

求解广义优先关系下的项目最小费用问题^①

苏志雄, 乞建勋, 王 强

(华北电力大学经济与管理学院, 北京 102206)

摘要: 在项目调度中, 求解与费用相关的问题时, 需要先求得项目的最小费用, 然后以此为起点进行优化, 例如时间-费用权衡问题. 当工序之间只存在单一优先关系时, 各工序只需选用费用最小的工期就能得到项目最小费用. 但是当工序之间存在广义优先关系(GPRs)时, 各工序若都选用费用最小的工期通常无法满足既定的优先关系, 导致项目不可行. 针对GPRs下的项目最小费用问题, 首先通过分析GPRs的特点, 建立了其数学模型; 其次, 对该模型进行对偶变换, 将其等效转化为特殊的最小费用最大流模型. 该模型能够运用现有算法求解, 并跟据初始对偶关系求得GPRs下的项目最小费用.

关键词: 项目调度; 广义优先关系(GPRs); 项目最小费用; 最小费用最大流模型; 初始对偶

中图分类号: TB114.1 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2013)11-0042-13

0 引言

在项目调度中, “总费用最小”通常都是主要目标, 并且理想的优化过程常从最小的总费用起步. 因此, 求项目的最小费用是项目调度的关键环节, 其中具有代表性的是时间-费用权衡问题, 求解该问题最直接有效的方法就是从费用最小的总工期开始, 用最小的压缩费用逐步缩短, 如经典的Fulkerson算法^[1]等, 以及对该问题的等效化简方法^[2,3]. 显然, 项目的最小费用与该问题的求解效果直接相关, 如果找不到最小的总费用, 那么最终解的最优性和合理性就无法保证, 总工期的最小费用曲线也必然失真, 其价值和用途将大打折扣.

网络计划技术是求解项目的时间与费用问题的重要工具, 包括CPM网络、PERT网络、GPRs网络等. 该技术能科学地计算出项目中各工序的机动时间, 找出关键路线, 提示决策者将注意力集中到关键路线上^[4], 并借助相关方法测度各工序的

重要性^[5], 从而提高项目管理者决策能力和管理水平. 如果前提条件不同, 求项目最小费用的难度也有很大差异. 在经典问题中, 工序之间只有单一严格优先关系, 任意工序必须在所有紧前工序都结束后才能开始, 可用CPM网络表示, 那么很简单, 求项目的最小费用, 只需令所有工序都选用费用最小的工期即可. 但在实际中, 以上只是特殊情况, 对于工序之间具有“广义优先关系”(generalized precedence relations, GPRs)的普遍情况, 求项目的最小费用就成为必须面对的新问题, 并且具有相当的难度, 因为很多工序不能再选择费用最小的工期, 否则无法满足优先关系, 导致项目不可行, 谈论总费用和总工期也将没有意义, 而选择怎样的工期还要取决于其它多数工序和优先关系.

例如, 图1表示一个项目中的3个工序*i*、*j*和*k*, 其最小费用工期分别为10、10和40天, 优先关系是: 工序*k*开始后最多2天, 工序*i*必须开始; 工序*i*结束后最多2天, 工序*j*必须开始; 工序*j*结束

① 收稿日期: 2011-09-08; 修订日期: 2012-04-23.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70671040; 71171079).

作者简介: 苏志雄(1983), 男, 山西朔州人, 博士生. Email: suzhixiongbaner@126.com

后最多 5 天, 工序 k 必须结束. 如果它们都用费用最小的工期(图 1), 则工序 k 无法在工序 j 结束后 5 天内结束, 破坏了优先关系, 项目不可行. 由于优先关系不能改变, 因此只能调整工序的工期来满足优先关系. 在图 1 中, 只有将工序 k 的工期缩短, 或者将工序 i 或 j 的工期延长, 才可能使项目可行, 进而在此前提下求最小总费用.

