基于顾客选择的酒店多房间类型联合定价研究①

陈武华，孙燕红，华中生
(中国科学技术大学管理学院，合肥 230026)

摘要： 研究了酒店多个房间类型的客房需求存在相关性的综合定价决策问题. 首先，将所有房间类型按需求是否相关进行归类，并采用 Nested Logit 选择模型来刻画顾客在多房间类型多价位间的选择行为. 在考虑单天居住申请的情况下，建立了一个随机动态规划模型以描述酒店管理者的动态价格决策过程，并设计了一种求解最优定价策略的算法. 数值模拟结果表明，与不考虑各房间类型的价格决策相互影响时的情形相比，酒店多房间类型综合定价决策能获得更高的总收益和期望客房出租率，并提供更低的平均房价.

关键词： 顾客选择行为；酒店收益管理；动态定价；嵌套 Logit 模型

中图分类号： F275；C931 **文献标识码：** A **文章编号：** 1007 - 9807(2013)07 - 0023 - 11

0 引 言

在酒店经营过程中，在最佳时机将各类型的房间以最适当的价格出售给最合适的顾客是酒店管理者的一项重要工作. 为了满足不同客户的需求，酒店一般设有商务间、标准间和套间等多种类型的房间. 酒店的顾客至少可以分成旅游顾客和商务顾客两种类型. 旅游类型顾客因为对价格比较敏感但对时间和服务水平不太敏感而愿意接受提前预定等限制条件以得到较低的折扣价. 相反，商务类型顾客一般对时间和服务水平比较敏感而对价格不太敏感，从而愿意以较高的价格获得较高的服务水平. 因此，酒店一般会为每个房间类型设有门市价和带有限制条件的折扣价等多种可能价位. 酒店管理者需要基于距顾客入住日的剩余时间、各房间类型的客房余量等已知条件，通过提供合适的定价策略，优化资源配置，使酒店的收益最大化.

传统的酒店收益管理模型大多假设客房需求是独立的，即酒店的定价策略不影响顾客需求[1]. 然而，随着互联网的快速发展和网上订房技术的日益成熟，上述假设已缺乏代表性. 例如，顾客可以在携程网等订房网站上查询酒店的最新价格信息，折价房间的存在会使部分原来打算购买全价房间的顾客选择购买折价房间. 网上订房一方面增加了酒店的潜在客户需求，另一方面也向酒店的定价策略提出了新的挑战. 另外，Cooper 等[2] 的研究指出，不考虑顾客选择行为的收益管理模型存在 "螺旋下降" 效应. 即，若不考虑折价房间的存在对门市价房间需求的影响，按前一阶段门市价房间的销售数量来决定本阶段门市价房间的供应量，那么酒店的收益会逐次降低. 因此，近年来，考虑顾客选择行为的酒店收益管理研究得到越来越多的重视.

在酒店收益管理中，酒店定价决策问题和客房分配决策问题本质上属于同一个问题. Bitran 和 Mondschein[3] 首先将航空收益管理中的存量控制思想引入到酒店行业中，对酒店经理的最优客房租赁决策问题做了研究. Baker 和 Collier[4] 研究了将超售和客房分配决策有机集成的酒店收益管理问题，并设计了两种启发式算法来求解该问题.

① 收稿日期：2011 - 09 - 05；修订日期：2012 - 10 - 22.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(71101135；71090401；71090400).
通讯作者：孙燕红(1985—)，女，安徽潜山人，博士，副教授. Email：yahosun@ mail. ustc. edu. cn

其研究结果表明，算法的选择与酒店的客房需求高低等条件相关. Lai 等[5] 提出一种随机规划的鲁棒优化技术解决了顾客申请多天居住情形下的酒店预订决策问题. 文献[6－8]系统介绍了关于传统酒店收益管理的相关研究. 然而，上述研究均没有考虑各类客房需求间的相关性.

关于客房需求间的相关性，一些学者进行了初步研究. Baker 和 Murthy 等[9] 在考虑客房需求与客房余量相关的条件下，提出一个新的预测—房间分配方法. 针对需求与定价策略间的相关性，Talluri 和 Van Ryzin[1] 提出了一个允许顾客在不同价位间选择的一般收益管理模型. 然而，Talluri 和 Van Ryzin[1] 的模型只考虑了单房间类型具有多种可能价位的情形，其研究结果表明，最优定价策略具有"按价格序嵌套"的性质，即低价位房间将随着客房余量的减少而逐渐依次关闭. Bodea[10] 收集了美国五个酒店的历史数据，分别运用 Talluri 和 Van Ryzin[1] 的模型和传统收益管理模型实验，发现考虑顾客选择行为的收益管理模型能比传统模型多获得 1%～14%的收益. 然而，Bodea[10] 仅对 Talluri 和 Van Ryzin[1] 的模型在酒店行业中的运用做了实证研究，并没有针对酒店行业中存在的多房间类型、多天居住情形等特点进行理论研究.

关于顾客行为对企业运营绩效的影响，目前已有较多研究. 例如，Su 和 Zhang[11]，杨道箭、齐二石等[12]，黄松、杨超等[13] 研究了考虑顾客策略性行为对供应链最优定价和库存决策以及供应链协调等问题的影响. Shen 和 Su[14] 对收益管理和拍卖机制设计中关于顾客行为建模的相关研究做了详细的总结和评述. 官振中，史本山[15] 在考虑缺货时消费者存在替代行为下，选用多项 logit 选择模型描述顾客的选择行为，研究了易逝性高科技产品收益管理的最优定价策略问题. Zhang 和 Cooper[16]，Liu 和 Van Ryzin[17]，Bront 和 Mendez－Diaz 等[18] 研究了考虑顾客选择行为下的航空收益管理的建模和算法设计等问题. 其中，航空收益管理中特殊的平行航班问题[17－18] 与酒店多房间类型问题有相似之处，但也存在本质的区别. 一般平行航班问题的规模通常比较大，大多只能用近似算法求得满意解. 而酒店多房间类型问题的规模比平行航班问题小很多，并且可以依据各房间类型的需求间是否存在相关性分割成若干子问题，再次缩小了问题求解的规模，从而可以设计算法求得最优定价策略.

本文建立了一个多房间类型的联合动态定价模型，研究了酒店多个房间类型的客房需求存在相关性的综合定价决策问题. 本文在 Talluri 和 Van Ryzin[1] 的基础上进行了以下几个方面的创新：1) Talluri 和 Van Ryzin[1] 研究的是单房间类型内存在需求相关性时的定价问题，而本文重点考虑不同房间类型的需求间存在相关性时的定价问题；2) 单房间类型问题中一般只考虑价格因素对顾客选择行为的影响，而在多房间类型问题中，不同房间类型的服务质量水平也存在明显的差异，因此，本文同时考虑价格因素和服务质量因素对顾客选择行为的影响，并采用了嵌套 Logit 模型(Nested Logit model)来刻画顾客的选择行为；3) 由于多房间类型模型下顾客选择概率计算公式的复杂性，Talluri 和 Van Ryzin[1] 中得到的最优定价策略存在价格序嵌套性质在多房间类型问题中不一定成立，本文研究了多房间类型问题的最优定价策略，并在此基础上设计了求解最优定价策略的算法. 基于对已有相关文献的回顾发现，本文是首篇关于酒店行业中多房间类型联合定价问题的理论研究.

