资产价值分解与公司债务定价①

崔长峰，刘海龙
(上海交通大学安泰经济与管理学院，上海 200052)

摘要: 股东价值是影响公司违约决策的关键变量，而传统的结构化模型在为公司债务定价时度量股东价值的方法存在偏误. 本文从资产形式的演化入手，描述了股权资产与股票资产之间的差异，在可变现净值的框架下将股东价值分解为股权资产价值与流通期权的组合. 流通期权是赋予股东的永久美式看跌期权，将流通期权引入到传统的结构化模型中后，公司债务的定价与以往存在明显的差异，并且传统的结构化模型仅在非正常市场中才能成立. 考虑流通期权后的结构化模型纠正了这种定价偏误，通过数值模拟还表明，新的模型在面对存在噪音信息的股价数据时比传统的结构化模型更加稳健.

关键词: 公司债务定价; 资产价值分解; 股东价值度量; 结构化模型
中图分类号: F830.9　　文献标识码: A　　文章编号: 1007－9807(2013)10－0051－12

0 引 言

目前，主流的公司债务定价方法可分为简约模型和结构化模型两大类. 简约模型的思路源于 Pye[1] 的精算方法，最早由 Jarrow-Turnbell[2] 提出正式的定价模型. 结构化模型的思路源于 Black-Scholes 的期权定价思想，最早由 Merton[3] 应用于对公司债务的定价.

简约模型[4－7] 认为信用事件外生于公司，利用特定的随机过程描述信用事件，忽略资本结构、债务条款等基本因素的影响. 模型的核心是违约概率和偿还率，因而研究主要是寻求对这两个变量更好的建模以优化模型的运算或数据拟合预测能力. 尽管简约模型形式简洁并与利率期限结构理论兼容，但它忽视对特定债务发行人信用风险的评估，因而也是一种缺乏经济学理论基础的模型.

结构化模型的突出特点是将违约与公司的基本面信息结合起来，以股东价值衡量违约决策的制定，并基于期权的方法建立违约模型. Merton[3] 认为违约可能在债务到期日的时候发生，股权是基于公司资产的看涨欧式期权，对应地可以将公司债务视为无违约债务与基于公司资产的看跌欧式期权空头的组合，执行价格为债务面值. Merton[3] 的结果隐含了公司债务利差与资产负债率和资产波动率的正相关关系.

随后的学者对 Merton 模型的假设进行了放松，从而考虑了更为丰富的因素. 其中最重要的拓展是首越边界模型(Black-Cox[8]、Ho-Singer[9]、Longstaff-Schwartz[10]、Leland-Toft[11] 等)，它认为当公司的资产价值触及某个事先设定的界限时违约就会发生，并将这个违约界限称为违约边界. 因此首越边界模型与 Merton 模型不同，它认为违约是能够在到期日之前发生，并将障碍期权的方法引入到对违约的建模当中. Brockman-Turtle[12] 对这种模型进行了系统性的总结，并基于敲出期权的方法建立了一般性的框架. Barbedo-Lemgruber[13] 提出在随机违约边

① 收稿日期: 2011－04－06; 修订日期: 2012－03－15.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70831004; 71273169).
作者简介: 崔长峰(1985—)，男，辽宁营口人，博士研究生. Email: cuicf@sjtu.edu.cn

界情况下可以使用向下敲出互换期权的方法对违约进行建模，从而建立股权、债权和公司资产之间的关系.

近年来对结构化模型的改进中，学者普遍关注了跳跃因素的影响. Zhou[14] 认为在会计信息公布、诉讼案件、经济环境突变等背景下公司的资产价值经常存在跳跃，因而在公司价值的演化过程中考虑跳跃因素是符合现实的，并且能够解决以往结构化模型对短期利差解释过低的情况，也有利于产生形态丰富的信用利差曲线. Chen-Kou[15] 在 Leland-Toft 模型基础上使用跳跃过程进行了拓展，结果发现公司资产的跳跃过程能够显著影响信用利差和公司的资本结构. Zhang 等[16] 基于 CDS 的高频交易数据研究了资产价值的跳跃性对利差的影响，结构表明 CDS 市场的利差也显著地反映了资产的跳跃性.

不断发展的结构化模型已经日益贴近现实，但这类模型普遍存在一个难以回避的弱点: 公司价值和股东价值这两个关键变量是不可观测的，因此需要利用已知信息求解. 针对这一问题，结构化模型通过构造违约模型，建立公司价值与股东价值的关系，并利用股价代替股东价值，从而求解不可观测的公司价值. 另外，公司价值可以通过调研评估的方法获得，但在调研过程中可能存在信息噪音的问题，对此程功、张维和熊熊[17]、程功和张维[18] 在传统的结构化模型中引入噪音信息，并证实它能够帮助改善商业银行贷款的违约风险评估.

本文将指出，传统结构化模型在度量股东价值并求解公司价值中存在模型设定问题: 忽略了股票作为一种金融资产能够给股东带来的价值增值. 借鉴吴冲锋等[19] 的资产链思想，本文以可变现净值度量股东价值，能够合理地体现股票金融属性为股东带来的价值. 将这种金融属性称为流通期权，可以用永久美式看跌期权刻画，并将其引入到传统结构化模型中能够纠正结构化模型设定的偏误. 理论与模拟结果表明，改进后的模型能够获得与传统结构化模型不一样的债务定价，并且在股价数据中存在噪音时，使用改进后的模型更加稳健.

1 基本定价模型

公司资产归属于股东与债权人

$$V = V_s + V_d \tag{1}$$

其中 V 为公司价值，V_S 和 V_d 分别表示归属于股东和债权人的价值部分. 如果已知 V 和 V_s，则公司债务的价值为 $V_d = V - V_s$. 但 V 和 V_s 通常是不可观测的，因此通过使用已知可观测的信息，寻求对 V 和 V_s 的估计是为公司债务定价的关键.

股东价值 f 是股东权利带来的现金流的价值，结构化模型认为股权是基于公司价值 V 的期权，因此股东价值 f 体现了这种期权的价值，也即可以建立 f 与 V 的关系 $f = f(V)$. 以 F 表示负债，r 表示无违约风险利率，则存在风险中性概率测度 Q，在此测度下由无违约风险利率折现的股东价值过程 $\{f_t e^{-rt}\}$ 为鞅过程，$t < s$

$$f_t e^{-rt} = E^Q[f_s e^{-rs}] \tag{2}$$

将 $f = f(V)$ 代入式(2) 中即可求解公司价值 V. 对 V_s 估计时，结构化模型通常使用股票价格 S 描述 V_s. 将求解的 V 与 V_s 代入式(1) 中即得到对公司债务 V_d 的定价.