图 1 所示的只是最简单的 GPRs, 可以直接调整工序的工期, 逐步试探来得到最小总费用. 但

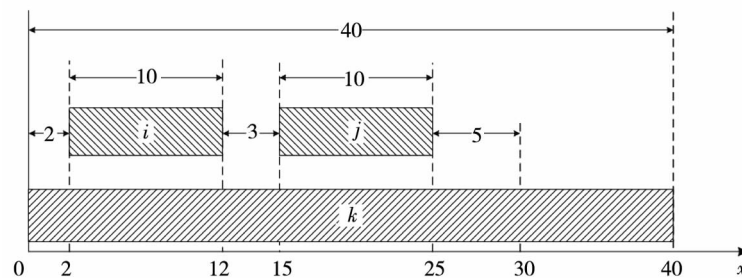


图 1 工序时间示意图

Fig. 1 Times of activities

GPRs 网络是当前通用的表示 GPRs 的有效方式, 可以表示工序之间、以及工序与项目之间在开始和结束时间上的各种优先关系, 弥补了 CPM 网络只能表示工序之间单一优先关系的缺陷. Roy^[6] 和 Elmaghraby^[7] 最早对 GPRs 网络进行了引入和研究. Kerbosch 和 Schell^[8] 在 Roy 的研究基础上, 首次对 GPRs 提出简单适用的表示方式. 随后, Elmaghraby 与 Kamburowski^[9,10] 对 GPRs 网络的研究取得了突破性的成果, 并发表于世界管理学权威期刊《Management Science》^[10], 是 GPRs 网络发展的里程碑, 在该领域内引起了巨大轰动. 首先, 他们通过引入反方向负权弧, 巧妙地将 GPRs 全部表示在网络中, 给出了完备的 GPRs 网络, 并已在国际上通用; 其次, 他们发现了奇异关键工序, 其工期的变化与总工期的变化相反, 改变了对关键工序的传统认识, 开辟了 GPRs 网络的新领域; 另外, 他们研究了 GPRs 下的时间-费用权衡问题, 给出了求解方法. 但是他们没有深入研究如何求得 GPRs 下的项目最小费用, 因此上述求解方法缺乏完善, 至今依然存在着这一空缺.

继 Elmaghraby 与 Kamburowski 之后, 对于

是当工序众多, 优先关系错综复杂时, 通过直接调整工期来求得项目的最小费用是十分困难的, 因为工序的工期和优先关系之间都是相互影响的, 很可能在使某处满足优先关系的同时, 又会导致另一处不满足优先关系, 并且费用最小的目标更是难以实现. GPRs 是导致上述困难存在的根源, 因此, 本文选择从 GPRs 的表达方式入手, 利用 GPRs 网络来设计简单有效的求解项目最小费用问题的方法.

GPRs 网络的研究主要集中在项目调度等方面. Reyck 和 Herroelen^[11,12] 用分支定界法求解 GPRs 下的资源限制项目调度问题. Cesta, Oddi 和 Smith^[13] 研究了带有时间窗的项目调度问题, 给出了基于约束的求解方法. Neumann 和 Zhan^[14] 研究了在固定资源限制条件下, 含最小与最大时间延期约束的项目工期最小化问题, 给出了启发式方法求解. Sakellariopoulos 和 Chassiakos^[15,16] 研究了 GPRs 下的时间-费用权衡问题, 提出用线性/整数规划方法求最佳时间-费用曲线, 以及最小成本进度. Valls 和 Lino^[17] 在含最小时间延期约束的单代号网络中进行了关键性分析. Stefan 和 Pawel^[18] 分析了工序间带有时距的网络计划中关键性问题的复杂性. Najafi, Niaki 和 Shahsavari^[19] 研究了带有现金流与 GPRs 的资源投资问题, 提出了一种协调参数的遗传算法. 求解 GPRs 下的项目调度问题, 项目的最小费用是关键所在, 但是目前缺乏简单有效的方法来求得, 因此上述问题依然难以得到有效解决.

此外, 一些学者致力于研究 GPRs 网络的时间参数及计算方法. Didier, Hélène 和 Jérôme^[20] 在带有时距的工序网络中, 给出了计算工序最迟

开始时间和机动时间的方法. Haji 和 Hassan^[21] 进一步深入该项研究,在带最小延期约束时距的网络计划中,给出了计算工序最迟开始时间的方法.

本文主要研究 GPRs 下的项目最小费用问题,通过分析 Elmaghraby 与 Kamburowski^[10] 提出的 GPRs 表示法,建立该问题的数学模型,并通过偶变换,将该模型等效转化为特殊的最小费用最大流模型.只要运用现有算法就能求解出该最小费用最大流模型的最优解,进而根据初始对偶关系,可以相应地求得 GPRs 下的项目最小费

用及其对应的工期,为 GPRs 下的各类调度问题的最终解决提供了理论依据.

