

# 环境效率评价方法的统计属性分析及其实例<sup>①</sup>

宋马林<sup>1</sup>, 吴杰<sup>2</sup>, 曹秀芬<sup>1</sup>

(1. 安徽财经大学统计与应用数学学院, 蚌埠 233030; 2. 中国科学技术大学管理学院, 合肥 230026)

**摘要:** 首先分别构建了考虑期望产出和非期望产出的生产函数, 进行环境效率 DEA 评价方法的凸非参数最小二乘估计, 提出当参数  $\alpha_{11}$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\beta_{12}$  的估计值给定时, 可以得到  $f$  和  $g$  的显性表达式, 然后利用考虑非期望产出的 DEA 及凸非参数最小二乘 CNLSUO, 可以求得拟合曲线之间的数量关系, 即对于每个 DMU 的实际投入, CNLSUO 法得到的产出拟合值不大于 DEA 法得到的产出拟合值. 实证分析表明, 考虑期望产出和非期望产出的 DEA 估计效果较好. 包括考虑非期望产出 DEA 的非参数最小二乘估计在内的环境效率评价方法的统计属性分析, 势必会拓展 DEA 统计属性研究的范畴, 推动统计学与运筹学的进一步融合与发展.

**关键词:** 环境效率评价; 统计属性; 非参数最小二乘估计; 非期望产出

**中图分类号:** X820 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2013)07-0045-10

## 0 引言

当前, 环境问题正在全世界成为阻碍社会经济可持续发展的重大难题之一. 只有健全环境管制政策, 鼓励企业开展清洁生产, 减少无效单元的数量, 才能实现经济增长的优化<sup>[1]</sup>. 由于 DEA 方法具有非常实用以及无需事先确定输入和输出指标权重的优点, 自 1978 年被提出以来深受国际学界重视, 理论模型不断地得到发展和丰富, 被越来越广泛地应用于各类系统的效率评价, 逐渐形成了一个管理科学等学科交叉研究的新领域, 并取得了长足的发展<sup>[2]</sup>. 在国内, 盛昭瀚<sup>[3]</sup>和梁樛<sup>[4]</sup>等人也取得了许多重要成果. 自从 DEA 方法被引进环境效率评价之后, 如何测度非期望产出, 已经成为进行评价工作中的一个需要考虑的很重要的内容.

另外, 传统的 DEA 效率评价公理体系所依据的一些最基本性质(如凸性和单调性等), 在效率

评价过程中的作用相对单一, 一定程度上制约了 DEA 方法的发展. 而且, 传统的体系未能充分考虑参数结构特点, 并把决策单元(decision making units, DMUs)的处理过程看成是一个黑箱, 不考虑中间过程及其可能产生的中间产品<sup>[5]</sup>. 尽管 Banker 等的研究逐渐形成了一些基于 DEA 模型的统计检验方法, 然而, 在一些更为复杂和特殊的模型(如环境效率 DEA 评价模型等)中, 评价体系的参数结构往往会表现出一些新的特点, 难以套用现有研究成果<sup>[6-9]</sup>. 因此, 将 DEA 模型同统计检验方法结合, 并进一步推广至环境效率评价等实际问题中, 有着重要的研究价值.

## 1 文献述评

当考虑非期望产出时, 传统的 DEA 效率模型关于产出最大化的假定是不适用的. 因此, 如何在传统 DEA 效率模型中考虑非期望产出, 成为环境

① 收稿日期: 2011-10-11; 修订日期: 2012-01-19.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71171001; 70901069; 71110107024); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-12-0595); 教育部人文社会科学研究青年基金资助项目(10YJC630208); 安徽高等学校省级自然科学研究重点资助项目(KJ2011A001).

作者简介: 宋马林(1972—), 男, 安徽蚌埠人, 博士, 教授. Email: songml@aufe.edu.cn

效率评价过程中的一个具有重要理论意义和应用价值的课题. 针对这一问题, 在国外, 自从 Färe 等人首次提出考虑非期望产出的 DEA 评价方法<sup>[10]</sup>, 已经被国内外许多学者作为一个重要的研究方向. Färe 等.<sup>[11-13]</sup>, Seiford, Seiford 和 Zhu<sup>[14-16]</sup> 等人为此做出了一些奠基性的研究工作. 国内学者也取得了一些新的成果<sup>[17-19]</sup>.

另一个值得注意的方面, 传统的 DEA 效率模型被认为是一种非参数模型, 不涉及任何统计方法, 极大束缚了 DEA 模型在评价过程中所发挥的作用. Banker 首次提出基于 DEA 模型的统计检验, 并且说明了 DEA 方法具有统计一致性以及应用极大似然估计方法的可行性<sup>[6]</sup>. 随后, 许多学者不断提出了一些基于 DEA 模型的统计检验方法, 但针对考虑非期望产出的非参数 DEA 效率模型的统计属性研究依然非常少见<sup>[20]</sup>. 现有的 DEA 效率模型的统计属性研究大致可分三类.

第一类是针对 DEA 模型效率评价结果的统计检验. Banker 分别提出了用于比较两组 DMU 有效性的统计检验方法和用于测度规模报酬的检验方法<sup>[6,7]</sup>, Banker 则提出用于计算投入资源配置效率的统计检验方法<sup>[9]</sup>, Banker 利用仿真技术构建了用于计算产出水平与生产前沿面误差的统计检验方法<sup>[21]</sup>, 以及 Kuosmanen 和 Johnson、Colliner 等提出的基于 DEA 评价方法的回归模型<sup>[22,23]</sup>. 在国内, 许多学者也认识到, 建立不同的指标体系, 同一决策单元的有效性会不同<sup>[24]</sup>.