Merton 模型中，股权是基于公司价值 V 的欧式看涨期权，执行价格为 F，执行日期为 T，因此 T 时股东价值为 $f_T^M = \max\{V_T^M - F, 0\}$②. 同时以股价反映即期股东价值 $f_t^M = S_t$. 将 f_T^M 和 f_t^M 代入到式(2) 中即可以得到 $S_t = E^Q[e^{-r(T-t)}\max\{V_T^M - F, 0\}]$. 由 Ito 引理可知 $\sigma_s S = N(d_1)\sigma_v V$，因此使用这两个等式建立的方程组中求解公司价值 V_t^M，令 $V_{s,t} = S_t$，代入式(1) 即得 $V_{d,t}^M = V_t^M - S_t$.

首越边界模型中，Longstaff-Schwartz[10] 和 Leland-Toft[11] 等认为违约可以在到期日之前发生，因此股权被视为基于公司价值 V 的向下敲出期权，从而建立 $f = f(V)$ 用于求解公司价值 V，并进而求解 V_d.

② 后续将建立的模型中也涉及公司总资产价值和股东价值，但内涵和计算上与 Merton 模型不完全相同. 为避免混淆，文中对 Merton 模型中的变量采用 M 上标，但对本文建立模型中的符号不采用 M 上标.

从以上分析中可以发现，为债务定价的关键是估计 V 与 V_s，而估计 V 与 V_s 的关键则是正确地描述股东价值 f 与 V 和 V_s 之间的函数关系. 因此，如果错误地建立了 f 与 V 和 V_s 之间的函数关系，那么可能导致错误估计 V 与 V_s，从而得到错误的 V_d. 本文认为，股票作为一种金融资产，能够为股东带来金融属性的额外溢价，而传统的结构化模型中忽略了这种金融资产的价值，因此建立的 f 与 V 和 V_s 之间的函数关系是存在偏误的，当然这将导致对公司债务的错误定价.

2　资产价值分解与股东价值度量

由基本定价模型的讨论可知，求解 V_d 的关键在于合理地建立 f 与 V 和 V_s 之间的函数关系. 由于股票具有更强的流通能力，因此在度量上市公司股东价值 f 的时候应当合理考虑这种流通能力的影响. 下面首先通过资产价值分解讨论流通能力价值带来的影响，然后基于此对股东价值给出度量，建立 f 与 V 和 V_s 之间的关系.

2.1　资产价值分解

吴冲锋等[19] 探讨了基于资产链的资产定价思想，提出资产形式演化的四个阶段: 实物资产、公司资产、资本资产和衍生资产，其中资本资产和衍生资产同属金融资产. 企业家的创新推动实物资产向公司资产转化，在此基础上一系列金融创新又产生金融资产. 图 1 描述了这种由实物资产到公司资产再到金融资产的资产链演化过程. 公司是由实物资产有机组合而成的经济实体，公司资产的价值就是该经济实体所能产生的预期现金流现值的总和. 证券化后的公司资产转化为股票或者债券，能够更加便利地进行交易，进而转化为金融资产.

股票作为金融资产，其价值不仅反映基础资产的价值，还应包含金融创新带来的价值增值. 存在价值增值的原因有两方面: 其一，证券化后的金融资产获得了“流通便利”，方便持有者在必要时将其卖出; 其二，金融资产价值相对基础资产价值高估到一定程度时，持有者可将其卖出以获取更高的收益. 股票的流通便利是额外赋予股东的一种权利，本文称其为“流通期权”. 因此，流通期权的价值就是资产从公司层面向金融层面转化所带来的增值，3.2 节将会给出流通期权的具体描述和定价.

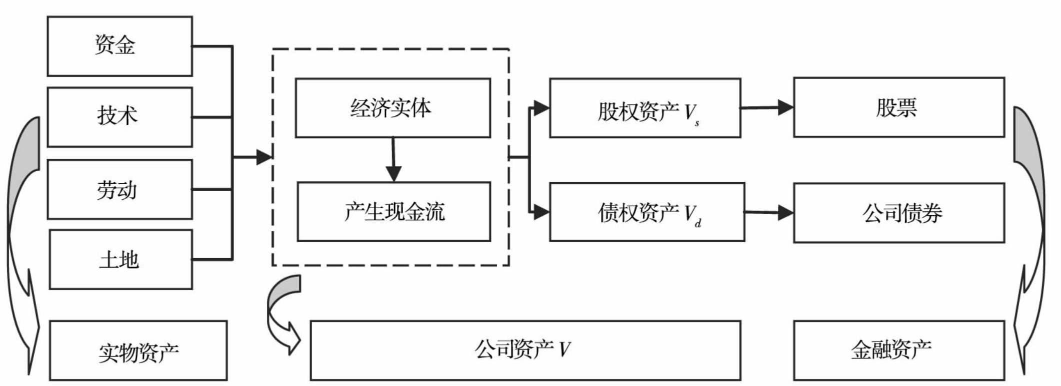


图 1　资产价值的形成过程

Fig. 1 The composition of various assets value

图 1 也体现了式(1) 中的 $V = V_s + V_d$. 将流通期权的价值记为 MK，则股东价值 f 就应同时包含 V_s 和 MK

$$f = V_s + MK \tag{3}$$

可见，股东价值 f 与公司资产归属于股东部分的价值 V_s 是有所区别的，差异就在于流通期权的价值 MK. 综合式(1) 和式(3) 可得到对债权资产价值的分解

$$V_d = V - V_s = V - f + MK \tag{4}$$

式(4) 给出的价值分解表明，公司债务的价值不仅与公司总资产价值 V、股东价值 f 有关，还受流通期权价值 MK 的影响. 本文后面将会阐释，以往的结构化模型实际上认为债务价值 V_d 仅与公司价值 V 和股东价值 f 有关.

2.2 股东价值的度量

对于上市公司的股东而言，当股东面对流动性需求时，存在将资产变现的要求. 考虑如下两种情况: 其一，股票的可变现价值 λS 相对股权资产价值 V_s 不存在低估，股东将选择以股票的形式变现资产; 其二，如果股票的可变现价值 λS 相对 V_s 存在低估，则股东将选择以公司资产的形式出售以获得更高的变现价值. 其中 S 为股票价格，λ 为流动性、税收等摩擦造成的股票变现比率. 那么，股东价值 f 可表示为

$$f = \max\{\lambda S, V_s\} = V_s + \max\{\lambda S - V_s, 0\} \tag{5}$$

将式(5) 与式(3) 对比，即结合股东价值的“可变现净值”定义与资产价值分解，可以发现“流通期权”的价值即为 $MK = \max\{\lambda S - V_s, 0\}$

对于非上市公司而言，股东只能选择以 V_s 出售资产，那么根据可变现净值的定义，股东价值应为 $f = V_s$. 实际上，以往的结构化模型采用的就是 $f = V_s$，因此忽略了股票的金融属性溢价为股东价值带来的贡献.