1 GPRs 网络及奇异工序

1.1 GPRs 网络

GPRs 包含工序之间的“最小”和“最大”两类时间约束,具体类型如表 1 所示.

Elmaghraby 与 Kamburowski 提出的 GPRs 网络是当前国际通用的 GPRs 的表示法,特点如下:

表 1 GPRs 的类型

Table 1 Kinds of GPRs

| GPRs 的类型 | 简称 | 最小时间约束 | 最大时间约束 |
|----------|----|--------------------------------|--------------------------------|
| 起始—开始 | BS | 项目开始后最少 d 天,工序 i 才能开始 | 项目开始后最多 d 天,工序 i 必须开始 |
| 起始—结束 | BF | 项目开始后最少 d 天,工序 i 才能结束 | 项目开始后最多 d 天,工序 i 必须结束 |
| 开始—终止 | SE | 工序 i 开始后最少 d 天,项目才能结束 | 工序 i 开始后最多 d 天,项目必须结束 |
| 结束—终止 | FE | 工序 i 结束后最少 d 天,项目才能结束 | 工序 i 结束后最多 d 天,项目必须结束 |
| 开始—开始 | SS | 工序 i 开始后最少 d 天,工序 j 才能开始 | 工序 i 开始后最多 d 天,工序 j 必须开始 |
| 开始—结束 | SF | 工序 i 开始后最少 d 天,工序 j 才能结束 | 工序 i 开始后最多 d 天,工序 j 必须结束 |
| 结束—开始 | FS | 工序 i 结束后最少 d 天,工序 j 才能开始 | 工序 i 结束后最多 d 天,工序 j 必须开始 |
| 结束—结束 | FF | 工序 i 结束后最少 d 天,工序 j 才能结束 | 工序 i 结束后最多 d 天,工序 j 必须结束 |

1) 如果共有 n 个工序,则网络中共有 $2n + 2$ 个节点,其中起点为 (0) ,终点为 $(2n + 1)$;

2) 每个工序 k 用方向相反的弧 $(2k - 1, 2k)$ 和 $(2k, 2k - 1)$ 表示,其权数分别为 $w_{2k-1, 2k} = d_k$, $w_{2k, 2k-1} = -d_k$, d_k 为该工序的工期,且同时反向变化,即若 $w'_{2k-1, 2k} = w_{2k-1, 2k} + \theta$, 则 $w'_{2k, 2k-1} = w_{2k, 2k-1} - \theta$;

3) 每个优先关系用一个弧表示,其中表示最小时间约束的弧与约束关系同向,弧权数等于约束值,而表示最大时间约束的弧与约束关系反向,弧权数等于约束值的相反数.

4) 表示优先关系的弧的权数是固定值.

鉴于上述特点, GPRs 网络与表示单一时间约束的 CPM 网络差别迥异,并且要复杂得多,例如图 2 所示的就是一个只包含 3 个工序的 GPRs 网络,各工序之间的时间约束如表 2 所示,其中 s_i 和

f_i 分别表示工序 i 的开始时间和结束时间.

表 2 工序之间的 GPRs

Table 2 GPRs between activities

| 工序对 | 时间约束类型 | 时间约束 |
|-----------|--------|--------------------|
| 起点, 工序(1) | BS | $0 \leq s_1$ |
| 起点, 工序(2) | BS | $0 \leq s_2$ |
| 工序(1) (2) | FS | $f_1 + 4 \leq s_2$ |
| | SF | $s_1 + 8 \leq f_2$ |
| 工序(1) (3) | SS | $s_1 + 1 \leq s_3$ |
| | FF | $f_3 \leq f_1 + 3$ |
| 工序(2) (3) | FF | $f_2 \leq f_3 + 7$ |
| 工序(5) 终点 | FE | $f_2 + 1 \leq T$ |
| 工序(7) 终点 | FE | $f_3 \leq T$ |