第二类是用于提高 DEA 方法对误差数据以及异常数据兼容性的统计方法. 如 Gstach (1998) 提出的 DEA + 模型<sup>[25]</sup>, Copper 等. 提出的基于可变约束条件的 DEA 模型, 以及基于随机 DEA 模型而构建的一系列新的模型和方法<sup>[26]</sup>. 随机 DEA 由于存在广泛的应用空间, 近年来得到了长足的发展<sup>[27-29]</sup>, 同时也是国内学者在统计方法与 DEA 模型相结合方面的主要研究方向. 例如, 田军等人提出了多准则随机 DEA 模型<sup>[30]</sup>; 曾祥云等人讨论了投入产出向量呈单因数对称随机分布时的 DEA 模型<sup>[31]</sup>.

第三类是对 DEA 模型结构的误差进行统计检验. 如 Banker 提出了用于测度变量对效率值影响程度的统计检验<sup>[8]</sup>; Pastor 等基于径向 DEA 模型提出了用于确定边缘变量在效率评价中属于投

入还是产出变量的统计检验<sup>[32]</sup>; 以及 Horský 和 Nelson 基于变量的权重系数而建立的用于筛选、删除冗余变量的显著性检验<sup>[33]</sup>. 在国内, 宋马林及其合作者提出了构建不同的指标体系, 会使 DEA 效率评价结果不尽相同, 并采用了格兰杰因果检验、标准差系数来辨别和删除冗余指标<sup>[34,35]</sup>.

通过以上文献可以看出, 尽管现有的统计方法在 DEA 中有所应用, 但依然有限, 尤其缺乏考虑非期望产出的相关成果. 研究环境效率 DEA 评价模型的统计属性, 以及在实证分析中开展必要的统计检验, 将为包括环境效率评价在内的基于 DEA 的实证研究提供更为稳健和实用的分析工具.

## 2 模型构建

### 2.1 考虑(非)期望产出的生产函数

假设有  $n$  个 DMU, 首先构建生产过程中一个标准的多投入单产出模型

$$y_i = f(X_i) + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

其中  $y_i$  表示第  $i$  个 DMU 的产出,  $f(\cdot)$  是表征生产技术的生产函数,  $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})^T$  表示第  $i$  个 DMU 的投入向量,  $\varepsilon_i$  表示第  $i$  个 DMU 偏离前沿面的干扰项.

根据生产函数  $f$  的具体形式, 可以将模型分为参数模型和非参数模型. 参数模型方法能够有效提取数据特征信息, 根据已有数据建立反映其特性和所遵循变化规律的模型, 然后再估计一些未知参数; 非参数模型一般是基于样本数据本身的特征(如单调性、凸性)进行估计, 并不事先假定模型的线性或非线性特征, 这就相当程度上避免了错误设定模型的问题.

如前所述, 由于在现实生产过程中, DMU 在生产期望产出的同时, 不可避免地带来了非期望产出, 因此仅仅考虑期望产出的情况, 并不能真实反映现实生产过程. 同时考虑和定量分析两种产出, 将更具有现实意义. 因此, 将模型 (1) 写成如下两个表达式(为简便起见, 本文仅考虑一种期望产出和一种非期望产出的情况)

$$\begin{aligned} y_i &= f(X_i) + \varepsilon_{i1} \\ z_i &= g(X_i) - \varepsilon_{i2} \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $y_i$  表示第  $i$  个 DMU 的期望产出,  $z_i$  表示第  $i$  个 DMU 的非期望产出,  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  分别表示考虑期望产出和非期望产出的生产函数,  $\varepsilon_{i1}$  和  $\varepsilon_{i2}$  分别表示第  $i$  个 DMU 偏离两个前沿面的干扰项,  $X_i$  的含义同上.

### 2.2 环境效率 DEA 评价方法的凸非参数最小二乘估计

以往的研究表明,非参数回归不需要对函数的显性或非线性特征作任何先验假设,非参数最小二乘法服从连续性、单调性及凸性约束,因此被称为凸非参数最小二乘 (concave nonparametric least squares, CNLS). 在此基础上,构造了考虑非期望产出的环境效率 DEA 评价方法的凸非参数最小二乘 (concave nonparametric least squares considering undesirable outputs, CNLSUO) 模型如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{i1}^2 + \varepsilon_{i2}^2) \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} y_i = f(X_i) + \varepsilon_{i1} \\ z_i = g(X_i) - \varepsilon_{i2} \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

模型中,回归函数  $f, g \in F$ , 这里  $F$  是连续、单调递增且全局凸性的函数集; 干扰项  $\varepsilon_1 = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \dots, \varepsilon_{n1})'$  和  $\varepsilon_2 = (\varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{n2})'$  均满足高斯马尔可夫假定, 即  $E(\varepsilon_1 | X) = 0, E(\varepsilon_2 | X) = 0, E(\varepsilon_1 \varepsilon_1' | X) = \sigma_1^2 I, E(\varepsilon_2 \varepsilon_2' | X) = \sigma_2^2 I, \sigma_1 < \infty, \sigma_2 < \infty$ , 其中  $X$  表示任一投入向量.