1 数学模型的建立

1.1 问题描述

假定某酒店设有标准间、商务间、豪华套房等多个房间类型，酒店对每一房间类型都设有门市价和带有限制条件的折扣价等多种可能价位. 标准间和商务间因为价格和服务水平较为接近，其需求状况相互影响；而豪华套房由于价格昂贵、服务水平高，其定价决策不影响其他房间类型的需求. 本文首先将酒店的房间类型按照需求是否相关进行归类，即将需求相关的房间类型归为一类，再分别研究每一类的综合定价决策. 将酒店房间类型按需求是否相关归类的方法包括经验法、观察法和问卷调查法等[19].

酒店的定价策略与顾客选择行为、客房需求之间的关系如图 1 所示. 酒店管理者给出定价策

略后，顾客可以在不同房间类型和价位之间选择购买使其效用最大化的房间类型. 微观上的顾客选择行为决定了宏观上各房间类型各价位的需求状况. 本文采用 Nested Logit（NL）选择模型来描述顾客的选择行为. 在已知当前至入住日的剩余时间、各房间类型的客房余量等条件下，酒店管理者通过定价策略使得酒店的收益最大化.

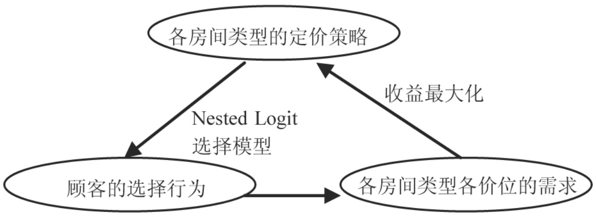

图 1　定价策略、顾客选择行为和房间需求的关系

Fig. 1 The relation of pricing strategies, customer choice and demands for rooms

1.2　假设和符号说明

假定酒店所有的房间类型按需求是否相关归类后，其中某一类包含 m 种房间类型. 对房间类型 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$，酒店设有门市价、带有限制要求的折扣价等 n_i 种价位，记全部价位构成的集合为 $N_i = \{1,\cdots,n_i\}$. 房间类型 i 的客房总数记为 c_i，房间类型 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 对应的价位 $j(1 \leqslant j \leqslant n_i)$ 为酒店带来的收益记为 r_{ij}. 假定 $r_{i1} \geqslant r_{i2} \geqslant \cdots \geqslant r_{in_i}$.

本文先考虑顾客申请入住一天的情形. 将客房预订期均匀分割成 T 个时间阶段，t 为从当前到预订截止时的总时间段数，预订截止后 $t = 0$. 假定顾客在各时间阶段的到达率为 λ，并且 T 足够大，保证在每个时间阶段上至多有一位顾客到达. 记 $x_i(t)$ 为 t 时房间类型 i 的客房余量，$X(t) = (x_1(t),\cdots,x_m(t))$ 为所有房间类型的客房余量状态，$C = (c_1,\cdots,c_m)$ 为初始客房余量状态. 为方便描述，简记 $X(t)$ 为 X.

给定时间阶段 t 和客房余量 X，酒店需要为房间类型 i 制定价位组合 $S_i^X(t)$，$S_i^X(t) \subset N_i$. 记 $S^X(t) = (S_1^X(t),\cdots,S_m^X(t))$ 为 t 时间段酒店对所有 m 种房间类型的定价策略，$N = (N_1,\cdots,N_m)$ 为包含所有价位的定价策略. 同样，在模型中可简记 $S^X(t)$ 为 S. 记 $P_{ij}(S)$ 为顾客选择购买第 i 种房间类型第 j 种价位的概率，假定 $P_{ij}(S)$ 与 t 无关. 当 $j \notin S_i$ 时，$P_{ij}(S) = 0$. 记 $P_0(S)$ 表示没有任何房间卖出的概率，则 $P_0(S) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j \in S_i} P_{ij}(S) = 1$.

1.3　模型建立

1.3.1　嵌套 Logit 选择模型

顾客在多房间类型多价位间的选择行为与在单房间类型多价位间的选择行为存在一些区别. 在单房间类型中，顾客在各价位间选择的主要决定因素是价格. 而当考虑多房间类型需求的相关性时，不同房间类型的服务质量差异也成为决定顾客选择的一个主要因素. 因此，本文选用嵌套 Logit 选择模型来刻画顾客在多房间类型多价位间的选择行为.

在嵌套 Logit 选择模型中，各房间类型各价位作为一个基本选项，其分别对应一个随机效用. 假定第 i 个房间类型第 j 个价位对应的随机效用为 $U_{ij} = W_i + Y_{ij} + \varepsilon_{ij}$. 其中 W_i 和 Y_{ij} 为可观测部分的效用，W_i 与基本选项对应的质量水平有关，Y_{ij} 与基本选项对应的价位有关. 假定可观察部分的效用与各房间类型的服务质量水平和价格呈线性关系，即 $W_i = \alpha Z_i$，$Y_{ij} = \beta x_{ij}$. 其中 Z_i 为第 i 个房间类型的质量水平，x_{ij} 为第 i 个房间类型第 j 个价位的价格. ε_{ij} 表示不可观测部分的随机效用，假定 $[\varepsilon_0,\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{mn_m}]$ 服从参数为 θ_i，累积分布为 $\exp\left(-\sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n_i} e^{-\varepsilon_{ij}/\theta_i}\right)^{\theta_i}\right)$ 的广义极值分布. 不失一般性，假定顾客放弃购买时的效用为 0. 假定顾客均追求自身期望效用最大化，则由 Train[20] 知，在定价策略 S 下，顾客选择房间类型 i 价位 j 的概率为

$$P_{ij}(S) = P_{j|i} \cdot P_i = \frac{e^{x_{ij}\beta/\theta_i}}{\sum_{j \in S_i} e^{x_{ij}\beta/\theta_i}} \cdot \frac{e^{Z_i\alpha+\theta_i I_i}}{\sum_{i=1}^{m} e^{Z_i\alpha+\theta_i I_i} + 1},\ j \in S, i = 1,\cdots,m;$$

$$P_0(S) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} e^{Z_i\alpha+\theta_i I_i} + 1};$$

其中 $I_i = \ln\left(\sum_{j \in S_i} e^{x_{ij}\beta/\theta_i}\right)$.

在嵌套 Logit 选择模型中，尺度参数 θ_i 在 $(0,1)$ 间取值才能满足顾客效用最大化的假设. 对 $\forall i = 0,1,\cdots,m$，当 $\theta_i = 1$ 时，嵌套 Logit 选择模型转化为 MNL 选择模型.