为了说明这个问题，考虑公司存在面值为 F，到期日为 T 的债务. 在 Merton 模型中有 $f_T^M = \max\{V_T^M - F, 0\}$，而由于 T 日无违约状态下有 $V_{d,T}^M = F$，因此 Merton 模型实际上认为当 $V_T^M > F$ 时股东价值 $f_T^M = V_T^M - F = V_{s,T}^M$. Leland-Toft 模型中同样也采用了类似的设定，也未考虑流通期权的价值.

下面在可变现净值的框架下，建立对股东价值 f 的度量. 股东价值 f 的度量取决于违约与否，而违约发生与否则受清偿能力和股东违约意愿的影响. 当股东既有清偿能力又有偿债意愿时，违约才不会发生，其它情况下都将发生违约.

结构化模型使用公司价值 V 作为衡量清偿能力的状态变量③，当 V 穿越某一违约边界 B 时公司将进入违约状态. 违约意愿则以股东价值 f 的最大化作为衡量指标，如果不违约决策下股东的价值高于违约下的股东价值，那么股东就会尽量避免违约. 对于 Merton 模型而言，只可能在到期日 T 发生，因此只要 $V_T > F$ 股东就不会选择违约. 而对于首越边界模型，假设违约边界为常数时，违约可以在到期日 T 之前发生，股权相当于向下敲出期权. 因此，如果 $V_s > B$，$t < s < T$，股东不会选择违约. 而在 $V_s > B$ 时的股东价值 f_s 则取决于 V_u 的分布，$u > s$. 因此，无论 Merton 模型还是首越边界模型，重要的是确定 f_T 的分布.

考虑流通期权的价值，在 T 日如果股东选择不违约，则股东价值为 $V_{s,T} + MK_T$，并且由于 $V_{s,T} = V_T - V_{d,T} = V_T - F$. 因此 T 日股东违约意愿取决于 $V_T - F + MK_T$

$$f_T = \begin{cases} V_T - F + MK_T & V_T > B, V_T - F + MK_T > 0 \\ 0 & V_T > B, V_T - F + MK_T \leqslant 0 \\ 0 & V_T \leqslant B \end{cases} \tag{6}$$

$V_T > B$，$V_T - F + MK_T > 0$ 代表未触发违约条件，并且股东有意愿偿还债务，则股东价值为 $V_T - F + MK_T$; $V_T > B$，$V_T - F + MK_T \leqslant 0$ 代表未触发违约条件，但股东无意愿偿还债务，则公司将被债权人接管并终止经营，股东价值为 0; $V_T \leqslant B$ 代表触发违约条件，则股东价值为 0; 通常违约条款的设置为保护债权人利益，会保证 $B \geqslant F$，而由式(5) 可知 $MK \geqslant 0$，因此 $V_T > B$，$V_T - F + MK_T \leqslant 0$ 的情形是不会发生的. 这样，可将式(6) 简化为式(7) 的表达

$$f_T = [V_T - F + MK_T] \times 1_{\{V_T > B\}} \tag{7}$$

3 考虑流通期权的定价模型

Merton 模型是结构化模型的基础，可拓展性较好，因此本文主要以 Merton 模型为基础，结合资产价值分解与股东价值度量，建立考虑流通期权影响的结构化模型. 但考虑流通期权的拓展也可以在其它类型的结构化模型中实现，本文将在第 4 节中对这一问题进行阐述.

3.1 Merton 模型的拓展

假设公司存在面值为 F 到期日为 T 的无息债

③ 通常来说，结构化模型的这种假设是合理的. 因为如果将所有股东视为整体，那么公司必定以降低公司资产来清偿债务，转让股权的行为只是更换股东结构，并不能帮助清偿债务. 当然，这里排除增发新股、债务重组等临时改变资产负债结构的行为.

务，并且在 T 日前不会发生违约. S_t 为股价，r_t 是无风险利率，W_t^s 和 W_t^v 是相关系数为 ρ 的维纳过程，那么假设在风险中性测度 Q 下，S_t 和 V_t 价值服从几何布朗运动

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= rS_t\mathrm{d}t + \sigma_s S_t \mathrm{d}W_t^s \\ \mathrm{d}V_t &= rV_t\mathrm{d}t + \sigma_v V_t \mathrm{d}W_t^v \end{aligned} \tag{8}$$

考虑流通期权的影响，由式(7)和式(2)可得

$$f_t e^{-rt} = e^{-rT} E^Q \left[(V_T - F + MK_T) \times 1_{\{V_T > F\}} \right] \tag{9}$$

令 y_t 表示可违约债务的要求收益率，则 $V_{d,t} = Fe^{-y(T-t)}$. 由于 $V_{s,t} = V - V_{d,t}$，根据式(5)可知 $f_t = \max\{\lambda S_t, V_{s,t}\}$，则股东价值 f_t 为

$$f_t = \max\{\lambda S_t, V_t - Fe^{-y(T-t)}\} \tag{10}$$

综合式(9)和式(10)，则可以得到

$$\max\{\lambda S_t, V_t - Fe^{-y(T-t)}\} = e^{-r(T-t)} E^Q \times \left[(V_T + MK_T - F) \times 1_{\{V_T > F\}} \right] \tag{11}$$

式(10)和式(11)就建立了 f 与 V 和 V_s 的函数关系，从而基于股市的可观测数据能够求解不可观测的 V 与 V_s. 由式(4)则有公司债务定价 $V_{d,t}$ 与隐含收益率 y_t

$$V_{d,t} = V_t - f_t + MK_t \tag{12}$$

$$y_t = \frac{1}{T-t}\ln\left[\frac{F}{V_{d,t}}\right] = \frac{1}{T-t}\ln\left[\frac{F}{V_t - f_t + MK_t}\right] \tag{13}$$

式(11)、(12)和(13)给出了公司债务的定价，但其中流通期权的价值 MK_t 仍然未经说明. 下文将对流通期权给出描述与度量，并在此基础上简化式(11)的定价模型.

3.2　流通期权价值的度量

由式(5)，在 $u > T$ 时刻，股东价值 f_u，也即股东资产的可变现净值为

$$f_u = V_{s,u} + \max\{\lambda S_u - V_{s,u}, 0\} \tag{14}$$

其中 $\max\{\lambda S_u - V_{s,u}, 0\}$ 正是体现在时刻 u 的流通期权价值 MK_u. 可以合理地假设股东在偿还债务后能够永续经营公司，那么"流通期权"就可以被描述为基于股权资产价值 V_s 的永久美式看跌期权，执行价格为 λS.