该模型的目的在于找到一个  $f \in F, g \in F$ , 使误差平方和达到最小. 与 CNLS 的性质相同的是, CNLSUO 也不需要设定任何平滑参数或带宽参数, 而且模型 (3) 也可以改写成如下有限空间的形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{i1}^2 + \varepsilon_{i2}^2) \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} y_i = \alpha_{i1} + \beta_{i1}' X_i + \varepsilon_{i1} \\ z_i = \alpha_{i2} + \beta_{i2}' X_i + \varepsilon_{i2} \\ \alpha_{i1} + \beta_{i1}' X_i \leq \alpha_{j1} + \beta_{j1}' X_i \\ \alpha_{i2} + \beta_{i2}' X_i \leq \alpha_{j2} + \beta_{j2}' X_i \\ \beta_{i1} \geq 0, \beta_{i2} \geq 0 \\ i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

对于任意一组实际观测值,模型 (3) 和模型 (4) 等价,这两个最小二乘问题目标函数的最优

值也相等. 在模型 (4) 中,对于每个观测点,前两个约束条件都可以得到参数  $\alpha_{i1}, \beta_{i1}, \alpha_{i2}, \beta_{i2}$  的估计值. 这样对于期望产出和非期望产出,分别可以得到  $n$  条不同的回归线,这一点与 OLS 回归是不一样的. 第 3 个和第 4 个约束条件分别是基于 Afriat 研究结论得到的凸性约束. Afriat 指出,集合  $F$  可以由一系列的分段线性函数近似代替,即利用超平面支持系统,以及 Afriat 不等式的凸性约束,可以近似模拟  $f$  值<sup>[36]</sup>. 最后一个约束条件  $\beta_{i1} \geq 0, \beta_{i2} \geq 0$  这是利用了非参数最小二乘法具有单调性的数学性质,这与 CNLS 的数学性质相似. 进一步,如果给定参数  $\alpha_{i1}, \beta_{i1}, \alpha_{i2}, \beta_{i2}$  的估计值,可以得到  $f$  和  $g$  的显性表达式:

$$\begin{aligned} f^{\text{CNLSUO}}(X) &= \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (\alpha_{i1} + \beta_{i1}' X) \\ g^{\text{CNLSUO}}(X) &= \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (\alpha_{i2} + \beta_{i2}' X) \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.3 考虑非期望产出的 DEA 与非参数最小二乘估计

假设生产函数  $f$  和  $g$  满足单调性和凸性,根据 Afriat 和 Banker 的研究结论<sup>[36, 6]</sup>,可以将期望生产函数和非期望生产函数的 DEA 估计量定义如下:

$$\begin{aligned} f^{\text{DEA}}(X) &= \max y \\ g^{\text{DEA}}(X) &= \min z \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} y = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, z = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \leq X, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

现用模型 (6) 中的  $f^{\text{DEA}}(X)$  和  $g^{\text{DEA}}(X)$  替代模型 (2) 中的  $f$  和  $g$ , 则误差项的 DEA 估计量可以从如下线性规划问题 (7) 中得出:

$$\begin{aligned} \min \quad & (\varepsilon_{i1}^2 + \varepsilon_{i2}^2) \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} y_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j + \varepsilon_{i1} \\ z_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j - \varepsilon_{i2} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \leq X_i \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

基于 Banker 等人利用线性规划问题的乘积形式建立的 BC<sup>2</sup> 模型<sup>[37]</sup>, 构建了一种新的非期望

产出 DEA 模型

$$\begin{aligned}
 & \max \quad h_0 = \alpha - \beta \\
 & \text{s. t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \leq X_i \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq \alpha y_i \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \leq \beta z_i \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (8)
 \end{aligned}$$

模型(7)和模型(8)的不同之处在于模型(7)采用线性规划的加法形式测度效率,二者有如下关系

$$\alpha^{DEA} = \frac{y_i - \varepsilon_{i1}^{DEA}}{y_i}, \beta^{DEA} = \frac{z_i - \varepsilon_{i2}^{DEA}}{z_i}$$

证明 根据模型(7)有

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{i1}^{DEA} &= y_i - f^{DEA}(X_i) \\
 \varepsilon_{i2}^{DEA} &= g^{DEA}(X_i) - z_i
 \end{aligned} \quad (i)$$

再根据模型(8)有

$$\alpha^{DEA} = \frac{f^{DEA}(X_i)}{y_i}, \beta^{DEA} = \frac{g^{DEA}(X_i)}{z_i} \quad (ii)$$

将式(i)代入式(ii)即可得到

$$\alpha^{DEA} = \frac{y_i - \varepsilon_{i1}^{DEA}}{y_i}, \beta^{DEA} = \frac{z_i + \varepsilon_{i2}^{DEA}}{z_i}$$

于是,可以得出 DEA 效率与干扰项之间的关系如下

$$h_0^{DEA} = \alpha^{DEA} - \beta^{DEA} = \frac{y_i - \varepsilon_{i1}^{DEA}}{y_i} - \frac{z_i + \varepsilon_{i2}^{DEA}}{z_i}$$

现在在模型(4)中添加两个约束条件,模型变形为

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{i1}^2 + \varepsilon_{i2}^2) \\
 & \text{s. t.} \quad \begin{cases} y_i = \alpha_{i1} + \beta_{i1} X_i + \varepsilon_{i1} \\ z_i = \alpha_{i2} + \beta_{i2} X_i + \varepsilon_{i2} \\ \alpha_{i1} + \beta_{i1} X_i \leq \alpha_{j1} + \beta_{j1} X_i \\ \alpha_{i2} + \beta_{i2} X_i \leq \alpha_{j2} + \beta_{j2} X_i \\ \varepsilon_{i1} \leq 0, \varepsilon_{i2} \leq 0 \\ \beta_{i1} \geq 0, \beta_{i2} \geq 0 \\ i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (9)
 \end{aligned}$$