1.3.2　随机动态规划方程

定义价值函数 $V_t(X)$ 为时间阶段 t 至顾客入

住日期间，酒店在房间余量为 X 下卖出客房能获得的最大收益. 其中 t 阶段有房间卖出的概率为 $\lambda\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in S_i}P_{ij}(S)$，此时酒店期望收益为 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in S_i}\lambda\cdot P_{ij}(S)(r_{ij}+V_{t-1}(X-E_i))$，$E_i$ 为单位向量. t 阶段没有房间卖出的概率为 $1-\lambda\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in S_i}P_{ij}(S)$，即 $\lambda P_0(S)+1-\lambda$，此时酒店期望收益为 $(\lambda P_0(S)+1-\lambda)V_{t-1}(X)$. 从而，由 Bellman 方程可得

$$V_t(X)=\max_{S\subseteq\Omega_X}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in S_i}[\lambda P_{ij}(S)(r_{ij}+V_{t-1}(X-E_i))]+(\lambda P_0(S)+1-\lambda)V_{t-1}(X)\Big\} \tag{1}$$

其中策略 Ω_X 与 X 有关. 当 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 的分量均非零时，Ω_X 即为 N；当 X 中存在分量 x_i 为零时，$\Omega_X=(N_1,\cdots,N_{i-1},\phi,N_{i+1},\cdots,N_m)$，即当房间类型 i 的客房余量为 0 时，酒店对该房间类型提供 ϕ 策略. 有多个房间类型的客房余量为 0 时的情况依此类推. 将 $P_0(S)=1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in S_i}P_{ij}(S)$ 代入式(1)，可化简得

$$V_t(X)=\max_{S\subseteq\Omega_X}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in S_i}\lambda P_{ij}(S)(r_{ij}-\Delta V_{t-1}^{i}(X))\Big\}+V_{t-1}(X) \tag{2}$$

其中 $\Delta V_{t-1}^{i}(X)=V_{t-1}(X)-V_{t-1}(X-E_i)$. 为简化符号，记 $\Delta V_t(X)$ 为 $\Delta V_t^i(X)$ $(i=1,\cdots,m)$ 的缩写. $\Delta V_t(X)$ 与 Talluri 和 Van Ryzin [1] 中定义的 $\Delta V_{t-1}(x)$ 的主要区别在于，$\Delta V_{t-1}(x)$ 为 $\Delta V_t(X)$ 的一种特例情形，即当 $m=1$ 时，$\Delta V_t(X)$ 为 $\Delta V_{t-1}(x)$. 动态规划的边界条件为

$$\begin{cases}V_t(\overrightarrow{0})=0,\ t=1,\cdots,T\\ V_0(X)=0,\ 0\leqslant x_i\leqslant c_i,\ i\in M\end{cases}.$$

令 $Q_i(S)=\sum_{j\in S_i}P_{ij}(S)$，$R_i(S)=\sum_{j\in S_i}P_{ij}(S)\cdot r_{ij}$，$R(S)=\sum_{i=1}^{m}R_i(S)$. 易知 $Q_i(S)$ 为本阶段顾客购买房间类型 i 的概率，$R_i(S)$ 为房间类型 i 的期望收益，$R(S)$ 为所有房间类型的期望总收益. 从而式(2)可进一步化简为

$$V_t(X)=\max_{S\subseteq\Omega_X}\Big\{\lambda\sum_{i=1}^{m}(R_i(S)-Q_i(S)\Delta V_{t-1}^{i}(X))\Big\}+V_{t-1}(X) \tag{3}$$

因为 N_i 有 n_i 个价位，故方程(3)解的可能性空间由所有可能的定价策略 $S=(S_1,\cdots,S_m)$ 构成，其中 S_i 有 2^{n_i} 个可能组合. 从而，解的可能性空间由 $\prod_{i=1}^{m}2^{n_i}$ 个可能策略构成. 可分析知，直接求解式(3)需要 $O(\prod_{i=1}^{m}2^{n_i}\cdot\prod_{i=1}^{m}(c_i+1)\cdot T)$ 次计算量.

2 模型求解

本节将 Talluri 和 Van Ryzin [1] 定义的有效集和完备集推广到多房间类型模型上，得到有效策略和完备策略的概念. 在研究有效策略和完备集策略关系的基础上，提出一种减少无效策略的算法，缩小解的可能性空间. 然后，基于最优策略的一些性质，设计一种求解最优策略的算法.

2.1 有效策略

借鉴 Talluri 和 Van Ryzin [1] 对有效集的定义，提出多房间类型模型上有效策略的概念.

定义 1 对于 $\forall S\subseteq N$，若存在概率 $\alpha(S)$ $(\sum_{S\subseteq N}\alpha(S)=1)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m}Q_i(T)\cdot\Delta V_t^i(X)\geqslant\sum_{S\subseteq N}\alpha(S)\sum_{i=1}^{m}Q_i(S)\cdot\Delta V_t^i(X),\ R(T)<\sum_{S\subseteq N}\alpha(S)R(S) \tag{4}$$

则称策略 T 在 $\Delta V_t(X)$ 下是无效的；否则，称 T 是 $\Delta V_t(X)$ 下的有效策略.

式(4)表明，对一个策略 T，若能通过其他策略组合在不增加机会成本 $\sum_{i=1}^{m}Q_i(T)\cdot\Delta V_t^i(X)$ 时增加期望收益 $R(T)$，则称 T 是 $\Delta V_t(X)$ 下的无效策略.

可以证明，最优策略和有效策略存在如下关系(证明见附录 A).

命题 1 $\Delta V_t(X)$ 下的最优策略一定是有效策略.

参照 Talluri 和 Van Ryzin [1]，以及 Bertsimas 等的标准线性规划结果(P213，定理 5.1) [21]，可定义 $\Delta V_t(X)$ 下的有效边界如下.

定义 2 在 $\Delta V_t(X)$ 下的有效边界 $R_{\Delta V_t(X)}$：$[0,M]\to\Re$，定义为

$$R_{\Delta V_t(X)}(q)=\max\left\{\sum_{S\subseteq N}\alpha(S)R(S):\sum_{S\subseteq N}\alpha(S)\sum_{i=1}^{m}Q_i(S)\cdot\Delta V_t^i(X)\leqslant q,\sum_{S\subseteq N}\alpha(S)=1,\forall S\subseteq N\right\}$$

其中 $M=\max\limits_{S\subseteq N}\left\{\sum_{i=1}^{m}Q_i(S)\Delta V_t(X)\right\}$，并且 $R_{\Delta V_t(X)}(q)$ 关于 q 凸增.

可以验证，有效策略与有效边界存在如下关系.

命题 2 $\Delta V_t(X)$ 下的有效策略必定在有效边界 $R_{\Delta V_t(X)}(q)$ 上.

基于有效策略与有效边界的定义及其性质，可得一个判定策略 T 是有效策略的充要条件(证明见附录 B).

命题 3 策略 T 是 $\Delta V_t(X)$ 下的有效策略，当且仅当存在 $v>0$，使得 T 是以下优化问题(5)的最优解.

$$\max_{S\subseteq N}\left\{R(S)-v\sum_{i=1}^{m}Q_i(S)\Delta V_t^i(X)\right\}\tag{5}$$

命题 3 可看成是 Talluri 和 Van Ryzin[1] 的命题 1 在多房间类型模型上的推广. 若称策略 T 是无效的是指，模型中不存在 $\Delta V_t(X)$ 使得策略 T 是 $\Delta V_t(X)$ 下的有效策略. 则由命题 3 得出以下结论.