Merton-Samuelsson [20] 认为永久美式看跌期权赋予持有者无限长的时间作出行权决策，因此存在一个最优的执行门槛，一旦基础资产价格跌至该执行门槛，期权持有者将做出行权决策. 这种描述对于流通期权同样合理，股东不会在股票市值相对公司资产的股权部分价值略有高估时就以股票市值将资产卖出，而是会继续等待股票的高估达到一定程度才会决定卖出资产，这就对应了一个执行门槛.

为对流通期权定价，令 $X_u = V_{s,u}/\lambda S_u$，将式(14)变换为式(15)的形式. 由 Ito 公式易证 X_u 服从几何布朗运动，瞬时方差 $\sigma_x^2 = \sigma_v^2 + \sigma_s^2 - 2\rho\sigma_v\sigma_s$.

$$\max\{\lambda S_u - V_{s,u}, 0\} = \lambda S_u \max\left\{1 - \frac{V_{s,u}}{\lambda S_u}, 0\right\} \tag{15}$$

Merton-Samuelsson [20] 给出了永久美式看跌期权的定价求解，利用同样的方法，容易证明流通期权具有式(16)表达的定价结果，期权执行门槛 c 为式(17)，其中 $\alpha = 2r/\sigma_x^2 > 0$，$r$ 为无风险利率. 证明过程比较直观，参考 Merton-Samuelsson [20].

$$MK_T = \frac{\alpha^\alpha}{(1+\alpha)^{1+\alpha}}\left[\frac{(\lambda S_T)^{\alpha+1}}{(V_T - F)^\alpha}\right] \tag{16}$$

$$c = \frac{\alpha}{1+\alpha} \tag{17}$$

式(16)给出的是债务到期日 T 时，偿还债务情形下流通期权的定价. 如果在 T 时股东选择违约，则公司将终止经营，因而流通期权价值为 0. 令 $k = \alpha^\alpha/(1+\alpha)^{1+\alpha}$，则式(18)和式(19)分别给出了 t 时和 T 时流通期权的价值. 由于 α 导致的非线性，在通常情况下难以求解 MK_t 的解析表达式，可以通过数值模拟的方法给出流通期权价值的估计.

$$MK_T = k\left[\frac{(\lambda S_T)^{1+\alpha}}{(V_T - F)^\alpha}\right] \times 1_{\{V_T > F\}} \tag{18}$$

$$MK_t = ke^{-r(T-t)} E^Q\left[\left[\frac{(\lambda S_T)^{1+\alpha}}{(V_T - F)^\alpha}\right] \times 1_{\{V_T > F\}}\right] \tag{19}$$

3.3　定价模型的简化与性质讨论

首先将式(11)改写为如下形式

$$f_t = e^{-r(T-t)} E^Q \left[(V_T - F) \times 1_{\{V_T > F\}} \right] + e^{-r(T-t)} E^Q [MK_T]$$

由欧式期权的定价可知，上式可以写为式(20)的形式

$$f_t = V_t N(d_1) - F\mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2) + MK_t \tag{20}$$

其中 $d_1 = \dfrac{\ln(V_t/F) + (r + \sigma_v^2/2)(T-t)}{\sigma_v \sqrt{T-t}}$，$d_2 = d_1 - \sigma_v \sqrt{T-t}$.

命题1 给定股票价格 S_t，公司资产价值 V_t，债务面值 F 和变现比率 λ 时，在正常的市场条件下，流通期权价值满足 $MK_t > 0$.

命题2 在正常的市场条件下，式(10)中给出的股东价值 f_t 可简化为如下形式

$$f_t = \max\{\lambda S_t, V_t - F\mathrm{e}^{-y(T-t)}\} = \lambda S_t \tag{21}$$

并且式(20)中的定价公式可以被简化为

$$\lambda S_t = V_t N(d_1) - F\mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2) + MK_t \tag{22}$$

命题1和命题2实际上说明了Merton在正常的市场条件下不会成立. 因为由命题2的式(22)可知如果Merton模型成立那么要求 $MK = 0$ 并且 $\lambda = 1$，但由命题1的结论知道正常市场条件下 $MK > 0$，并且通常来说存在摩擦的市场上会有变现比例 $\lambda < 1$. 根据附录1，如果利率 r 是正常的，那么 $MK = 0$ 要求 $\sigma_x = \infty$ 或 $\sigma_x = 0$.

由于存在 $\sigma_s S = N(d_1)\sigma_v V$，因此 σ_x 满足

$$\sigma_x^2 = \left(N(d_1)\frac{V}{S}\sigma_v - \rho\sigma_v\right)^2 + (1-\rho^2)\sigma_v^2 \tag{23}$$

$\sigma_x = 0$ 要求 $\rho = 1$ 且 $\sigma_s = \sigma_v$，由式(23)知 $S = VN(d_1)$，从而 $F\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2) = 0$. 而 $\sigma_x = \infty$ 要求 $\sigma_v = \infty$. 显然这些都不是正常的市场条件，所以在考虑流通期权属性后传统的Merton模型是无法在正常条件下成立的. 可见，命题1和命题2表明本文对Merton模型的改进并不是简单的延伸，而是让Merton模型更符合现实市场条件，传统的Merton模型也仅是本文模型在非正常市场条件下($MK = 0$ 且 $\lambda = 1$)的特例.

下面表达中，以 V^*、V_d^*、V_s^* 和 y^* 表示式(22)的计算结果，以 V^M、V_d^M、V_s^M 和 y^M 表示传统Merton模型的计算结果.

命题3 给定 λS 和 F，在正常的市场条件下，式(22)隐含的公司债务的价值 V_d^* 小于Merton模型中隐含的 V_d^M，式(22)隐含的收益率 y^* 大于Merton模型的 y^M.

命题3表明，在正常的市场条件下依据Merton模型对公司债务的定价 V_d^M 与考虑流通期权后的式(22)给出的定价 V_d^* 是存在差异的. 这首先表明在传统结构化模型中引入流通期权的概念确实对定价结果产生了影响，同时也说明利用忽略了流通期权价值的传统结构化模型得出的公司债务定价 V_d^M 是存在偏误的，它倾向于低估真实的收益率.

命题4 在正常的市场条件下，给定股东的可变现净值 λS_t 不变，则随着流通期权价值 MK_t 的增大，式(22)隐含的公司债务价值 $V_{d,t}^*$ 下降，收益率 y_t^* 上升.

命题3证明了本文模型与Merton模型在定价上是存在差异的，即 $V_d^* \neq V_d^M$，$y_t^* \neq y_t^M$. 命题4则进一步说明了这种定价差异将会随着流通期权价值 MK_t 的增大而扩大. 因此如果在 MK_t 显著不为0的市场中使用Merton模型为公司债务定价，结果将出现严重的偏差.