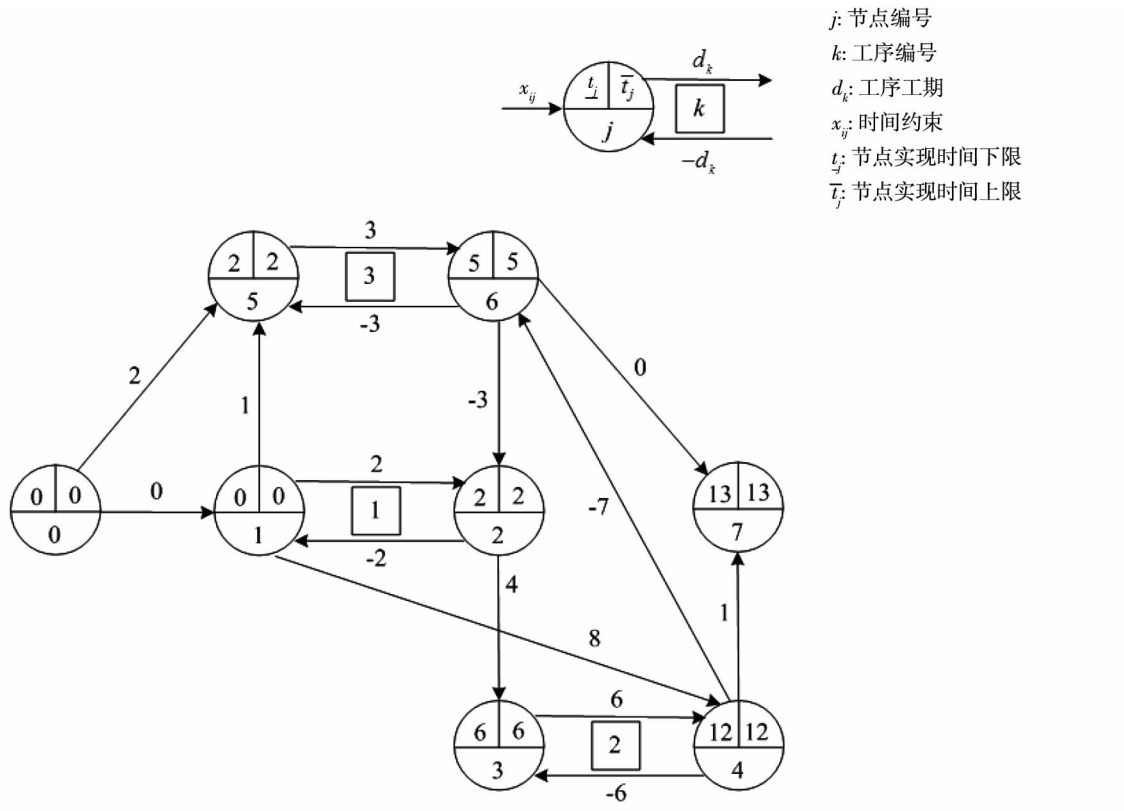


图 2 GPRs 网络
Fig. 2 GPRs network

1.2 奇异工序

在 CPM 网络中,如果缩短任意工序的工期,则经过该工序的路线必然同步缩短,反之亦然。但是在 GPRs 网络中,如果缩短某些工序的工期,经过它们的路线长度却可能不变,甚至还会延长,这些工序就称为奇异工序。

奇异工序不仅包括逆工序(例如文献 [9, 10] 发现的奇异关键工序),本文还发现了中性工序。

1.2.1 中性工序

GPRs 网络中,如果某工序的工期不论缩短还是延长,经过该工序的某些路线的长度都不变化,则该工序就称为这些路线的中性工序。

例如,对于图 2 中经过工序 1 的路线 $\mu = (0) \rightarrow (1) \rightarrow (2) \rightarrow (1) \rightarrow (5) \rightarrow (6) \rightarrow (7)$,若将工序 1 的工期从 2 缩短到 1,则弧 (1, 2) 的权数由 2 变为 1,即减小 1,而弧 (2, 1) 的权数由 -2 变为 -1,即增大 1,从而路线 μ 上所有弧权数之和即路长不变,因此工序 1 就是该路线 μ 的中性工序。