定理 1 对于所有的观测值,具有符号约束

的非参数最小二乘模型(9)和 DEA 模型(7)等价,有

$$\varepsilon_{i1}^{DEA} = \varepsilon_{i1}^*, \varepsilon_{i2}^{DEA} = \varepsilon_{i2}^*, (i = 1, 2, \dots, n)$$

其中  $\varepsilon_{i1}^*$  和  $\varepsilon_{i2}^*$  为模型(9)的最优解。

证明 根据对偶理论,线性规划模型(7)的对偶规划模型为

$$\begin{aligned}
 & \max [y_i + z_i - (\alpha_i + \beta_i X_i)] \\
 & \text{s. t.} \quad \begin{cases} y_j + z_j \leq \alpha_i + \beta_i X_j \\ \beta_i \geq 0, \alpha_i \text{ 任意 } i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (10)
 \end{aligned}$$

引入扰动项  $\varepsilon_i$  模型(10)等价于

$$\begin{aligned}
 & \max \varepsilon_i \\
 & \text{s. t.} \quad \begin{cases} y_i + z_i = \alpha_i + \beta_i X_i + \varepsilon_i \\ y_j + z_j \leq \alpha_i + \beta_i X_j \\ \beta_i \geq 0, \alpha_i \text{ 任意 } i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (11)
 \end{aligned}$$

由于效率估计量及 DEA 模型中的系数由每个 DMU 独立决定,因而可以将  $n$  个 DMU 的效率估计模型合并,用以测度所有 DMU 的效率.建模如下

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\
 & \text{s. t.} \quad \begin{cases} y_i + z_i = \alpha_i + \beta_i X_i + \varepsilon_i \\ y_j + z_j \leq \alpha_i + \beta_i X_j \\ \beta_i \geq 0, \alpha_i \text{ 任意 } i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (12)
 \end{aligned}$$

模型(12)中的前两个条件中,可以将期望产出和非期望产出分开来写,模型等价于

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}) \\
 & \text{s. t.} \quad \begin{cases} y_i = \alpha_{i1} + \beta_{i1} X_i + \varepsilon_{i1} \\ z_i = \alpha_{i2} + \beta_{i2} X_i + \varepsilon_{i2} \\ y_i \leq \alpha_{i1} + \beta_{i1} X_i \\ z_i \leq \alpha_{i2} + \beta_{i2} X_i \\ \beta_{i1} \geq 0, \beta_{i2} \geq 0, \alpha_{i1}, \alpha_{i2} \text{ 任意} \\ i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (13)
 \end{aligned}$$

根据条件  $y_i \leq \alpha_{i1} + \beta_{i1} X_i$  和  $z_i \leq \alpha_{i2} + \beta_{i2} X_i$  可知  $\varepsilon_{i1} \leq 0, \varepsilon_{i2} \leq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ . 又因  $\varepsilon_j \leq 0$  并不会影响 DEA 前沿面的形状,故可以把这一条件加入第三和第四个约束条件中<sup>[22]</sup>,于是有

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}) \\ \text{s. t. } & \begin{cases} y_i = \alpha_{i1} + \beta_{i1}' X_i + \varepsilon_{i1} \\ z_i = \alpha_{i2} + \beta_{i2}' X_i + \varepsilon_{i2} \\ y_i \leq \alpha_{i1} + \beta_{i1}' X_j + \varepsilon_{j1} \\ z_j \leq \alpha_{i2} + \beta_{i2}' X_j + \varepsilon_{j2} \\ \varepsilon_{i1} \leq 0 \quad \varepsilon_{i2} \leq 0 \quad \varepsilon_{j1} \leq 0 \quad \varepsilon_{j2} \leq 0 \\ \beta_{i1} \geq 0 \quad \beta_{i2} \geq 0 \quad \alpha_{i1} \quad \alpha_{i2} \text{ 任意} \\ i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

因为  $y_j = \alpha_{j1} + \beta_{j1}' X_j + \varepsilon_{j1}$ ,  $z_j = \alpha_{j2} + \beta_{j2}' X_j + \varepsilon_{j2}$ , 代入模型 (14) 中的第三和第四个约束条件, 有

$$\begin{aligned} \alpha_{j1} + \beta_{j1}' X_j & \leq \alpha_{i1} + \beta_{i1}' X_j \\ \alpha_{j2} + \beta_{j2}' X_j & \leq \alpha_{i2} + \beta_{i2}' X_j \end{aligned}$$

又由于  $i, j$  是对样本中的任一对 DMU 而言, 故可以将上式交换下标, 得到

$$\begin{aligned} \alpha_{i1} + \beta_{i1}' X_i & \leq \alpha_{j1} + \beta_{j1}' X_i \\ \alpha_{i2} + \beta_{i2}' X_i & \leq \alpha_{j2} + \beta_{j2}' X_i \end{aligned}$$

最后将目标函数变为最小化问题, 得到

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n -(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}) \\ \text{s. t. } & \begin{cases} y_i = \alpha_{i1} + \beta_{i1}' X_i + \varepsilon_{i1} \\ z_i = \alpha_{i2} + \beta_{i2}' X_i + \varepsilon_{i2} \\ \alpha_{i1} + \beta_{i1}' X_i \leq \alpha_{j1} + \beta_{j1}' X_i \\ \alpha_{i2} + \beta_{i2}' X_i \leq \alpha_{j2} + \beta_{j2}' X_i \\ \varepsilon_{i1} \leq 0 \quad \varepsilon_{i2} \leq 0 \\ \beta_{i1} \geq 0 \quad \beta_{i2} \geq 0 \\ i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

比较模型 (9) 和模型 (15) 可以看到, 两个模型的不同之处仅仅在于目标函数的表达式不同. 注意到  $\varepsilon_{i1} \leq 0$ ,  $\varepsilon_{i2} \leq 0$ , 这就意味着两个模型实质上是等价的, 从而也就说明模型非参数最小二乘模型 (9) 与 DEA 模型 (7) 是等价的, 它们的最优解相等. 证毕.