命题5 存在 ρ^* 使式(22)隐含的 V_d 和 y 与相关系数 ρ 有如下关系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_d}{\partial \rho} \leqslant 0, \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \geqslant 0 & \text{当 } \rho \leqslant \rho^* \\ \dfrac{\partial V_d}{\partial \rho} \geqslant 0, \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \leqslant 0 & \text{当 } \rho > \rho^* \end{cases} \tag{24}$$

命题5表明，如果给定其它条件不变，ρ 的变化会导致公司债务定价 V_d 和隐含收益率 y_d 随之变化. 结构化模型以股票交易数据作为揭示公司价值波动的输入信息，而 ρ 则代表了股价 S 与公司价值 V 之间波动的相关性，因此它是一个信息的指标. 由命题5可知当 ρ 向1和 -1 靠近时，债务价值 V_d 上升，收益率 y_d 下降.

这种变化的经济含义是，当 ρ 向1和 -1 靠近时，股价波动与公司价值波动更加相关，说明作为外部人的债权人能通过股价波动掌握关于公司资产质量更多的信息，从而信息不对称的风险降低，那么要求的债务收益率也将有所下降. 实际上，关于信息与公司债务定价的关系，Duffie-Lando[21]和Yu[22]也进行了讨论，但他们的研究主要关注会计信息透明度的影响，而本文则以股价波动是否反映基本面信息表征了信息透

明度的影响.

命题 1 ～ 5 的证明见附录.

4　数值模拟分析

本文模型的特点是考虑了流通期权的影响，对股东价值的度量与以往结构化模型是存在差异的，从而导致对 V、V_s 和 V_d 的估计是不同的. 下面通过数值模拟算例对考虑流通期权后的结构化模型与传统的结构化模型进行对比.

进行算例研究的结构化模型选择以下四类: 简单的 Merton 模型、具有确定违约边界的首越边界模型、具有随机违约边界的首越边界模型、带跳跃的首越边界模型. 使用结构化模型为公司债务定价，需要求解由股东价值与资产价值的函数关系 $f(\cdot)$ 以及股权波动率与公司价值波动率的函数关系 $g(\cdot)$ 组成的方程组

$$\begin{cases} f(S,V,\sigma_s,\sigma_v) = 0 \\ g(S,V,\sigma_s,\sigma_v) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

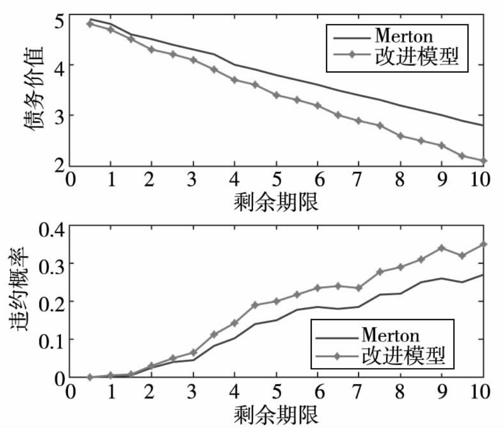
对方程组采用 Ho-Lee[23] 建议的方差最小化方法通过数值方法求解

$$(V^*,\sigma_v^*) = \arg\min_{V,\sigma_v} [f_S^{-1}(S,V,\sigma_s,\sigma_v) - S_0]^2 + [g_{\sigma_s}^{-1}(S,V,\sigma_s,\sigma_v) - \sigma_{s,0}]^2 \tag{26}$$

为扩展方便性，对违约模型的构造采用蒙特卡洛模拟方法，因此在建立股东价值与资产价值的函数关系 $f(\cdot)$ 后通常还不能获得 $g(S,V,\sigma_s,\sigma_v) = 0$ 的表达. 基于 KMV 的迭代计算思路，首先给定 V 和 σ_v，模拟得到一组 V_i，给定初始 σ_s，通过 $f(S,V_i,\sigma_s,\sigma_v) = 0$ 求解一组股价 S_i，从而计算 $\hat{\sigma}_s$ 以更新初始 σ_s，继续迭代直到 σ_s 稳定为止. 这样就在给定 S 和 V 的条件下通过数值方法获得了 $g(S,V,\sigma_s,\sigma_v) = 0$ 的表达关系式. 通过式(26)求解公司价值 V^*，并进而得到公司债务的定价 V_d.

图 2 至图 5 分别是四种模型在考虑流通期权前后对公司债务定价的对比. 结果表明，考虑流通期权后公司债务的定价相对传统的结构化模型偏低，并且对违约概率的估计结果也偏高，这说明以往未考虑流通期权价值的模型存在低估违约风险的倾向，这与命题 3 和命题 4 的结论是一致的.

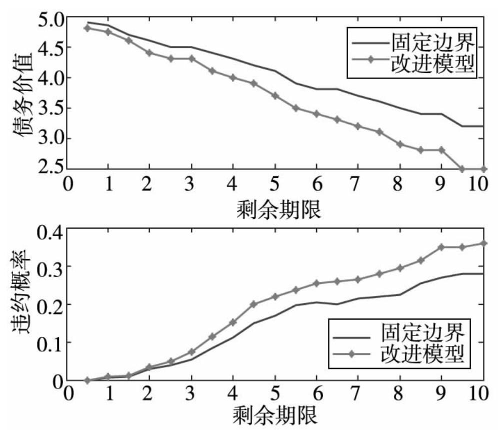
另外，引言中提到结构化模型历来存在一个无法回避的问题，就是公司价值是不可观测数据，需要通过可观测的股价数据求解. 然而，股票数据一定程度上会存在噪音，表现为股票价格脱离公司基本面的过度波动等. 如果股价中包含太多噪音信息，那么可能会对模型的输出产生影响，导致对公司债务定价的偏误. 下面在结构化模型中引入噪音信息因素，考察结构化模型的输出结果是否受到影响，以及改进后的模型是否能够更好地适应噪音信息.