引理 1 若策略 T 对 $\forall y_{ij}\in\Re$，$y_{i1}\geqslant y_{i2}\geqslant\cdots\geqslant y_{in_i}$，$i=1,\cdots,m$，均不是以下优化问题(6)的最优解，则 T 一定是无效策略.

$$\max_{S\subseteq N}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in S_i}P_{ij}(S)y_{ij}\right\}\tag{6}$$

引理 1 是判定一个策略 T 是无效策略的充分条件. 依据引理 1 可以将无效策略从解的可能性空间中排除，从而提高求解最优策略的效率. 由引理 1，可得以下等价命题.

命题 4 对策略 T，若如下以 u 和 Y 为变量的线性不等式系统无解，则 T 一定是无效策略.

$$u-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}P_{ij}(T)y_{ij}<0$$

$$u-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}P_{ij}(S)y_{ij}\geqslant 0,\ S\subseteq N,\text{且 } S\neq T.$$

$$y_{ij}-y_{ij+1}\geqslant 0,\ j=1,\cdots,n_i-1,\ i=1,\cdots,m\tag{L1}$$

与引理 1 相比，命题 4 的表现形式更适合于实际应用. 但(L1)由 $\prod_{i=1}^{m}2^{n_i}+\prod_{i=1}^{m}(n_i-1)$ 个线性不等式构成，在解决实际问题时常因规模较大而限制了命题 4 的应用.

2.2 一种确定有效策略的算法

依据有效策略的一个性质，本小节将设计一种确定有效策略的算法. Talluri 和 Van Ryzin[1] 中的图 1 指出，有效集都在有效边界上，无效集都在有效边界下面. 在多房间类型模型上，以 $\sum_{i=1}^{m}Q_i(S)\cdot\Delta V_t^i(X)$ 为横坐标，$R(S)$ 为纵坐标，画图的结果是一样的. 即 $\Delta V_t(X)$ 下的有效策略都在有效边界 $R_{\Delta V_t(X)}$ 上，$\Delta V_t(X)$ 下的无效策略都在有效边界 $R_{\Delta V_t(X)}$ 下面. 于是，可得一个确定 $\Delta V_t(X)$ 下有效策略的思路：给定任意一个有效策略(包括空策略$(\phi,\phi,\cdots,\phi)$)，下一个有效策略必定是与之构成最大斜率的策略. 该法则能将处在有效边界 $R_{\Delta V_t(X)}$ 上的有效策略依次确定. 可设计算法如下：

步骤 0 将所有的策略置于集合 Ω 中，置 S_e 为空策略，置集合 Ψ 包含空策略，置 $K_0=0$.

步骤 1 依次检验 Ω 中的策略 T. 若有 $R(T)>R(S_e)$ 且 $\sum_{i=1}^{m}Q_i(T)\cdot\Delta V_t^i(X)>\sum_{i=1}^{m}Q_i(S_e)\cdot\Delta V_t^i(X)$，转入步骤 2；否则，转入步骤 4.

步骤 2 计算 $K=\dfrac{R(T)-R(S_e)}{\sum_{i=1}^{m}Q_i(T)\cdot\Delta V_t^i(X)-\sum_{i=1}^{m}Q_i(S_e)\cdot\Delta V_t^i(X)}$. 若 $K>K_0$，转入步骤 3；否则，返回步骤 1.

步骤 3 令 $K_0=K$，$S_0=T$，返回步骤 1.

步骤 4 若 $K_0\neq 0$，令 $S_e=S_0$，并将 S_e 放入 Ψ 中，置 $K_0=0$，返回步骤 1；否则，算法结束.

当算法结束时，Ψ 中的策略即为 $\Delta V_t(X)$ 下的有效策略. 上述算法为确定模型中的有效策略提供了简单易行的方法. 对给定的 $\Delta V_t(X)$，直接求解最优策略更有效率. 上述算法主要作为研究减少无效策略的工具.

2.3 一种减少无效策略的算法

本小节将定义一种被称为完备策略的特殊策略. 在研究有效策略和完备策略关系的基础上，本

文提出一种减少无效策略的算法.

Talluri 和 Van Ryzin[1] 定义单房间类型上的完备集为: 若将一房间类型的所有可能价位记为 $N=\{1,\cdots,n\}$,价位对应的收益满足 $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_n \geqslant 0$; 若有价位组合 $A_k = \{1,2,\cdots,k\}$,即 A_k 包含了收益为 r_1 到 r_k 间的所有价位,则称 A_k 为完备集; 否则,称之为非完备集. 类似地,可定义多房间类型上的完备策略.

定义 3 称 A 为完备策略,当且仅当 $A(i)$ 都是完备集($i = 1,\cdots,m$); 否则,称之为非完备策略.

完备策略与收益管理实践中常用的投标报价控制[22-23] 具有非常密切的关系. 在酒店定价决策中,管理者可以采用投标报价控制当且仅当全部有效策略都是完备策略[1]. 因此,若能证明所有非完备策略均是无效策略,则酒店就可采用投标报价控制. 基于命题 4 和定义 3,可得一个判定非完备策略是无效策略的条件(证明见附录 C).

定理 1 对非完备策略 T,若下面的线性系统有解,则 T 必定是无效策略

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{l} P_{i1}(A_k)\alpha_k - z_{i1} = P_{i1}(T),\\
&\sum_{k=1}^{l} P_{in_i}(A_k)\alpha_k + z_{in_i-1} = P_{in_1}(T),\ \sum_{k=1}^{l}\alpha_k = 1;\\
&\sum_{k=1}^{l} P_{ij}(A_k)\alpha_k - z_{ij} + z_{ij-1} = P_{ij}(T),\\
&j = 2,\cdots,n_i-1,\ i = 1,\cdots,m;\ \alpha \geqslant 0, z \geqslant 0
\end{aligned} \tag{L2}$$

其中 A_k 为完备策略,$l = \prod_{i=1}^{m}(n_i+1)$.

由有效策略的定义知,一个策略是否有效不仅与选择概率有关,还与所处的时间阶段 t 和库存余量 X 有关. 而定理 1 主要是从选择概率的角度判断一个非完备策略是否有效,即定理 1 是判断非完备策略为无效策略的充分条件.

Talluri 和 Van Ryzin[1] 证明了单房间类型模型上有效集一定是完备集. 然而,在多房间类型联合定价决策下,有效策略却不一定是完备策略. 对一个简单的例子运行 2.2 的算法,其结果表明,有效策略是否为完备策略与模型的属性及参数有关. 在属性和参数不定的情况下,无法从理论上分析性质成立时两者的取值情况. 鉴于求解方程(3) 的复杂性,特别是对时间阶段总数和初始房间余量较大的问题,有效地缩小解的可能性空间是有意义的. 本文提出一个减少无效策略的思路: 将非完备策略逐一代入定理 1 检验,若定理 1 成立,则将该非完备策略从解的可能性空间中删除. 可设计算法如下:

步骤 0 将所有的非完备策略放在集合 Ω 中,置集合 Ψ 为空集.

步骤 1 检验 Ω. 若 Ω 非空,转入步骤 2; 否则,算法停止.

步骤 2 在 Ω 中选一策略 T,检验定理 1 的线性系统. 若有解,转入步骤 3; 否则,转入步骤 4.

