambda_{2l}$，$\lambda_{j2k} = \lambda_{2k}$，则有 $\lambda_{i2k} - \lambda_{i2l} \geqslant \lambda_{j2k} - \lambda_{j2l}$，由式(2)得

$$\begin{aligned} & g_k\left(\sum_k n_{i1k}+\sum_k n_{i2k}\right) - g_l\left(\sum_l n_{i1l}+\sum_k n_{i2l}\right) \geqslant \\ & \quad g_k\left(\sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k}\right) - g_l\left(\sum_l n_{j1l}+\sum_l n_{j2l}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

当 $i < j \leqslant j^*$，$g_k'(\cdot) > g_l'(\cdot)$ 时，有式(15)成立.

式(15)与式(16)矛盾，则 $n_{i2k} > 0$，$n_{i2l} > 0$ 不可能同时成立. 可知在第 2 站对拥挤敏感、拥挤成本高的乘客乘坐远离最佳到达时间的车次；对拥

挤不敏感、拥挤成本低的乘客乘坐靠近最佳到达时间车次.

性质5　在均衡条件下,$\forall i,j \leqslant j^*$ 且 $i \neq j$,对 $\forall k,l \in Q=\{$怕挤,不怕挤$\}$ 且 $k \neq l$,不可能同时成立 $n_{i1k}>0,n_{i1l}>0,n_{j1k}>0,n_{j1l}>0$.

证明　假设 $n_{i1k}>0,n_{i1l}>0,n_{j1k}>0,n_{j1l}>0$ 同时成立. 由式(3)可得 $\lambda_{j1k}=\lambda_{1k},\lambda_{i1k}=\lambda_{1k}$,$\lambda_{j1l}=\lambda_{1l},\lambda_{i1l}=\lambda_{1l}$ 同时成立,所以有 $\lambda_{j1k}-\lambda_{i1k}=\lambda_{j1l}-\lambda_{i1l}$,则

$$g_k(\sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k})\tau_2-g_k(\sum_k n_{i1k}+\sum_k n_{i2k})\tau_2+g_k(\sum_l n_{j1k})\tau_1-g_k(\sum_k n_{i1k})\tau_1=g_l(\sum_l n_{j1l}+\sum_l n_{j2l})\tau_2-g_l(\sum_l n_{i1l}+\sum_l n_{i2l})\tau_2+g_l(\sum_l n_{j1l})\tau_1-g_l(\sum_l n_{i1l})\tau_1 \tag{17}$$

不妨设 $i<j\leqslant j^*$,$g_k'(\cdot)>g_l'(\cdot)$,则式(15)成立. 若有 $n_{i2k}>0,n_{j2k}>0$ 同时成立,则有 $\lambda_{j1k}-\lambda_{j2k}=\lambda_{i1k}-\lambda_{i2k}$,$\lambda_{j1l}-\lambda_{j2l}=\lambda_{i1l}-\lambda_{i2l}$. 由式(2)可得

$$g_k(\sum_k n_{j1k})\tau_1=\lambda_{j1k}-\lambda_{j2k}$$

$$g_k(\sum_k n_{i1k})\tau_1=\lambda_{i1k}-\lambda_{i2k}$$

所以 $g_k(\sum_k n_{j1k})\tau_1=g_k(\sum_k n_{i1k})\tau_1$,$\sum_k n_{j1k}=\sum_k n_{i1k}$,可知式(14)成立.

式(14)与式(15)矛盾,因此当 $n_{i1k}>0$,$n_{i1l}>0,n_{j1k}>0,n_{j1l}>0$ 同时成立时,$n_{i2k}>0$,$n_{j2k}>0$ 不可能同时成立; 同理可证当 $n_{i1k}>0$,$n_{i1l}>0,n_{j1k}>0,n_{j1l}>0$ 同时成立时,不可能有 $n_{i2l}>0,n_{j2l}>0$ 同时成立. 根据性质4可知,不可能存在第2站有第 l 类乘客乘坐在 i 车次,第 k 类乘客乘坐 j 车次,所以当 $n_{i1k}>0,n_{i1l}>0,n_{j1k}>0$,$n_{j1l}>0$ 同时成立时,必有第2站 i 车次只有第 k 类乘客乘坐,第2站 j 车次只有第 l 类人乘坐. 所以有 $\lambda_{i2k}=\lambda_{2k},\lambda_{j2k}\geqslant\lambda_{2k},\lambda_{j2l}=\lambda_{2l},\lambda_{i2l}\geqslant\lambda_{2l}$ 成立,则又由式(2)有

$$g_k(\sum_k n_{j1k})\tau_1=\lambda_{j1k}-\lambda_{j2k}\leqslant\lambda_{1k}-\lambda_{2k}$$

$$g_k(\sum_l n_{i1k})\tau_1=\lambda_{i1k}-\lambda_{i2k}=\lambda_{1k}-\lambda_{2k}$$

$$g_l(\sum_l n_{j1l})\tau_1=\lambda_{j1l}-\lambda_{j2l}=\lambda_{1l}-\lambda_{2l}$$

$$g_l(\sum_l n_{i1l})\tau_1=\lambda_{i1l}-\lambda_{i2l}\leqslant\lambda_{1l}-\lambda_{2l}$$