根据定理 1, 可以同时得到模型 (9) 中的最优解  $\varepsilon_{i1}^*$ ,  $\varepsilon_{i2}^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 于是有

$$y_i - \varepsilon_{i1}^* = \alpha_{i1} + \beta_{i1}' X_i, \quad z_i - \varepsilon_{i2}^* = \alpha_{i2} + \beta_{i2}' X_i$$

再根据模型 (7), 有

$$f^{\text{DEA}}(X_i) = y_i - \varepsilon_{i1}^{\text{DEA}}, \quad g^{\text{DEA}}(X_i) = z_i - \varepsilon_{i2}^{\text{DEA}}$$

从而得到

$$f^{\text{DEA}}(X_i) = \alpha_{i1} + \beta_{i1}' X_i, \quad g^{\text{DEA}}(X_i) = \alpha_{i2} + \beta_{i2}' X_i$$

又因

$$f^{\text{CNLSUO}}(X) = \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (\alpha_{i1} + \beta_{i1}' X),$$

$$g^{\text{CNLSUO}}(X) = \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} (\alpha_{i2} + \beta_{i2}' X)$$

于是得出, 利用考虑非期望产出的 DEA 及凸非参数最小二乘 CNLSUO 求得的拟合曲线之间具有如下的关系

$$f^{\text{CNLSUO}}(X_i) \leq f^{\text{DEA}}(X_i) \quad (16)$$

$$g^{\text{CNLSUO}}(X_i) \leq g^{\text{DEA}}(X_i)$$

也就是说, 对于每个 DMU 的实际投入, CNLSUO 法得到的产出拟合值不会大于 DEA 法得到的产出拟合值.

### 3 实证分析

本文选取社会消费品零售总量和全社会固定资产投资总额作为投入指标, 地区生产总值作为期望产出指标, 工业废气排放量、工业废水排放量和工业固体废物产生量作为非期望产出指标, 利用 2009 年 30 个地区的最新相关数据进行实证分析 (由于西藏的数据缺失, 将该地区剔除), 各指标数据来源于《中国统计年鉴 2010》, 然后根据全国 30 个地区的相关数据分析 DEA 与非参数最小二乘之间的统计关系. 基于考虑非期望产出的 DEA 评价模型 (8) 的环境效率值的最优解见表 1.

根据表达式

$$\alpha^{\text{DEA}} = \frac{y_i - \varepsilon_{i1}^{\text{DEA}}}{y_i}, \quad \beta^{\text{DEA}} = \frac{z_i - \varepsilon_{i2}^{\text{DEA}}}{z_i}$$

可以得到  $\varepsilon_{i1}^{\text{DEA}}$  和  $\varepsilon_{i2}^{\text{DEA}}$  的值, 见表 2.

表 1 考虑非期望产出 DEA 模型的最优解

Table 1 The optimal solution of DEA model considering undesirable outputs

地区	$\alpha^{\text{DEA}}$	$\beta^{\text{DEA}}$	地区	$\alpha^{\text{DEA}}$	$\beta^{\text{DEA}}$
北京	1	1	河南	1.627 4	0.590 1
天津	1.229 1	0.388 6	湖北	1.668 2	0.696 7
河北	2.164 3	0.793 5	湖南	1.622 5	0.534 2
山西	1.999 7	0.291 7	广东	1	1
内蒙古	2.154 6	0.304 8	广西	1.561 5	0.133 0
辽宁	1.978 3	0.707 2	海南	1	1
吉林	1.721 1	0.363 2	重庆	1.801 6	0.154 4
黑龙江	1.572 9	0.338 4	四川	1.833 9	0.527 9
上海	1	1	贵州	1.624 4	0.125 3
江苏	1	0.833 6	云南	1.927 3	0.233 1
浙江	1	0.707 5	陕西	1.603 0	0.188 5
安徽	1.502 8	0.412 7	甘肃	1.662 4	0.117 3
福建	1	0.290 0	青海	1	1
江西	1.328 5	0.178 2	宁夏	1.436 1	0.094 6
山东	1.164 8	0.673 1	新疆	1.561 9	0.115 9

表 2 干扰项的 DEA 估计量

Table 2 The estimators of DEA of interference terms

地区	$\varepsilon_{i1}^{\text{DEA}}$	$\varepsilon_{i2}^{\text{DEA}}$	地区	$\varepsilon_{i1}^{\text{DEA}}$	$\varepsilon_{i2}^{\text{DEA}}$
北京	0	0	河南	-12 222.040 6	-55.541 5
天津	-1 723.255 8	-14.471 8	湖北	-8 660.607 0	-19.525 3
河北	-20 067.269 4	-25.884 0	湖南	-8 129.657 0	-37.799 7
山西	-7 356.102 5	-89.842 7	广东	0	0
内蒙古	-11 246.092 7	-97.244 8	广西	-4 356.768 3	-77.205 9
辽宁	-14 882.379 0	-30.785 6	海南	0	0
吉林	-5 248.706 6	-23.116 2	重庆	-5 234.456 0	-63.089 5
黑龙江	-4 919.492 3	-32.443 8	四川	-11 800.752 4	-53.597 5
上海	0	0	贵州	-2 443.077 4	-102.820 5
江苏	0	-17.873 9	云南	-5 721.209 2	-38.291 8
浙江	0	-20.513 9	陕西	-4 926.389 4	-65.277 7
安徽	-5 059.585 9	-31.621 6	甘肃	-2 243.919 7	-44.162 0
福建	0	-29.795 6	青海	0	0
江西	-2 514.726 6	-46.367 8	宁夏	-590.178 5	-28.451 7
山东	-5 586.167 9	-51.987 0	新疆	-2 403.274 4	-52.153 1