注: $S_0 = 2, \sigma_{v,0} = 0.4, r = 0.05, F = 5$

图 2　Merton 模型改进前后的对比

Fig. 2 Compare of pricing of Merton model in considering of marketablity option



注: $S_0 = 2, \sigma_{v,0} = 0.4, r = 0.05, F = 5, B = 6$

图 3　固定首越边界模型改进前后对比

Fig. 3 Compare of pricing of first passage model with fixed default boundary in considering of marketablity option

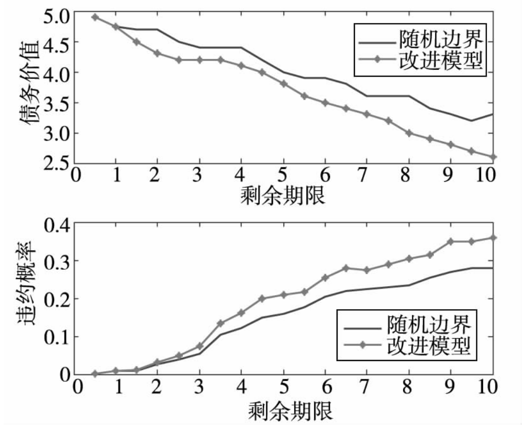


图 4 随机首越边界模型改进前后对比

Fig. 4 Compare of pricing of first passage model with stochastic default boundary in considering of marketablity option

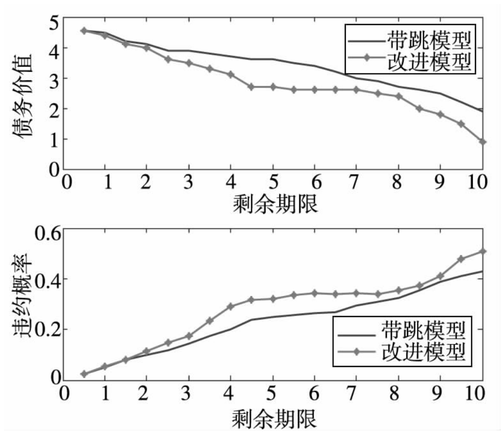


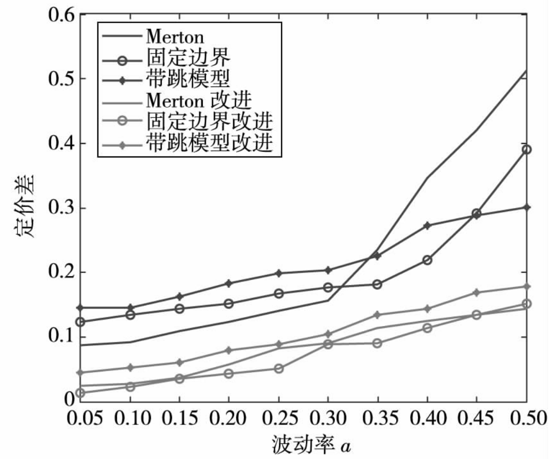
图 5 带跳跃首越边界模型改进前后对比

Fig. 5 Compare of pricing of first passage model with jump process in considering of marketablity option

以 S_t 表示无噪音信息的股价，$S_{n,t}$ 表示存在噪音信息的股价. 在风险中性概率测度下，假设 S_t 仍然服从式(8)，令 $Z_t = \ln S_t$，$Y_t = \ln S_{n,t}$，则 $Z_t \sim N(Z_0 + r(t - t_0), \sigma_s^2(t - t_0))$. 借鉴程功、张维和熊熊[17]的方法，假设 $Y_t = \ln S_{n,t} = Z_t + U_t$，其中 $U_t \sim N(u, a^2)$，且 U_t 独立于 Z_t. 因此，存在噪音信息的股价过程为 $S_{n,t} = S_t e^{U_t}$.

在传统的结构化模型以及考虑流通期权价值后的结构化模型中以 $S_{n,t}$ 代替 S_t，则在股价的波动中引入了噪音的影响. 由于 $E(e^{U_t}) = e^{u + a^2/2}$，因此当 $u = -a^2/2$ 时，$E(e^{U_t}) = 1$，表明 $S_{n,t}$ 相对于 S_t 仍然无偏，仅使股票价格的波动增加. 而当 $u = 0$，$a = 0$ 时 $S_{n,t} = S_t$，也即股价波动中没有噪音信息.

由于 $u = 0$ 且 $a = 0$ 体现了没有噪音信息的情形，因此考虑在 $u = -a^2/2$ 时结构化模型对公司债务定价与 $u = 0$ 且 $a = 0$ 情形下定价的差异，就体现了噪音信息对定价的影响. 这种差异越小，说明该模型受到噪音信息的影响越小，也即该模型给出的定价结果越稳健. 从图 6 中看，噪音信息对 Merton 模型、固定边界首越边界模型、带跳跃过程的首越边界模型三种结构化模型均会产生影响，而本文考虑了流通期权因素改进后的三种结构化模型也仍然受到噪音因素影响，从而对公司债务的定价产生偏差.



注：模型参数同图 2、图 3、图 5.

图 6 考虑噪音信息时结构化模型改进前后的定价偏误对比

Fig. 6 Compare of structural model in corporate debt pricing in considering marketability option when there is noise information in stock price

但图 6 同时表明，考虑流通期权后改进的结构化模型受噪音因素的影响明显小于传统结构化模型. 这说明通过考虑流通期权因素改进后的结构化模型能够更好地适应噪音信息的影响，尽管它仍然会给出偏误的定价，但相比传统的结构化模型，这种偏误已经有明显改善，因此其定价更加稳健性. 得到这样的结果并不意外，因为噪音信息体现了一种金融性而非基本面的波动信息，式(22)的模型中包含了度量金融性因素价值的流通期权，它能够吸收股价中的噪音信息. 因此，经过流通期权 MK 缓冲后，部分地抵消了噪音信息给公司价值和债务价值估计所带来的负面影响，提高了定价的稳定性. 这一点对于中国这样的新

兴市场尤其重要,也从另一个角度说明了式(22)给出的定价对噪音信息的适应性更强.

5　结束语

基于结构化模型为公司债务定价,需要对公司价值进行合理的估计,而对公司价值的合理估计则依赖于所建立的结构化违约方程,该方程建立了股东价值与公司价值的关系函数. 本文从资产形式的演化入手,指出金融资产相对于公司资产存在金融属性的溢价,因此持有股票的上市公司股东价值还应包含这种金融属性溢价的价值.

本文将这种金融属性溢价描述为期权费,并指出传统的结构化模型忽略了这一溢价价值,从而导致对股东价值的错误评判. 在此基础上,本文提出以可变现净值作为度量股东价值的指标以这种金融属性的溢价. 将改进后的股东价值度量引入到传统的结构化模型中,能够帮助建立更为合理的结构化违约模型,从而提高对公司价值估计的准确度.

结果表明,改进后的结构化模型不仅是传统模型的延伸,并且可以证明传统的结构化模型仅能在非正常的市场条件下成立,也即传统结构化模型是本文改进后模型在非正常市场条件下的特例. 那么在正常的市场中,忽略金融属性溢价的传统结构化模型将对公司债务给出偏误的定价结构,通过数值算例也表明,改进后的模型能够比传统模型更好地适应噪音信息的波动,也即模型的定价结果更加稳健. 当然,本文并没有能够建立将噪音信息剔除的定价方法,这将是未来进一步研究的方向.