由该组式子可知

$$g_k(\sum_k n_{j1k})\tau_1\leqslant g_k(\sum_k n_{i1k})\tau_1$$

$$g_l(\sum_l n_{i1l})\tau_1\leqslant g_l(\sum_l n_{j1l})\tau_1$$

所以 $\sum_k n_{j1k}\leqslant\sum_k n_{i1k}$,$\sum_l n_{i1l}\leqslant\sum_l n_{j1l}$ 成立. 由于 $\sum_k n_{j1k}=\sum_k n_{i1k}$,可得式(14)成立.

式(14)与式(15)矛盾,因此原假设不成立. 则在均衡条件下,$\forall i,j\leqslant j^*$ 且 $i\neq j$,对 $\forall k,l\in Q=\{$怕挤,不怕挤$\}$ 且 $k\neq l$,$n_{i1k}>0,n_{i1l}>0,n_{j1k}>0,n_{j1l}>0$ 不可能同时成立. 因此可知均衡条件下,若只有两类乘客,则在第1站早于(或晚于) j 的车次中两类乘客最多在1个车次混乘.

性质6　在均衡条件下,若 $i<j\leqslant j^*$,$g_k'(\cdot)>g_l'(\cdot)$,$\sum_k n_{i1k}\leqslant\sum_k n_{j1k}$,则不可能有 $n_{j1k}>0$,$n_{i1l}>0$ 同时成立.

证明　假设有 $n_{j1k}>0$ 和 $n_{i1l}>0$ 同时成立,则由式(3)可得 $\lambda_{j1k}=\lambda_{1k},\lambda_{i1l}=\lambda_{1l}$ 同时成立. 但在第1站第 k 类乘客未必乘坐 i 车次,在第1站第 l 类乘客未必乘坐 j 车次,则有 $\lambda_{j1l}\geqslant\lambda_{1l},\lambda_{i1k}\geqslant\lambda_{1k}$,故有 $\lambda_{j1l}-\lambda_{i1l}\geqslant\lambda_{j1k}-\lambda_{i1k}$,所以成立

$$g_l(\sum_l n_{j1l}+\sum_l n_{j2l})\tau_2-g_l(\sum_l n_{i1l}+\sum_l n_{i2l})\tau_2+g_l(\sum_l n_{j1l})\tau_1-g_l(\sum_l n_{i1l})\tau_1\geqslant g_k(\sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k})\tau_2-g_k(\sum_k n_{i1k}+\sum_k n_{i2k})\tau_2+g_k(\sum_k n_{j1k})\tau_1-g_k(\sum_k n_{i1k})\tau_1 \tag{18}$$

根据性质2可知,$\sum_k n_{i1k}+\sum_k n_{i2k}\leqslant\sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k}$,结合条件 $\sum_k n_{i1k}\leqslant\sum_k n_{j1k}$,$g_k'(\cdot)>g_l'(\cdot)$ 可得

$$g_l(\sum_l n_{j1l}+\sum_l n_{j2l})\tau_2-g_l(\sum_l n_{i1l}+\sum_l n_{i2l})\tau_2+g_l(\sum_l n_{j1l})\tau_1-g_l(\sum_l n_{i1l})\tau_1<g_k(\sum_k n_{j1k}+\sum_k n_{j2k})\tau_2-g_k(\sum_k n_{i1k}+\sum_k n_{i2k})\tau_2+$$

$$g_k\left(\sum_k n_{j1k}\right)\tau_1 - g_k\left(\sum_k n_{i1k}\right)\tau_1 \qquad (19)$$

式(18)与式(19)矛盾，所以原假设不成立. 因此在均衡条件下，若 $i < j \leq j^*$，$g_k'(\cdot) > g_l'(\cdot)$，$\sum_k n_{i1k} < \sum_k n_{j1k}$，则不可能有 $n_{j1k} > 0$，$n_{i1l} > 0$ 同时成立. 可知，在第 1 站对拥挤敏感程度更高的乘客选择乘坐远离最佳到达时间的车次；对拥挤不敏感、拥挤成本较低的乘客乘坐靠近最佳到达时间车次.

3 算 例

假设在双起点单讫点线路中，$A = \{1, 2\}$；$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，其中 4 是准时车次；$Q = \{1, 2\}$；$g_1(n) = n$，$g_2(n) = 2n$；$n_{11}$，$n_{12}$，$n_{21}$，$n_{22}$ 分别表示第 1、2 站的第 1、2 类乘客的人数，均为 50 人；$\tau_1 = \tau_2 = 1$；$\alpha = 10$；通过 MATLAB2010b 计算，结果如图 1 所示.