步骤 3 将 T 从 Ω 中删除,并将其放入 Ψ 中,返回步骤 1.

步骤 4 将 T 从 Ω 中删除,返回步骤 1.

算法结束时,可将 Ψ 中的策略从解的可能性空间中删除. 假定 Ψ 中包含 κ 个策略,则运用该算法可以将求解最优定价策略时的计算量减少 $O(\kappa \cdot T \cdot \prod_{i=1}^{m}(c_i+1))$ 次. 这对房间类型和价位不多、初始房间余量和总时间阶段数大的问题,可以显著地提高求解最优策略的效率. 当 Ψ 为空集时,所有非完备策略均是无效策略. 从而,可以将求解最优策略的计算量从 $O\left(\prod_{i=1}^{m}2^{n_i}\cdot\prod_{i=1}^{m}(c_i+1)\cdot T\right)$ 次大幅减少至 $O\left(\prod_{i=1}^{m}(n_i+1)\cdot\prod_{i=1}^{m}(c_i+1)\cdot T\right)$ 次.

2.4 求解最优策略的算法

在研究多房间类型模型上的最优策略时发现,部分时间阶段和客房余量下的最优策略是相同的.

引理 2 在时间阶段 t 下,若 X' 和 X'' 满足 $\Delta V_{t-1}^{i}(X') = \Delta V_{t-1}^{i}(X'')$,$i = 1,\cdots,m$,则两种情形下的最优策略相同.

由方程(3),可立即证得引理 2. 从时间阶段 0 到 c_m,存在大量满足引理 2 的客房余量状态. 其中部分客房余量具有简明的表现形式,可以在求解最优策略时得到应用. 而另一部分客房余量的表现形式较为复杂而难于应用. 但在证明前一部分客房余量具有相同最优策略时需要用到. 因此,

先定义后一部分客房余量的表现形式.

定义 4　集合 $\Im(t,k,W(k),\mathrm{A}(W)) = \{X \mid x_i = a_i, \forall i \in W; x_j \geqslant t, \forall j \notin W\}$. 其中 $\mathrm{A}(W) = \{a_i \mid a_i \leqslant \min(c_i,t), i \in W\}$, $W(k) \in \{1,\cdots,m\}$, $|A| = |W| = k$, $k \in \{1,\cdots,m\}$.

$\Im(t,k,W(k),\mathrm{A}(W))$ 是由 k 个分量相同、其它分量大于等于 t 的客房余量 X 构成的集合. 易知集合 $W(k)$ 和 $\mathrm{A}(W)$ 分别有 C_m^k 和 $\prod_{i\in W}\min(c_i,t)$ 种取值. 因此，给定 t 后，$\Im(t,k,W(k),\mathrm{A}(W))$ 可表示 $\sum_{k=1}^{m} C_m^k \cdot \prod_{i\in W}\min(c_i,t)$ 个集合.

基于引理2 和定义 4，可证得部分最优策略存在如下性质(证明见附录 D).

定理 2　在 $1 \leqslant t \leqslant c_m$ 下的最优策略和最大收益存在如下的性质：

1) 当 $1 \leqslant t \leqslant c_m$ 时，对每个集合 $\Im(t,k,W(k),\mathrm{A}(W))$，其包含的 X 在 t 时的最优策略相同，最大收益相等.

2) 当 $1 \leqslant t \leqslant c_m$ 时，对任意 X，若满足 $x_i \geqslant \min(t,c_i)$，$i = 1,\cdots,m$；则 X 在 t 时的最优策略相同，最大收益相等.

在动态规划运算过程中，需要不断存储各个时间阶段和各可能客房余量下的最优策略和最大收益. 因此，对于规模较大的问题，其空间复杂度较高. 本文采用一种简单有效的方法. 将方程(3)依据 t 分成 D 部分($d = 1,\cdots,D$). d 的大小与 t 同向. 记 $t(d)$ 表示第 d 部分包含的最大时间阶段. 每次将前一部分的运算结果存至磁盘后将其在内存中清除，再求后一部分的最优策略和最大收益，减少空间复杂度.

在上述研究的基础上，提出一种求解最优定价策略的算法. 首先，运用 2.3 设计的算法将确定的无效策略从解的可能性空间中排除. 将所有的时间阶段划分成 D 部分. 为了利用定理 2 的性质 2，特别将 t 从 0 到 c_m 构成第一部分. 再将时间阶段 $c_m + 1$ 到 T 细分成 $D - 1$ 部分. 然后，从 $d = 1$ 到 $d = D$ 依次求解最优策略. 可设计算法如下：

步骤 0.1　运行 2.3 的算法，删除确定的无效策略.

步骤 0.2　初始化，置 $V_0(X) = 0$，$d = 1$，$t = 1$，$X = C$.

步骤 1　若 $t \leqslant t(d)$，计算 S_t^C 和 $V_t(C)$，给定一个 X；否则，$d = d + 1$，转入步骤 5.

步骤 2　判断 X，若 $x_i \geqslant \min(t,c_i)$，$i = 1,\cdots,m$，转入步骤 3；否则，转入步骤 4.

步骤 3　$S_t^X = S_t^C$，$V_t(X) = V_t(C)$. 若 t 时还有新的 X，给定新的 X，返回步骤 2；否则，$t = t + 1$，置 $X = C$，返回步骤 1.

步骤 4　按方程(3)求 S_t^X 和 $V_t(X)$. 若 t 时还有新的 X，给定新的 X，返回步骤 2；否则，$t = t + 1$，置 $X = C$，返回步骤 1.

步骤 5　若 $d \leqslant D$，第 $d - 1$ 部分结束，将该部分的最优策略和最大收益存储至磁盘，给定第 d 部分的边界条件，将第 $d - 1$ 部分的运算结果清零；否则，程序结束.

步骤 6　若 $t \leqslant t(d)$，依方程(3)求解 d 部分中的各时间阶段和各可能客房余量下的最优策略和最大收益；否则，$d = d + 1$，返回步骤 5.

假定步骤 0.1 将解的可能性空间中的策略缩减至 n 个. 对每个阶段 t，均有 $\prod_{i=1}^{m}(c_i + 1)$ 种可能客房余量，需要 $O(n\prod_{i=1}^{m}(c_i + 1))$ 次计算量方能求得最优策略. 通过运用定理 2 的性质 2，在 t 时可减少 $O(n\prod_{i=1}^{m}\max((c_i - t),1))$ 次计算量($t = 1,\cdots,c_m$). 通过将酒店房间类型按需求是否相关划分为若干类，对每一类的多房间类型联合定价问题的规模通常不是非常大. 因此，运用本小节设计的算法最终可求得酒店的最优综合定价策略和最大收益.

3　数值模拟

假定对某酒店的所有房间类型按需求是否相关归类后，其中一类包含商务间和标准间两种房间类型. 商务间和标准间拥有的房间总数分别为 70 间和 100 间. 对每个房间类型，酒店都设置了门市价和折扣价两个价位，分别为 580，410 和 420，350. 在预定期内，假定顾客到达服从齐次泊松分布，均值为 200. 将预定期分成 400 个阶段，于是到达率 $\lambda = 200/400 = 0.5$. 定义商务间的服务质

量水平为 5，假定客房服务质量水平与门市价间呈正比例关系，则标准间的服务质量水平为 $5 \times 420/580 \approx 3.6$ 为分析多房间类型综合定价决策的效果，分别讨论顾客在高低价格敏感度两种情形下综合定价和单独定价的结果.