1.2.2 逆工序

GPRs 网络中,如果将某工序的工期缩短,经

过该工序的某些路线反而延长;相反,如果将该工序的工期延长,这些路线反而缩短,则该工序就称为这些路线的逆工序。

例如,对于图 2 中经过工序 1 的路线 $\mu = (0) \rightarrow (5) \rightarrow (6) \rightarrow (2) \rightarrow (1) \rightarrow (4) \rightarrow (7)$,如果将工序 1 的工期从 2 缩短到 1,则弧 (2, 1) 的权数就由 -2 变为 -1,即增大 1,其它弧的权数不变,从而该路线 μ 的路长增大 1,因此工序 1 就是该路线 μ 的逆工序。

2 GPRs 下的项目最小费用问题

GPRs 下的项目最小费用问题可描述为,设项目中各工序的工期与费用之间满足一定的函数关系,并且工序之间、以及工序与项目之间在开始和结束时间上存在多种优先关系(GPRs)的约束,那么在保证满足这些优先关系的前提下,如何安排各工序的工期,使得总费用(即各工序的费用之和)最小,并求得总费用最小的总工期。

若不存在 GPRs ,工序间只有单一的严格优先关系 ,那么该问题就非常简单 ,只需令所有工序都选用费用最小的工期即可 ,总费用必然最小 .但是在 GPRs 下 ,该问题在多数时候将变得十分复杂 ,其主要原因是各工序在选用工期时必须满足各类优先关系的约束 ,否则会破坏项目自身的可行性 ,讨论总费用和总工期也将没有任何意义 .

如果将该问题用 GPRs 网络表示 ,那么保证项目可行 ,即满足优先关系 ,指的是保证 GPRs 网络中没有正回路 ,因为按时间参数计算法则 ,计算包括总工期在内的时间参数实质上就是计算网络中相应的最大路长 ,例如总工期就是从起点(0)到终点(2n + 1)的最大路长 .如果存在正回路 ,则由于回路可以反复通过 ,使得正回路所在路线的最大路长为无穷大 ,因而总工期也是无穷大 ,显然不可行 .例如 ,将图 1 所示的工序及相互间的优先关系用 GPRs 网络表示 ,就得到图 3 ,图中存在正回路 $\mu_{loop} = (0) \rightarrow (5) \rightarrow (6) \rightarrow (4) \rightarrow (3) \rightarrow (2) \rightarrow (1) \rightarrow (0)$,其长度为 15 ,也说明了各工序所选用的工期无法满足优先关系 ,与图 1 的结论一致 .

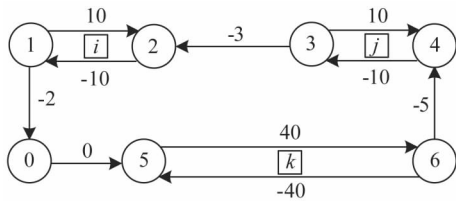


图 3 GPRs 网络
Fig. 3 GPRs network

显然 ,要使总费用最小 ,绝不能简单地令所有工序都选用费用最小的工期 .例如 ,令图 2 中的工序都选用费用最小的工期 ,就得到图 4 ,该图中存在多条正回路 ,如 $\mu_{loop} = (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (6) \rightarrow (2)$,其长度为 3 ,从而导致从起点(0)到终点(7)的最大路长为 $+\infty$,说明项目此时不可行 .可见 ,如果工序都选用费用最小的工期 ,虽然会使总费用最小 ,但是却可能破坏项目自身的可行性 .

因此 ,如果借助 GPRs 网络 ,GPRs 下的项目最小费用问题就可以描述为 ,如何安排各工序的工期 ,能够在网络中不出现正回路的前提下 ,使得总费用最小 .另外也可以描述为 ,在总费用最小

且存在正回路的 GPRs 网络中 ,如何缩短或延长某些工序的工期 ,使正回路消失 ,并且总费用增加最少 .

上述描述将 GPRs 下的项目可行性问题转化为网络中的正回路问题 ,直观性强 .但是若直接从回路的角度考虑同样十分繁琐 ,甚至无法求解 ,其困难主要表现在两个方面 ,第一 ,GPRs 网络中的回路众多 ,且相互交叉 ,相互影响 ,要使所有回路都非正将十分困难 ,更难以实现费用最小化 ;第二 ,在 GPRs 下 ,可能存在奇异工序 ,如 1.2 节提出的中性工序和逆工序 ,尤其是逆工序 ,其工期变短 ,经过它的路线反而变长 ,反之亦然 ,分析该类工序的工期无疑更为困难 .