参 考 文 献:

[1] Pye G. Gauging the default premium [J]. Financial Analysts Journal, 1974, 30 (1): 49 –52.

[2] Jarrow R, Turnbull S. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk [J]. The Journal of Finance, 1995, 50 (1): 53 –85.

[3] Merton R. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates [J]. The Journal of Finance, 1974, 29 (2): 449 –470.

[4] Jarrow R, Lando D, Turnbull S. A Markov model for the term structure of credit risk spreads [J]. The Review of Financial Studies, 1997, 10 (2): 481 –523.

[5] Madan, Unal P. Pricing the risks of default [J]. Review of Derivative Research, 1998, 2(1): 121 –160.

[6] Lando D. On Cox processes and credit risky securities [J]. Review of Derivatives Research, 1998, 2: 99 –120.

[7] Duffie D, Singleton K. Modeling term structures of defaultable bonds [J]. Review of Financial Stuldies, 1999, 12: 687 –720.

[8] Black F, Cox J. Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions [J]. Journal of Finance, 1976, 31: 351 –367.

[9] Ho T, Singer R. The value of corporate debt with a sinking-fund provision [J]. The Journal of Business, 1984, 57(3): 315 –336.

[10] Longstaff F, Schwartz E. A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt [J]. The Journal of Finance, 1995, 50(3): 789 –819.

[11] Leland E, Toft B. Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spread [J]. Journal of Finance, 1996, 51: 987 –1019.

[12] Brockman P, Turtle H. A barrier option frameworkfor corporate security valuation [J]. Journal of Financial Economics, 2003, 67: 511 –529.

[13] Barbedo C, Lemgruber E. A down-and-out exchange option model with jumps to evaluate firms' default probabilities in Bra–zil [J]. Emerging Markets Review, 2009, 10: 179 –190.

[14] Zhou C. The term structure of credit spreads with jump risk [J]. Journal of Financial & Economics, 2001, 25: 2015

-2040.

[15] Chen N, Kou S. Credit spreads, optimal structures, and implied volatility with endogenous default and jump risk [J]. Mathematical Finance, 2009, 19 (3): 343-378.

[16] Zhang B, Zhou H, Zhu H. Explaining credit default swap spreads with the equity volatility and jump risks of individual firms [J]. The Review of Financial Studies, 2009, 22: 5099-5131.

[17] **程 功, 张 维, 熊 熊. 信息噪音、结构化模型与银行违约概率度量 [J]. 管理科学学报**, 2007, 10(4): 38-48.
Cheng Gong, Zhang Wei, Xiong Xiong. Noisy information, structural model and bank evaluation of default probability [J]. Journal of Management Sciences in China, 2007, 10 (4): 38-48. (in Chinese)

[18] **程 功, 张 维. 信息噪音、结构化模型与银行客户风险限额管理 [J]. 中国管理科学**, 2008, 16(2): 30-36.
Cheng Gong, Zhang Wei. Noisy information, structural model and bank clients credit limit management [J]. Chinese Journal of Management Science, 2008, 16 (2): 30-36. (in Chinese)

[19] **吴冲锋, 王 柱, 冯 芸. 基于资产链的资产定价问题的思考 [J]. 管理科学学报**, 2008, 11(1): 1-11.
Wu Chongfeng, Wang Zhu, Feng Yun. Asset pring based on asset chains [J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(1): 1-11. (in Chinese)

[20] Merton R, Samulson P. Continuous Time Finance [M]. Oxford: Blackwell press, 1990, 298-300.

[21] Duffie D, Lando D. Term structures of credit spreads with incomplete accounting Information [J]. Econometrica, 2001, 69: 663-664.

[22] Fan Y. Accounting transparency and the term structure of credit spreads [J]. Journal of Financial Economics, 2005, 75: 53 - 84.

[23] Ho T, Lee S. The Oxford Guide to Financial Modeling: Applications for Capital Markets, Corporate Finance, Risk Management and Financial Institutions [M]. Oxford: Oxford University Press, first edition, 2004.

Asset value decomposition and corporate debt pricing

CUI Chang-feng, LIU Hai-long

Antai College of Economics & Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China

Abstract: The shareholder's value plays an important role in corporate default decisions. However, in traditional structural model, the shareholder's value is unreasonablly measured by the part of corporate asset value to shareholders. Based on asset value decomposition, this paper measures the shareholder's value by the combination of the part of corporate assets to shareholders and the so called liquidity option. Technically, we describe the liquidity option as a permanent American put option and introduce it into the traditional structural model. We prove that traditional structural models are special cases of the new model only under unrealistic conditions. But under normal conditions, the traditional structural models will be unreasonable and tend to underestimate the corrporate debt yield. We also prove that our new model can correct this mistake and adapt the more volatile stock data well and thus give much more stable pricing results.

Key words: corporate bond pricing; asset value decomposition; shareholder's value; structural model

附录

命题 1 的证明:

由式(19)可知,存在两种情形能够保证 $MK_t = 0$:

其一,公司在将来几乎确定会违约,也即违约概率为 1. 在风险中性概率 Q 下,如果 $P[V_T > F] = 0$,则 $MK_t = 0$ 必然成立.

其二,满足 $g = k\left[\frac{(\lambda S_T)^{1+\alpha}}{(V_T - F)^{\alpha}}\right] = 0$,则 $MK_t = 0$ 必然成立.

第一种情形非常直观,下面将仅对第二种情形给出证明. 首先,假定 $\alpha > 0$,令

$$\eta = \frac{\lambda S_T}{V_T - F} \tag{A1}$$

由流通期权的定价过程可知 $0 < \eta \leqslant \frac{1+\alpha}{\alpha}$,否则股东会提前将资产卖出. 由于 $k > 0$,$V_T - F > 0$,因此 $g = g(\eta)$ 是关于 η 的递增函数

$$g(\eta) - k\left[\frac{(\lambda S_T)^{1+\alpha}}{(V_T - F)^{\alpha}}\right] = k\eta^{\alpha+1}(V_T - F) \tag{A2}$$

令 $\eta_0 = \frac{1+\alpha}{\alpha}$,则

$$\lim_{\alpha\to\infty} k\eta_0^{\alpha+1}(V_T - F) = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{V_T - F}{\alpha} = 0$$

因此,$\forall \eta \in \left(0, \frac{1+\alpha}{\alpha}\right]$ 有

$$0 \leqslant \lim_{\alpha\to\infty} g(\eta) \leqslant \lim_{\alpha\to\infty} g(\eta_0) = 0 \tag{A3}$$

另外,如果当 $\alpha = 0$,则 $k = 0$,则 $g = k\left[\frac{(\lambda S_T)^{1+\alpha}}{(V_T - F)^{\alpha}}\right] = 0$.