在实际应用中，酒店管理者可以根据历史购买数据采用两阶段最大似然法标定 Nested Logit 模型的参数. 参考 Talluri 和 Van Ryzin[1] 的做法，本文假定高低价格敏感度情形下顾客与价格相关的选择参数 β 分别为 $\beta^H = -0.000\,5$（H 表示高价格敏感度），$\beta^L = -0.000\,1$（L 表示低价格敏感度）. 由于服务质量水平与顾客效用通常呈正相关，假定 $\alpha = 0.000\,1$. 假定尺度参数 $\theta_B = 0.7$（B 表示商务间），$\theta_S = 0.8$（S 表示标准间）. 根据 2.4 节的算法，先要运行 2.3 构造的减少无效策略的算法. 对高低价格敏感度两种情形，算法运行的结果都表明所有的 7 个非完备策略都不是有效策略. 因此，解的可能性空间还留下 9 个完备策略. 继续运行 2.4 节的算法（取 $D = 2$），可求得酒店的最大期望总收益以及各阶段各可能客房余量下的最优定价策略.

作为多房间类型综合定价决策的参照，同时还对两个房间类型分别采用 Talluri 和 Van Ryzin[1] 的单房间类型模型求解. 依据 Talluri 和 Van Ryzin[1] 第五节介绍的方法，可以估计高价格敏感度下商务间和标准间的到达率分别为 $\lambda_B^H = 0.234\,6$，$\lambda_S^H = 0.265\,4$. 选择参数分别为 $\beta_B^H = 0.000\,5$，$\beta_S^H = 0.000\,7$. 低价格敏感度下到达率分别为 $\lambda_B^H = 0.24$，$\lambda_S^H = 0.26$. 选择参数分别为 $\beta_B^H = 0.000\,9$，$\beta_S^H = 0.001$. 于是，由单房间类型模型可分别求得两个房间类型在两种情形下的最大期望收益和最优定价策略. 多房间类型模型和单房间类型模型的主要衡量指标如表 1 和表 2 所示.

表 1 顾客高价格敏感度下的酒店经营结果

Table 1 Hotel operating results under customer with high price sensitivity

模型	多房间类型模型			单房间类型模型			增幅		
房间类型	商务间	标准间	总计	商务间	标准间	总计	商务间	标准间	总计
期望收益	32 394	30 634	63 028	33 057	29 643	62 700	−2.01%	3.34%	0.52%
期望出租率	92.24%	79.72%	84.88%	92.96%	76.82%	83.46%	−0.77%	3.78%	1.70%
平均房价	502	384	436	508	386	442	−1.18%	−0.52%	−1.36%

表 2 顾客低价格敏感度下的酒店经营结果

Table 2 Hotel operating results under customer with low price sensitivity

模型	多房间类型模型			单房间类型模型			增幅		
房间类型	商务间	标准间	总计	商务间	标准间	总计	商务间	标准间	总计
期望收益	33 803	32 513	66 316	35 399	29 973	65 372	−4.51%	8.47%	1.44%
期望出租率	92.49%	84.43%	87.65%	94.55%	77.60%	84.58%	−2.18%	8.80%	3.63%
平均房价	522	385	445	535	386	455	−2.43%	−0.26%	−2.20%

数值模拟的结果表明，在高（低）价格敏感度下，采用多房间类型模型可以比采用单房间类型模型多获得 0.52%（1.44%）的收益. 并且，期望出租率总体呈递增，平均房价总体呈递减. 这表明，在对两个房间类型综合定价决策时，酒店通过增加低价位房间的数量来提高总出租率，最终提高了总收益. 在多房间类型模型中，在寻求酒店收益最大化时会将顾客没有购买到意向房间转而购买其他类型房间的行为作为最优定价决策的一个因素. 与单房间类型模型相比，多房间类型模型中商务间的平均房价下降，但购买标准间的顾客增加，进而使得酒店的总收益增加. 在顾客具有低价格敏感度的情形下，因为顾客对价格的变化相对不敏感，与高价格敏感度情形相比，顾客在不同房间类型之间的选择行为更为普遍，从而使低价格敏感度情形下的酒店收益增幅要更加明显些.

为了能从直观上观察运用 2.4 节的算法求解最优定价策略的效率，本文对运用该算法和直接求解最优策略两种方法所耗的运算时间做了比较. 所有的数值实验均在配置为双核 2.99 HZ、内

存1.99 G的计算机上用Matlab7.1编程运行. 结果表明，上述高低价格敏感度下的两个数值例子运用2.4节的算法均可在52 s左右求得最优综合定价策略. 而若采用直接法，则需用时约348 s方能得到相同的最大收益和最优策略. 采用2.4节的算法可以比直接求解法节省5.7倍的运算时间. 随着房间类型和价位以及时间阶段总数和初始客房余量的增加，采用2.4节算法的优势将更加明显.

4 结束语

本文针对酒店经营活动中存在多房间类型这一普遍情况，研究了考虑顾客选择行为的多房间类型的综合定价决策问题. 通过将所有房间类型按需求是否相关进行归类，并采用Nested Logit选择模型来刻画顾客在多房间类型多价位间的选择行为，本文建立了一个随机动态规划模型以描述酒店管理者的动态价格决策过程，并设计了一种求解最优定价策略的算法. 研究结果表明，与对每个房间类型单独定价决策的情形相比较，多房间类型综合决策能获得更高的总收益和期望客房出租率，并为顾客提供更低的平均房价.

本文主要考虑了顾客申请单天居住情形下的综合定价决策问题. 当酒店面对的多天居住情况不频繁时(例如，靠近机场、车站的酒店以单天居住为主)，可以采用本文的方法对每一目标天的客房收益最大化来近似求解. 考虑多天居住申请的酒店多房间类型联合定价问题是后续值得探讨的问题.

参 考 文 献:

[1] Talluri K, Van Ryzin G. Revenue management under a general discrete choice model of consumer behavior [J]. Management Science, 2004, 50(1): 15－33.

[2] Cooper W L, Homem-de-Mello T, Kleywegt A J. Models of the spiral-down effect in revenue management [J]. Operations Research, 2006, 54(5): 968－987.

[3] Bitran G R, Mondschein S V. An application of yield management to the hotel industry considering multiple day stays [J]. Operations Research, 1995, 43(3): 427－443.

[4] Baker T K, Collier D A. A comparative revenue analysis of hotel yield management heuristics [J]. Decision Sciences, 1999, 30(1): 239－263.

[5] Lai K K, Ng W L. A stochastic approach to hotel revenue optimization [J]. Computers & Operations Research, 2005, 32(5): 1059－1072.

[6] Bitran G R, Gilbert S M. Managing hotel reservations with uncertain arrivals [J]. Operations Research, 1996, 44(1): 35－49.