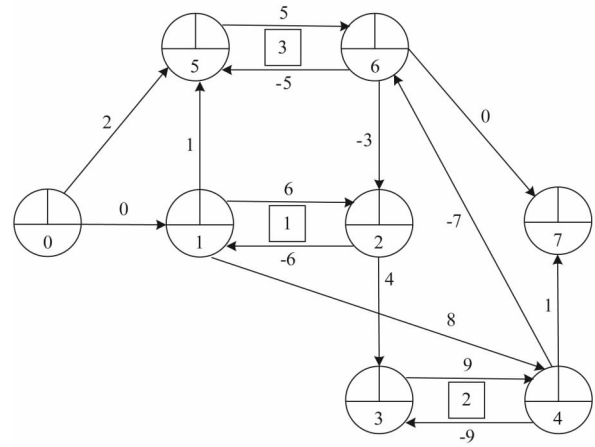


图 4 GPRs 网络
Fig. 4 GPRs network

因此 ,本文需要采用新的思路 ,利用 GPRs 网络的特点 ,设计新的简单方法求解 GPRs 下的项目最小费用问题 .

3 建立 GPRs 网络的最小费用模型

本文首先建立该问题的数学规划模型 ,即 GPRs 网络的最小费用模型 .假设 GPRs 网络 G 中 ,有 n 个工序 ,各工序 k 的工期 $d_k \in [l_k, \mu_k]$,并且其费用 $g_k(x_k)$ 是定义域为 $[l_k, \mu_k]$ 的函数 ,因此 ,最小费用模型的目标函数为

$$\min z = \sum_{k=1}^n g_k(d_k) \tag{1}$$

设网络中各节点(i)的实现时间为 t_i ,则 $t_j \geq t_i + d_{ij}$.根据 GPRs 网络的特点 2 $d_k = t_{2k} - t_{2k-1}$,

所以可建立其最小费用模型如下

$$\min z = \sum_{k=1}^n g_k(t_{2k} - t_{2k-1}) \quad (2)$$

$$\begin{cases} t_j - t_i \geq d_{ij} & \forall (i, j) \in \bar{A} \\ t_{2k} - t_{2k-1} \geq l_k \\ t_{2k} - t_{2k-1} \leq u_k \end{cases} \quad (3)$$

其中 A 表示 G 中工序的集合, 相应地 \bar{A} 表示 G 中优先关系的集合.

在经典问题中, 工序的费用随工期的延长而单调递减. 但实际中, 费用和工期之间可能不满足单调递减性. 假设各工序 k 除了最长工期 u_k 和最短工期 l_k 以外, 还有最小费用工期 m_k . 简单起见, 假设工序 k 的费用函数 $g_k(d_k)$ 是分段线性函数, 有两个线性部分, 当 $d_k \in [l_k, m_k]$ 时 $g_k(d_k)$ 线性递减, 而当 $d_k \in (m_k, \mu_k]$ 时 $g_k(d_k)$ 线性递增. 为了使项目可行, 且总费用最小, 工序 k 的工期可能 $d_k \in [l_k, m_k]$, 也可能 $d_k \in (m_k, \mu_k]$. 分别将 $[l_k, m_k]$ 和 $(m_k, \mu_k]$ 中直线的斜率乘以 -1 后, 得 a_k 和 b_k , $a_k \geq 0, b_k \leq 0$, 称之为边际费用率, 如图 5 所示.

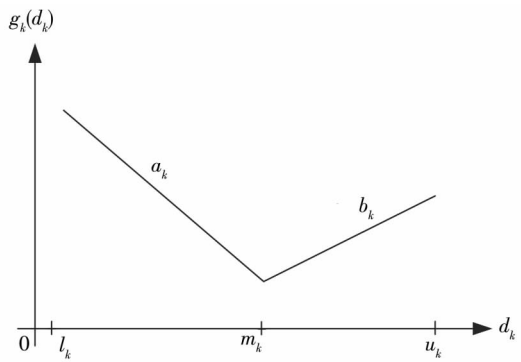


图 5 工序的工期-费用函数

Fig. 5 Duration-cost function of activity

由于各工序费用函数 g_k 是分段线性的, 针对 g_k 的两个线性分段, 引入变量 x_k 和 y_k , 从而可以用 $x_k + y_k$ 来代替 $d_k = t_{2k} - t_{2k-1}$, 因此式(2)和式(3)表示的模型可转化为如下线性规划模型