再由表达式

$$\begin{aligned} f^{\text{DEA}}(X_i) &= y_i - \varepsilon_{i1}^{\text{DEA}} g^{\text{DEA}}(X_i) \\ &= z_i - \varepsilon_{i2}^{\text{DEA}} \end{aligned}$$

得出期望产出和非期望产出的 DEA 估计值。

分别作出期望产出和非期望产出与实际值的折线图,如下图 1 和图 2 所示。

表 3 期望产出和非期望产出的 DEA 估计量

Table 3 The estimators of DEA of desirable and undesirable outputs

地区	$f^{DEA}(X_i)$	$g^{DEA}(X_i)$	地区	$f^{DEA}(X_i)$	$g^{DEA}(X_i)$
北京	12 153.030 0	11.879 4	河南	31 702.500 6	191.041 5
天津	9 245.105 8	38.141 8	湖北	21 621.707 0	83.901 4
河北	37 302.749 4	151.230 3	湖南	21 189.347 0	118.949 9
山西	14 714.412 5	216.685 5	广东	39 482.560 0	107.048 8
内蒙古	20 986.342 7	237.125 1	广西	12 115.928 3	166.255 4
辽宁	30 094.869 0	135.927 5	海南	1 654.210 0	2.203 1
吉林	12 527.456 6	59.416 7	重庆	11 764.466 0	137.698 7
黑龙江	13 506.492 3	81.482 1	四川	25 952.032 4	167.127 4
上海	15 046.450 0	37.890 8	贵州	6 355.757 4	220.369 9
江苏	34 457.300 0	125.289 4	云南	11 890.959 2	88.222 5
浙江	22 990.350 0	90.646 8	陕西	13 096.189 4	145.718 4
安徽	15 122.405 9	85.464 0	甘肃	5 631.479 7	94.192 6
福建	12 236.530 0	71.761 2	青海	1 081.270 0	13.569 8
江西	10 169.906 6	102.790 0	宁夏	1 943.488 5	59.876 3
山东	39 482.817 9	211.017 1	新疆	6 680.324 4	111.143 1

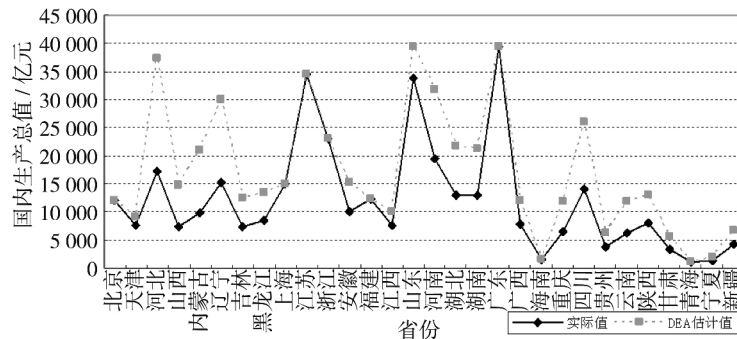


图 1 各省份国内生产总值的实际值与拟合值对比

Fig. 1 The comparison of the actual values and fitted values on GDP of Chinese provinces

图 1 中,北京、上海、江苏、浙江、福建、广东、海南、青海这 8 个地区的 DEA 估计值与实际生产总值一致,误差均为 0;只有河北、内蒙古、辽宁、河南、四川 5 地的拟合误差相对比较大,超过

10 000 亿元;其余 13 个地区的误差相对比较小.可以算出各省份国内生产总值的实际值与拟合值的相关系数为 0.891 7,说明期望产出的 DEA 估计效果较好.

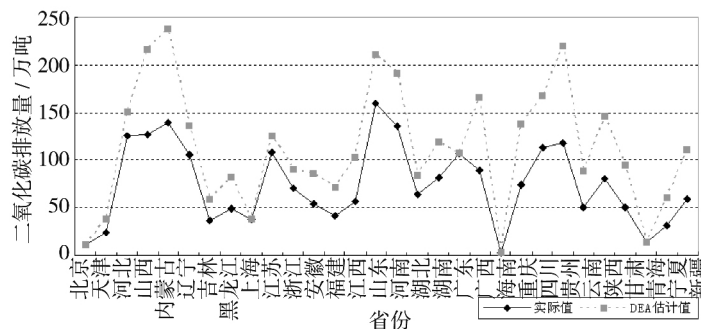


图 2 各省份 SO<sub>2</sub> 排放量的实际值与拟合值对比

Fig. 2 The comparison of the actual values and fitted values on SO<sub>2</sub> emissions of Chinese provinces

类似地,根据图 2 30 个地区的  $\text{SO}_2$  排放量中,北京、上海、广东、海南、青海 5 地的估计值与实际值一致;山西、内蒙古、山东、河南、广西、重庆、四川、贵州、陕西、新疆 10 个地区的误差超过 50 万吨,其中山西、内蒙古、广西、重庆、贵州 5 地超过 80 万吨;其余 15 个地区的误差相对较小,进一步可以算出各省份二氧化硫排放量的实际值与拟合值的相关系数为 0.935 3,这说明了非期望产出的 DEA 拟合效果很好.同时,根据关系式(16),CNLSUO 估计量小于 DEA 估计量,这样可以得出 CNLSUO 的折线图在 DEA 拟合曲线的下方,期望产出和非期望产出可能更接近于实际值.