因此,给定 S、V、F 和 λ 时,$g|_{\alpha=0} = g|_{\alpha=+\infty} = 0$. 其中 $\alpha = 0$ 要求 $r = 0$ 或 $\sigma_x = +\infty$,$\alpha = +\infty$ 要求 $r = +\infty$ 或 $\sigma_x = 0$. 由于 $\sigma_x^2 = (\sigma_s - \rho\sigma_v)^2 + (1-\rho^2)\sigma_v^2$,因此 $\sigma_x = 0$ 要求 $\sigma_s = \sigma_v = 0$ 或者 $\rho = 1$ 且 $\sigma_s = \sigma_v$.

由于上述这些市场条件以及 $P[V_T > F] = 0$ 均为非正常的市场条件,因此在正常的市场条件下,可以知道 $MK_t > 0$.

命题 2 的证明:

根据式(10)和式(12),可将债务的价值表达为如下形式

$$V_{d,t} = \begin{cases} MK_t + Fe^{-y(T-t)} & \lambda S_t \leqslant V_t - Fe^{-y(T-t)} \\ V_t + MK_t - \lambda S_t & \lambda S_t > V_t - Fe^{-y(T-t)} \end{cases} \tag{A4}$$

由于 $Fe^{-y(T-t)} = V_{d,t}$,因此式(A3)中的情形 $\lambda S_t \leqslant V_t - Fe^{-y(T-t)}$ 隐含了 $MK_t = 0$. 由命题 1 可知,$MK_t = 0$ 成立要求满足非正常市场条件,因此情形 $\lambda S_t \leqslant V_t - Fe^{-y(T-t)}$ 的成立要求非正常的市场条件. 在正常的市场条件下,$\lambda S_t > V_t - Fe^{-y(T-t)}$ 应该得到满足,也即

$$f_t = \max\{\lambda S_t, V_t - Fe^{-y(T-t)}\} = \lambda S_t \tag{A5}$$

由(A5)得到定价公式为

$$\lambda S_t = V_t N(d_1) - Fe^{-r(T-t)} N(d_2) + MK_t \tag{A6}$$

命题 3 的证明:

首先将式(22)转化为如下的形式

$$S_t = V_t^* N(d_1^*) - Fe^{-r(T-t)} N(d_2^*) + MK_t + (1-\lambda) S_t \tag{A7}$$

其中 V_d^*、d_1^* 和 d_2^* 为式(A7)成立的解. 以 V_d^M、d_1^M 和 d_2^M 表示 Merton 模型的解

$$S_t = V_t^M N(d_1^M) - Fe^{-r(T-t)} N(d_2^M) \tag{A8}$$

在正常的市场条件下,由于 $MK_t > 0$,$(1-\lambda) S_t \geqslant 0$,则如下关系必然成立

$$V_t^* N(d_1^*) - F\mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2^*) < V_t^M N(d_1^M) - F\mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2^M) \tag{A9}$$

由于$\frac{\partial}{\partial V}\left[VN(d_1) - F\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)\right] = N(d_1) > 0$,因此 $V_T^* < V_T^M$ 成立.

将式(12)、式(21)和式(22)结合,可将债务估值表达为式(A10)的形式. Merton 模型实际上也满足式(A10),只是 V_t 由不同的条件得到.

$$V_{d,t} = \left[1 - N(d_1)\right] V_t - F\mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{A10}$$

由于$\frac{\partial V_{d,t}}{\partial V_t} = 1 - N(d_1) > 0$,故而 $V_T^* < V_T^M$ 就意味着式(22)所隐含债务价值 V_d^* 的比 Merton 模型给出的更低. 对应地,由式(13)给出的收益率 y_t^* 也更高.

命题 4 的证明:

根据式(2)、式(21)和式(22)可知

$V_{s,t}^* = \lambda S_t - MK_t$

和 $V_{s,t}^* = V_t^* N(d_1^*) - F\mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2^*)$

则关于$\frac{\partial V_d^*}{\partial MK}$有

$$\frac{\partial V_d^*}{\partial MK} = \frac{\partial V_s^*}{\partial MK} \times \frac{\partial V^*}{\partial V_s^*} \times \frac{\partial V_d^*}{\partial V^*} = -1 \times \frac{1}{N(d_1^*)} \times \left[1 - N(d_1^*)\right] \tag{A11}$$

在正常的市场条件下,$0 < N(d_1^*) < 1$,因此$\frac{\partial V_d^*}{\partial MK} < 0$. 这说明随着 MK_t 的上升,债务价值 $V_{d,t}^*$ 下降,相应地从式(13)中给出的利率 y_t^* 上升.

命题 5 的证明:

由式(19)知,ρ 通过 α 影响 $g = k\frac{(\lambda S_T)^{1+\alpha}}{(V_T - F)^{\alpha}}$ 而影响 MK_t,ρ 的变化不会影响违约概率. 令 $\eta = \frac{\lambda S_T}{V_T - F}$,则$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = k\eta^{\alpha}(V_T - F)\left[(1+\alpha) + \ln\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\eta\right]$.

由于 $\eta < \frac{1+\alpha}{\alpha}$,并且在正常的市场条件下,$\lambda S > V_T - F\mathrm{e}^{-y(T-t)} > V_T - F$,所以可得 $1 < \eta < \frac{1+\alpha}{\alpha}$. 因此,$\frac{\partial g}{\partial \alpha}$ 符号的判别条件如下

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \geqslant 0 & \max\left[\frac{1+\alpha}{\ln(1+\alpha) - \ln(\alpha)}, 1\right] \leqslant \eta \leqslant \frac{1+\alpha}{\alpha} \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha} \leqslant 0 & 1 \leqslant \eta \leqslant \min\left[\frac{1+\alpha}{\ln(1+\alpha) - \ln(\alpha)}, \frac{1+\alpha}{\alpha}\right] \end{cases}$$

由于$\frac{1+\alpha}{\ln(1+\alpha) - \ln(\alpha)}$和$\frac{1+\alpha}{\alpha}$的单调性,给定 η 的取值后,可知存在唯一的$\frac{\partial g}{\partial \alpha}$由正变负的转折点. 由于 α 关于 ρ 严格单调递增,因此可求解唯一 ρ^*,当 $\rho < \rho^*$ 时$\frac{\partial g}{\partial \alpha} \geqslant 0$,当 $\rho > \rho^*$ 时$\frac{\partial g}{\partial \alpha} \leqslant 0$. 由命题 4,可以得知$\frac{\partial V_d}{\partial MK} \leqslant 0$,$\frac{\partial y}{\partial MK} \geqslant 0$. 由于$\frac{\partial MK}{\partial g} \geqslant 0$,因此可得出 V_d 与 y 对 ρ 变化的判别条件式(24).