$$\max z' = \sum_{k=1}^n (a_k x_k + b_k y_k) \quad (4)$$

$$\begin{cases} t_j - t_i \geq d_{ij} & \forall (i, j) \in \bar{A} \\ x_k + y_k = t_{2k} - t_{2k-1} \\ l_k \leq x_k \leq m_k \\ 0 \leq y_k \leq u_k - m_k \end{cases} \quad (5)$$

很显然, 该模型中, 如果 $x_k \leq m_k$, 则 $y_k = 0$; 如果 $y_k > 0$, 则 $x_k = m_k$.

对于如何求解该模型, 由于 GPRs 网络中共有 n 个工序和 $2n + 2$ 个节点, 并且每个工序 k 有两个自变量 x_k 和 y_k , 每个节点 (i) 有一个自变量 t_i , 所以该模型共有 $4n + 2$ 个自变量. 如果用线性规划的方法直接求解该模型, 如内点法、外点法、单纯形法等, 必然十分困难. 特别是当 n 较大时.

为了能简单有效地求解该模型, 有必要从新的角度出发. 本文利用初始对偶原理, 将该模型转化为简单模型, 从而能用简单方法求得最优解.

4 最小费用模型的对偶模型及转化

4.1 对偶模型

GPRs 网络的最小费用模型可通过对偶转化为特殊的最小费用最大流模型, 如下:

(1) 将网络 G 转化为网络 G^* .

① 将表示工序 k 的正向弧 $(2k - 1, 2k)$ 和反向弧 $(2k, 2k - 1)$ 通过添加节点 $(2n + k + 1)$ 转化为正向弧 $(2k - 1, 2n + k + 1)$ 、 $(2n + k + 1, 2k)$ 和反向弧 $(2k, 2n + k + 1)$ 、 $(2n + k + 1, 2k - 1)$, $k = 1, 2, \dots, n$, 并令每个弧都有两个权数 w_{ij} 和 c_{ij} , 其值为 $w_{2k-1, 2n+k+1} = -l_k, c_{2k-1, 2n+k+1} = +\infty$, $w_{2n+k+1, 2k} = 0, c_{2n+k+1, 2k} = +\infty, w_{2k, 2n+k+1} = u_k - m_k, c_{2k, 2n+k+1} = +\infty, w_{2n+k+1, 2k-1} = m_k, c_{2n+k+1, 2k-1} = +\infty$, 如图 6 所示.

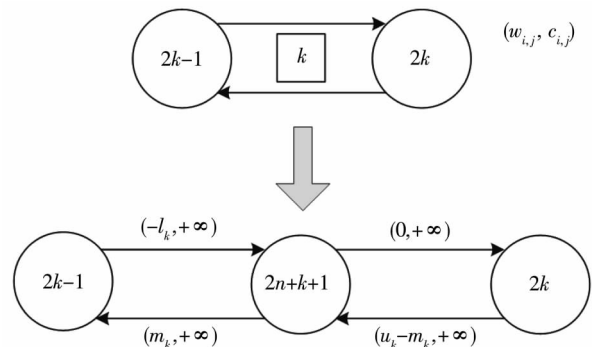


图 6 工序表示方法的转化

Fig. 6 Change representation of activity

② 添加节点 (s) 和 (t) , 以及弧 $(s, 2n + k +$

1) $(2k-1, t)$ 和 $(2k, t)$ $k=1, 2, \dots, n$, 令这些弧有两个权数 w_{ij} 和 c_{ij} , 值为 $w_{s, 2n+k+1} = 0$, $c_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$, $w_{2k-1, t} = 0$, $c_{2k-1, t} = a_k$, $w_{2k, t} = 0$, $c_{2k, t} = -b_k$.

③ 对于原先表示网络 G 中优先关系的弧 $(i, j) \in \bar{A}$, 令其也有两个权数 w_{ij} 和 c_{ij} , 其值为 $w_{ij} = -d_{ij}$, $c_{ij} = +\infty$.