#### 4 结束语

本文首先分别构建了考虑期望产出和非期望产出的生产函数,进行环境效率 DEA 评价方法的凸非参数最小二乘估计,提出当参数  $\alpha_{i1}$ ,  $\beta_{i1}$ ,  $\alpha_{i2}$ ,  $\beta_{i2}$  的估计值给定时,可以得到  $f$  和  $g$  的显性表达式,然后利用考虑非期望产出的 DEA 及凸非参数最小二乘 CNLSUO,可以求得拟合曲线之间的数量关系,即对于每个 DMU 的实际投入,CNLSUO 法得到的产出拟合值不大于 DEA

法得到的产出拟合值.随后进行的实证分析表明,考虑期望产出和非期望产出的 DEA 估计效果较好.

DEA 效率模型本质上是一种确定性技术,其效率评价结果容易受到一些异常值及极端值的影响,然而,过去的绝大多数研究成果都忽略了对效率评价结果统计属性的研究.因此,考虑非期望产出 DEA 的非参数最小二乘估计势必会拓展 DEA 统计属性研究的研究范畴.下一步的重点研究内容包括:一是在考虑非期望产出 DEA 评价模型中引入没有约束条件的随机因素,分析这些随机因素及其统计干扰对环境效率评价结果的影响;二是研究如何在引入随机因素的这些模型中运用 Bootstrap 等统计分析技术,估计环境效率评价的误差和置信区间,并开展必要的假设检验,找到不同显著性水平下的临界值.

需要说明的是,本文为简便起见,所构建的模型仅考虑一种期望产出和一种非期望产出的情况.这并不影响对考虑非期望产出 DEA 的非参数最小二乘估计的统计属性分析.更进一步的研究可以考虑多投入、多期望产出和多非期望产出的情况,这无疑在增加模型计算的复杂程度的同时,更加贴近生产过程.

#### 参考文献:

- [1] 许士春,何正霞,魏晓平. 资源消耗、污染控制下经济可持续最优增长路径[J]. 管理科学学报,2010,13(1): 20-30.  
Xu Shichun, He Zhengxia, Wei Xiaoping. Sustainable optimal economic growth path under resource consumption and pollution control[J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(1): 20-30. (in Chinese)
- [2] Cook W D, Seiford L M. Data envelopment analysis (DEA): Thirty years on[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 192(1): 1-17.
- [3] 盛昭瀚,朱乔,吴广谋. DEA 理论、方法与应用[M]. 北京: 科学出版社,1996.  
Sheng Zhaohan, Zhu Qiao, Wu Guangmou. Applications, Methods, Theories of DEA[M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)
- [4] Liang L, Wu J, Cook W D, et al. The DEA game cross-efficiency model and its Nash equilibrium[J]. Operations Research, 2008, 56(5): 1278-1288.
- [5] 查勇,梁樑,苟清龙,等. 部分中间产出作为最终产品的两阶段合作效率[J]. 管理科学学报,2011,14(7): 21-30.  
Zha Yong, Liang Liang, Gou Qinglong, et al. Two-stage cooperative efficiency evaluation with part of intermediate outputs as final products[J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(7): 21-30. (in Chinese)
- [6] Banker R D. Maximum likelihood, consistency and data envelopment analysis: A statistical foundation[J]. Management Science, 1993, 39(10): 1265-1273.
- [7] Banker R D. Hypothesis test using data envelopment analysis[J]. Journal of Productivity Analysis, 1996, 7(2/3): 139-



159.