从图 1 可以看出从初始车次开始，乘车人数随着逐渐靠近上班时间逐渐增多，在最佳车次时乘客数达到最大值，然后逐渐回落，呈现出单峰的性质. 在第 1 站中两类乘客没有混乘，而在第 2 站中两类乘客在第 3、5 车次混乘. 对于两个车站，较怕拥挤(拥挤成本高)的乘客乘坐远离最佳到达时间的车次，而不怕拥挤(拥挤成本低)的乘客乘坐靠近最佳到达时间的车次.

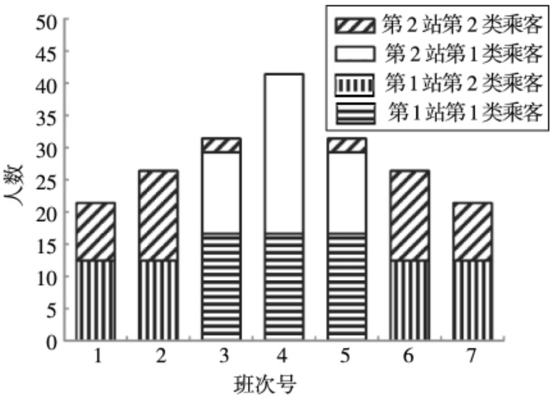

图 1 两站两类乘客到达分布

Fig. 1 Arrival profiles for the two stations system with two-class passengers

4 结束语

本文通过对不同类型乘客在双起点单讫点公交系统中的均衡的研究，证明了存在早单峰，这与现实中的情况是一致的. 另外分析了不同类型乘客乘坐车次的分布情况，其中在峰的每一侧都有不同类型乘客之间最多在 1 个车次混乘特点，且较怕拥挤的乘客乘坐远离最佳到达时间的车次，而不怕拥挤的乘客乘坐靠近最佳到达时间的车次.

接下来的工作包括如何确定合理的公交票价和分析公交与私家车之间的竞争以综合的优化公共交通体系[6,7]和基于累积前景理论考虑乘客拥挤/延误成本的非对称特性[8].

参 考 文 献：

[1] Kraus M, Yoshida Y. The commuter's time-of-use decision and optimal pricing and service in urban mass transit[J]. Journal of Urban Economics, 2002, 51(2): 170 – 195.

[2] Lam W H K, Cheung C Y, Lam C F. A study of crowding effects at the Hong Kong light rail transit stations[J]. Transportation Research A, 1999, 33(4): 401 – 415.

[3] Tian Q, Huang H J, Yang H. Equilibrium properties of the morning peak-period commuting in a many-to-one mass transit system[J]. Transportation Research Part B, 2007, 41(6): 616 – 631.

[4] 田 琼, 黄海军. 城市公交系统内乘客出行动态均衡模型[J]. 管理科学学报, 2009, 12(1): 1 – 8.
Tian Qiong, Huang Haijun. A dynamic model for passengers' commuting equilibrium in urban transit systems[J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(1): 1 – 8. (in Chinese)

[5] Lindsey R. Existence, uniqueness, and trip cost function properties of user equilibrium in the bottleneck model with multiple user classes[J]. Transportation Science, 2004, 38(3): 293 – 314.

[6] 田 琼, 黄海军, 杨 海. 瓶颈处停车换乘的 logit 随机均衡选择模型[J]. 管理科学学报, 2005, 8(1): 1 – 6.

Tian Qiong, Huang Haijun, Yang Hai. Mode choice models based on logit stochastic equilibrium in transportation systems with park-and-ride option [J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(1): 1-6. (in Chinese)

[7] 黄海军, 田 琼, 杨 海, 等. 高峰期公交车乘车均衡模型与竞争分析 [J]. 管理科学学报, 2005, 8(6): 1-9.
Huang Haijun, Tian Qiong, Yang Hai, et al. Equilibrium bus riding behavior in rush hours and system configuration for providing bus services [J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(6): 1-9. (in Chinese)

[8] 徐红利, 周 晶, 徐 薇. 基于累积前景理论的随机网络用户均衡模型 [J]. 管理科学学报, 2011, 14(7): 1-7.
Xu Hongli, Zhou Jing, Xu Wei. Cumulative prospect theory-based user equilibrium model for stochastic network [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(7): 1-7. (in Chinese)

Equilibrium properties of peak-period commuting in mass transit system with heterogeneous passengers

TIAN Qiong, LIU Peng

School of Economics and Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China

Abstract: This paper analyzes the equilibrium properties of the morning peak-period commuting profiles in a many-to-one transit system with in-vehicle crowding effect and schedule delay cost. Passengers are assumed to be heterogeneous, which means different passengers have different crowding effect functions. The passengers always choose their optimal time-of-use decision from home locations to a single destination by trading off the travel time and the crowding cost against the schedule delay cost. In these conditions, a Wardrop equilibrium model is established. We first prove the existence of the morning peak-period. In addition, we find how heterogeneous passengers choose travel time and distribution characteristics between heterogeneous passengers under the equilibrium condition.

Key words: public transport; passenger heterogeneity; Wardrop equilibrium; equilibrium properties