[7] Badinelli R D. An optimal dynamic policy for hotel yield management [J]. European Journal of Operational Research, 2000, 121(3): 476－503.

[8] 陈 旭. 酒店收益管理的研究进展与前景 [J]. 管理科学学报, 2003, 6(6): 72－78.
Chen Xu. Hotel revenue management: Research overview and prospects [J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(6): 72－78. (in Chinese)

[9] Baker T, Murthy N N, Jayaraman V. Service package switching in hotel revenue management systems [J]. Decision Sciences, 2002, 33(1): 109－132.

[10] Bodea T D. Choice-based Revenue Management: A Hotel Perspective [D]. Atlanta: GIT, 2008.

[11] Su X, Zhang F. Strategic customer behavior, commitment, and supply chain performance [J]. Management Science, 2008, 54(10): 1759－1773.

[12] 杨道箭, 齐二石, 魏 峰. 顾客策略行为与风险偏好下供应链利润分享 [J]. 管理科学学报, 2011, 14(12): 50－59.
Yang Daojian, Qi Ershi, Wei Feng. Supply chain profit sharing under strategic customer behavior and risk preference [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(12): 50－59. (in Chinese)

[13] 黄 松, 杨 超, 张 曦. 考虑战略顾客行为时的供应链性能分析与协调 [J]. 管理科学学报, 2012, 15(2): 47

-58.

Huang Song, Yang Chao, Zhang Xi. Supply chain performance analysis and coordination with consideration of strategic customer behavior [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(2): 47-58. (in Chinese)

[14] Shen Z J M, Su X. Customer behavior modeling in revenue management and auctions: A review and new research opportunities [J]. Production and Operations Management, 2007, 16(6): 713-728.

[15] 官振中，史本山. 易逝性高科技产品收益管理定价策略 [J]. 管理科学学报，2008，11(5): 102-109.

Guan Zhenzhong, Shi Benshan. Optimal pricing policy for high technology perishable commodity with revenue management [J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(5): 102-109. (in Chinese)

[16] Zhang D, Cooper W L. Revenue management for parallel flights with customer-choice behavior [J]. Operations Research, 2005, 53(3): 415-431.

[17] Liu Q, Van Ryzin G. On the choice-based linear programming model for network revenue management [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2008, 10(2): 288-310.

[18] Bront J J M, Mendez-Diaz I, Vulcano G. A column generation algorithm for choice-based network revenue management [J]. Operations Research, 2009, 57(3): 769-784.

[19] Bryman A, Bryman A. Social Research Methods [M]. Oxford: Oxford University Press, 2001.

[20] Train K. Discrete Choice Methods with Simulation [M]. New York: Cambridge University Press, 2003.

[21] Bertsimas D, Tsitsiklis J N. Introduction to Linear Optimization [M]. Belmont: Athena Scientific, 1997: 213-214.

[22] Adelman D. Dynamic bid prices in revenue management [J]. Operations Research, 2007, 55(4): 647-661.

[23] Chaneton J M, Vulcano G. Computing bid prices for revenue management under customer choice behavior [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2011, 13(4): 452-470.

Joint pricing of multiple types of rooms in hotel under customer choices

CHEN Wu-hua, SUN Yan-hong, HUA Zhong-sheng

School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

Abstract: This paper studies the joint optimal pricing problem when the demands for multiple types of rooms depend on the manager's pricing strategies. First, we present an idea that all room types are classified by whether their demands have interactive impacts. Second, under the assumption of customers staying at the hotel only for a single night, we describe the dynamic pricing process of the hotel manager with a stochastic and dynamic model, and describe the customer's choice behavior with a Nested Logit (NL) discrete choice model. We also design an algorithm to solve the optimal price strategy. Experimental results show that, compared to cases that do not consider the influence of pricing strategies among different types of rooms, the model that consider the interactive impacts of demands between different types of rooms can achieve more benefit, higher expectation of room occupancy rate and lower average room price.

Key words: customer choice behavior; hotel revenue management; dynamic pricing; nested Logit model

附录 A　命题 1 证明

证明　命题 1 等价的结论是 $\Delta V_t(X)$ 下的无效策略一定不是最优策略. 采用反证法. 假定策略 T 是 $\Delta V_t(X)$ 下的最优策略，同时也是 $\Delta V_t(X)$ 下的无效策略. 因为 T 是 $\Delta V_t(X)$ 下无效策略，由定义 1，必定存在一组权重 $\alpha(S)$，$S \subseteq N$，满足 $\sum_{S \subseteq N} \alpha(S) = 1$ 并且有 $\sum_{i=1}^{m} Q_i(T) \cdot \Delta V_t^i(X) \geq \sum_{S \subseteq N} \alpha(S) \sum_{i=1}^{m} Q_i(S) \cdot \Delta V_t^i(X)$，$R(T) < \sum_{S \subseteq N} \alpha(S) R(S)$. 而又因为 T 是最优策略，对 $\forall S \subseteq N$，均有 $R(T) - \sum_{i=1}^{m} Q_i(T) \Delta V_{t-1}^i(X) > R(S) - \sum_{i=1}^{m} Q_i(S) \Delta V_{t-1}^i(X)$. 将不等式两边同乘以 $\alpha(S)$，累加求和得 $R(T) - \sum_{S \subseteq N} \alpha(S)$

$R(S) > \sum_{i=1}^{m} Q_i(T)\Delta V_{t-1}^i(X) - \sum_{S\subseteq N}\alpha(S)\sum_{i=1}^{m} Q_i(S)\cdot\Delta V_t^i(X)$.

由假设知 $R(T) - \sum_{S\subseteq N}\alpha(S)R(S) < 0$, $\sum_{i=1}^{m} Q_i(T)\Delta V_{t-1}^i(X) - \sum_{S\subseteq N}\alpha(S)\sum_{i=1}^{m} Q_i(S)\cdot\Delta V_t^i(X) \geqslant 0$. 矛盾,原命题成立. 证毕.

附录 B　命题3证明

先证存在性. 假设 $\exists v > 0$,使得 $R(T) - v\sum_{i=1}^{m} Q_i(T)\cdot\Delta V_t^i(X) \geqslant R(S) - v\sum_{i=1}^{m} Q_i(S)\cdot\Delta V_t^i(X), \forall S\subseteq N$. 这等价于 $(R(T)-R(S)) - v(\sum_{i=1}^{m} Q_i(T)\cdot\Delta V_t^i(X) - \sum_{i=1}^{m} Q_i(S)\cdot\Delta V_t^i(X)) \geqslant 0, \forall S\subseteq N$. 将该式两边同乘以 $\alpha(S)$, $\sum_{S\subseteq N}\alpha(S) = 1, \alpha(S)\geqslant 0, \forall S\subseteq N$. 累加求和得

$$(R(T) - \sum_{S\subseteq N}\alpha(S)R(S)) - v(\sum_{i=1}^{m} Q_i(T)\cdot \Delta V_t^i(X) - \sum_{S\subseteq N}\alpha(S)\sum_{i=1}^{m} Q_i(S)\cdot\Delta V_t^i(X)) \geqslant 0 \quad \text{(B1)}$$

若 T 是无效的,则存在满足上述条件的 $\alpha(S)$,使得 $R(T) < \sum_{S\subseteq N}\alpha(S)R(S)$, $\sum_{S\subseteq N}\alpha(S)\sum_{i=1}^{m} Q_i(S)\cdot\Delta V_t^i(X) \leqslant \sum_{i=1}^{m} Q_i(T)\cdot\Delta V_t^i(X)$. 而这与(B1)矛盾,所以 T 是 $\Delta V_t(X)$ 下的有效策略.