- [8] Banker R D, Natarajan R. Evaluating contextual variables affecting productivity using data envelopment analysis [R]. Working Paper, Texas: The University of Texas at Dallas, 2001.
- [9] Banker R D, Janakiraman S, Natarajan R. Analysis of trends in technical and allocative efficiency: An application to Texas public school districts [J]. *European Journal of Operations Research*, 2004, 154(2): 477–491.
- [10] Färe R, Grosskopf S, Lovell C A K, et al. Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: A nonparametric approach [J]. *The Review of Economics and Statistics*, 1989, 71(1): 90–98.
- [11] Färe R, Grosskopf S, Lovell C A K, et al. Deviation of shadow prices for undesirable outputs: A distance function approach [J]. *The Review of Economics and Statistics*, 1993, 75(2): 374–380.
- [12] Färe R, Grosskopf S, Hernandez-Sancho F. Environmental performance: An index number approach [J]. *Resource and Energy Economics*, 2004, 26(4): 343–352.
- [13] Färe R, Grosskopf S, Noh D W, et al. Characteristics of a polluting technology: Theory and practice [J]. *Journal of Econometrics*, 2005, 126(2): 469–492.
- [14] Seiford L M. Data envelopment analysis: Evolution of the state-of-the-art (1978—1998) [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 1996, 7(2/3): 99–137.
- [15] Seiford L M, Zhu J. Modeling undesirable factors in efficiency evaluation [J]. *European Journal of Operational Research*, 2002, 142(1): 16–20.
- [16] Seiford L M, Zhu J. A response to comments on modeling undesirable factors in efficiency evaluation [J]. *European Journal of Operational Research*, 2005, 161(2): 579–581.
- [17] Bian Y, Yang F. Eco-efficiency analysis and pollutant emission quota allocation of Chinese paper mills [J]. *International Journal of Environment and Health*, 2008, 2(2): 198–208.
- [18] Hua Z, Bian Y. Performance measurement for network DEA with undesirable factors [J]. *International Journal of Management and Decision Making*, 2008, 9(2): 141–153.
- [19] Liang L, Li Y, Li S. Increasing the discriminatory power of DEA in the presence of the undesirable outputs and large dimensionality of data sets with PCA [J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(3): 5895–5899.
- [20] Liu W B, Meng W, Li X X, et al. DEA models with undesirable inputs and outputs [J]. *Annals of Operations Research*, 2010, 173(1): 177–194.
- [21] Banker R D, Zheng Z, Natarajan R. DEA-based hypothesis tests for comparing two groups of decision making units [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 206(1): 231–238.
- [22] Kuosmanen T, Johnson A L. Data envelopment analysis as nonparametric Least-Squares regression [J]. *Operations Research*, 2010, 58(1): 149–160.
- [23] Collier T, Johnson A D, Ruggiero J. Technical efficiency estimation with multiple inputs and multiple outputs using regression analysis [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 208(2): 153–160.
- [24] 官建成, 何颖. 科学-技术-经济的联结与创新绩效的国际比较研究 [J]. *管理科学学报*, 2009, 12(5): 61–77.  
Guan Jiancheng, He Ying. Linkage amongst science, technology and economy and international comparison of innovation performance [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2009, 12(5): 61–77. (in Chinese)
- [25] Gstach D. Another approach to data envelopment analysis in noisy environment: DEA+ [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 1998, 9(2): 161–176.
- [26] Copper W W, Huang Z M, Li S X. Satisficing DEA model under chance constraints [J]. *Annals of Operations Research*, 1996, 66(4): 279–295.
- [27] Sueyoshi T. Stochastic DEA for restructure strategy: An application to a Japanese petroleum company [J]. *Omega-International Journal of Management Science*, 2000, 28(4): 385–398.
- [28] Copper W W, Deng H, Huang Z M, et al. Chance constrained programming approaches to congestion in stochastic data envelopment analysis [J]. *European Journal of Operational Research*, 2004, 155(2): 487–501.
- [29] Tsionas E G, Papadakis E N. A Bayesian approach to statistical inference in stochastic DEA [J]. *Omega-International Journal of Management Science*, 2010, 38(5): 309–314.

- [30]田 军,何德权,黄登仕. 基于多准则随机 DEA 模型的投资决策评价方法及应用[J]. 中国管理科学,2000,8(4): 43-48.  
Tian Jun, He Dequan, Huang Dengshi. Approach and application of evaluation investment based on multiple criteria random DEA model[J]. Chinese Journal of Management Science, 2000, 8(4): 43-48. (in Chinese)
- [31]曾祥云,吴育华,郑道英. 随机 DEA 模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践,2000,20(6): 19-24.  
Zeng Xiangyun, Wu Yuhua, Zheng Daoying. The study of stochastic DEA model and its application[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2000, 20(6): 19-24. (in Chinese)
- [32]Pastor J T, Ruiz J L, Sirvent I. A statistical test for nested radial DEA models[J]. Operations Research, 2002, 50(4): 728-735.
- [33]Horsky D, Nelson P. Testing the statistical significance of linear programming estimators[J]. Management Science, 2006, 52(1): 128-135.
- [34]宋马林,王舒鸿,汝慧萍,等. 基于省际面板数据的 FDI 绿色创新能力统计分析[J]. 中国软科学,2010,25(5): 143-151.  
Song Malin, Wang Shuhong, Ru Huiping, et al. Analysis of green innovation capability based on panel data in China[J]. China Soft Science, 2010, 25(5): 143-151. (in Chinese)
- [35]宋马林,王舒鸿,汝慧萍,等. 中国新兴生物 DMU 的生产效率及其不确定性——基于 DEA 和神经网络模拟的面板数据分析[J]. 科学学与科学技术管理,2010,31(10): 131-137.  
Song Malin, Wang Shuhong, Ru Huiping, et al. The productivity and uncertainties in emerging biotechnology companies in China: Panel data analysis based on DEA and neural network simulation[J]. Science of Science and Management of S. & T., 2010, 31(10): 131-137. (in Chinese)
- [36]Afriat S N. Efficiency estimation of production functions[J]. International Economic Review, 1972, 13(3): 568-598.
- [37]Banker R D, Charnes A, Cooper W W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis[J]. Management Science, 1984, 30(9): 1078-1092.

## Analysis of statistical properties of environmental efficiency evaluation and its illustrations

SONG Ma-lin<sup>1</sup>, WU Jie<sup>2</sup>, CAO Xiu-fen<sup>1</sup>

1. School of Statistics and Applied Mathematics, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu, 233030, China;
2. School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

**Abstract:** Production function of the expected outputs and undesirable outputs are constructed in this article firstly, and then non-convex nonparametric least squares estimation considering the undesirable outputs is studied. When  $\alpha_{i1}, \beta'_{i1}, \alpha_{i2}, \beta'_{i2}$ , are given, explicit expression of  $f$  and  $g$  can be obtained. According to DEA considering undesirable outputs and CNLSUO, relationship between the two fitting curves can be calculated. For the actual outputs of each firm, the estimation of CNLSUO is never larger than that of DEA. Empirical analysis shows that the DEA estimation considering the desirable and undesirable outputs is good. The analysis of statistical properties of methods for environmental efficiency evaluation, including least squares estimation of DEA considered undesirable outputs is bound to expand the scope of non-parameter statistical properties of DEA, which promote the further integration and development of statistics and operations.

**Key words:** environmental efficiency evaluation; statistical properties; least squares estimation; undesirable outputs