再证唯一性. 若 T 是 $\Delta V_t(X)$ 下有效策略,其必在有效集边界 $R_{\Delta V_t(X)}(q)$ 上. 因为 $R_{\Delta V_t(X)}(q)$ 关于 q 是凸函数,即存在唯一支撑超平面 (u,v),使得 $R(T) = v\sum_{i=1}^{m} Q_i(T)\cdot\Delta V_t^i(X) + u$,并有 $R(S) \leqslant v\sum_{i=1}^{m} Q_i(S)\cdot\Delta V_t^i(X) + u, \forall S\subseteq N$. 于是有 $(R(T) - \sum_{S\subseteq N}\alpha(S)R(S)) - v(\sum_{i=1}^{m} Q_i(T)\cdot\Delta V_t^i(X) - \sum_{S\subseteq N}\alpha(S)\sum_{i=1}^{m} Q_i(S)\cdot\Delta V_t^i(X)) \geqslant 0$. 又因 $R_{\Delta V_t(X)}(q)$ 关于 q 递增,所以,必有 $v > 0$. 证毕.

附录 C　定理1证明

假设策略 T 非完备. 依据命题4,若线性系统(L1)无解,则 T 一定是无效策略. 显然,若如下线性系统(C1)无解,则(L1)一定无解.

$$\begin{aligned}
&u - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} P_{ij}(T)y_{ij} < 0\\
&\alpha_k: u - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} P_{ij}(A_k)y_{ij} \geqslant 0,\ k = 1,\cdots,l \qquad \text{(C1)}\\
&z_{ij}: y_{ij} - y_{ij+1} \geqslant 0, j = 1,\cdots,n_i - 1, i = 1,\cdots,m
\end{aligned}$$

其中 A_k 为完备策略, $l = \prod_{i=1}^{m}(n_i + 1)$. 因为房间类型 i 有 n_i 个价位,再加上空集 φ,故房间类型 i 有 $n_i + 1$ 个完备集. 从而, m 个房间类型共有 $l = \prod_{i=1}^{m}(n_i + 1)$ 个完备策略.

在不影响(C1)下,定义 $z_{in_i} \geqslant 0$, $i = 1,\cdots,m$. 依据 Farkas 引理,(B1)无解当且仅当如下以 α 和 z 为变量的对偶系统有解

$$\sum_{k=1}^{l} P_{i1}(A_k)\alpha_k - z_{i1} = P_{i1}(T), \sum_{k=1}^{l} P_{in_i}(A_k)\alpha_k + z_{in_i-1} = P_{in_i}(T), \sum_{k=1}^{l}\alpha_k = 1;$$

$$\sum_{k=1}^{l} P_{ij}(A_k)\alpha_k - z_{ij} + z_{j-1} = P_{ij}(T); j = 2,\cdots,n_i - 1, i = 1,\cdots,m;\ \alpha\geqslant 0, z\geqslant 0$$

证毕.

附录 D　定理2证明

性质1　用归纳法. 当 $t = 1$ 时, A 中元素的值都为0. 对 $\forall X\in\Im(1,k,W,\mathrm{A})$,因为 $x_i = 0, i\in W$; $\Delta V_1^j(X) = V_0(X) - V_0(X - E_j) = 0, j\notin W$. 由方程(3)有 $V_1(X) = \lambda\max_{S\subseteq\Omega_X} R(S)$,不难知此时酒店的最优策略相同,最大收益相等.

假设对 $t = t^* \leqslant c_m$,任意 $X\in\Im(t^*,k,W(k),\mathrm{A}(W))$ 下的最优策略相同,最大收益相等. 现证,对 $t = t^* + 1$,任意 $X\in\Im(t^* + 1,k,W(k),\mathrm{A}(W))$ 下的最优策略相同,最大收益相等. 对任意 $X', X''\in\Im(t^* + 1,k,W(k),\mathrm{A}(W))$,因为有 $x_i' - 1, x_i'' - 1\leqslant\min(t^*, c_i), i\in W$; $x_j' - 1, x_j'' - 1\geqslant t^*, j\notin W$. 由假设知 $V_{t^*}(X' - E_i) = V_{t^*}(X'' - E_i), i = 1,\cdots,m$. 即有 $\Delta V_{t^*+1}^i(X') = \Delta V_{t^*+1}^i(X'')$,由引理2立知最优策略相同. 若 $x_i', x_i''\leqslant\min(t^* + 1, c_i) = \min(t^*, c_i), i\in W$,由假设知 $V_{t^*}(X') = V_{t^*}(X''), i = 1,\cdots,m$. 若 $x_i', x_i'' = \min(t^* + 1, c_i) = t^* + 1, i\in W$,则由后面性质2的情形1知必有 $V_{t^*}(X') = V_{t^*}(X''), i = 1,\cdots,m$. 从而,由方程(3)不难得最大收益亦相等. 证毕.

性质2　分 $1\leqslant t\leqslant c_1$ 及 $c_1 < t\leqslant c_m$ 两种情形证明.

情形1　用归纳法. 当 $t = 1$ 时,对任意客房余量 X,若 $x_i\geqslant 1, i = 1,\cdots,m$. 因为 $\Delta V_1^i(X) = V_0(X) - V_0(X - E_i) = 0$,由引理2知最优策略相同. 又由方程(3)不难知最大收益相等.

假设对 $t = t^*$,当 $x_i\geqslant t^*, i = 1,\cdots,m$ 时,最优策略均相同,最大收益均相等. 现证,对 $t = t^* + 1$,对任意 X 若满足 $x_i\geqslant t^* + 1, i = 1,\cdots,m$,则它们的最优策略相同,最大收益均相等. 假设 X', X'' 满足上述条件. 因为 $X' - E_i\geqslant t^*$,由假设知 $\Delta V_{t^*+1}^i(X') = V_{t^*}(X') - V_{t^*}(X' - E_i) = 0, i = 1,\cdots,m$. 同理可得 $\Delta V_{t^*+1}^i(X'') = 0$. 依引理2立知最优策略相同. 由假设知必有 $V_{t^*}(X') = V_{t^*}(X''), i = 1,\cdots,m$. 故由方程(3)不难得最大收益亦相等.

情形2　假设在 t 时, $c_p < t\leqslant c_{p+1}, p\in\{1,\cdots,m-1\}$,对任意 X,若满足 $x_i = c_i, i = 1,\cdots,p$; $x_j\geqslant t, j = p+1,\cdots,m$. 易知,必有 $X\in\Im(t,p,W(p),\mathrm{A}(W))$. 其中 $\mathrm{A}(W) = \{a_i = c_i, i\in W(p)\}, W(p) = \{1,\cdots,p\}$. 则由性质1立知, X 在 t 时的最优策略相同,最大收益相等. 证毕.