将网络 G 经过上述转化后, 形成网络 G^* .

(2) 构建网络 G^* 的最小费用最大流模型.

在网络 G^* 中, 设 (s) 为起点, (t) 为终点, f_{ij} 、 w_{ij} 和 c_{ij} 分别表示弧 (i, j) 的流量、单位流量费用和容量, 建立如下模型

$$\min \omega = \sum_{(i,j) \in G^*} w_{ij} f_{ij} \quad (6)$$

$$\max \omega' = v(f)$$

$$\begin{cases} \sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = \begin{cases} v(f) & i = s \\ 0 & i \neq s, t \\ -v(f) & i = t \end{cases} \\ 0 \leq f_{ij} \leq c_{ij} \end{cases} \quad (7)$$

很明显, 该模型的特殊之处主要在于, 除了弧 $(s, 2n+k+1)$ 、 $(2k-1, t)$ 和 $(2k, t)$ $k=1, 2, \dots, n$, 所有弧均没有容量限制, 并且弧的单位流量费用可能为正、负、或零.

对于求解最小费用最大流模型, 当前已有很多简便有效的方法, 如网络流算法等, 本文在此不作具体论述. 该模型是由原最小费用模型经过对偶转化而来, 两模型的最优解有密切联系, 如下:

(1) 如果该模型求得的最大流为 $\max v(f) = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$, 则通过该模型的最优解 f_{ij}^* , 利用初始对偶关系可求得初始模型的最优解 t_i^* , 进而求得各工序 k 的最优工期 $d_k^* = t_{2k}^* - t_{2k-1}^*$;

(2) 如果该模型求得的最大流为 $\max v(f) < \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$, 则原最小费用模型无最优解, 即在 GPRs 条件下, 无论各工序选用怎样的工期, 都无法满足既定的优先关系, 项目不可行.

将 GPRs 网络的最小费用模型转化为与之对偶的特殊最小费用最大流模型后, 可以用很简单

的方法求解, 不需要再使用线性规划的方法, 因此, 经过上述转化, 有效降低了 GPRs 下的项目最小费用问题的求解难度, 提高了计算的效率和精度.

4.2 对偶转化的过程及分析

根据式(4)和式(5)及其满足的条件, 针对工序 (k) , 引入变量 t_{2n+k+1} , 使得 $t_{2n+k+1} = x_k + t_{2k-1}$, $t_{2k} = y_k + t_{2n+k+1}$, 代入式(4)和式(5)得

$$\max z' = \sum_{k=1}^n [a_k (t_{2n+k+1} - t_{2k-1}) + b_k (t_{2k} - t_{2n+k+1})] \quad (8)$$

$$\begin{cases} t_j - t_i \geq d_{ij} & \forall (i, j) \in \bar{A} \\ l_k \leq t_{2n+k+1} - t_{2k-1} \leq m_k \\ 0 \leq t_{2k} - t_{2n+k+1} \leq u_k - m_k \end{cases} \quad (9)$$

建立该模型的对偶模型. 首先根据约束条件给出对偶变量, 如下

$$\max z' = \sum_{k=1}^n [a_k (t_{2n+k+1} - t_{2k-1}) + b_k (t_{2k} - t_{2n+k+1})]$$

| 约束条件 | 对偶变量 |
|--------------------------------------|--------------------|
| $t_i - t_j \leq -d_{ij}$ | f_{ij} |
| $t_{2k-1} - t_{2n+k+1} \leq -l_k$ | $f_{2k-1, 2n+k+1}$ |
| $t_{2n+k+1} - t_{2k-1} \leq m_k$ | $f_{2n+k+1, 2k-1}$ |
| $t_{2n+k+1} - t_{2k} \leq 0$ | $f_{2n+k+1, 2k}$ |
| $t_{2k} - t_{2n+k+1} \leq u_k - m_k$ | $f_{2k, 2n+k+1}$ |

根据上述对偶变量可知 f_{ij} 与弧 (i, j) 相对应, 弧 (i, j) 在网络 G 中表示工序间的优先关系; 而 $f_{2k-1, 2n+k+1}$ 、 $f_{2n+k+1, 2k-1}$ 、 $f_{2n+k+1, 2k}$ 和 $f_{2k, 2n+k+1}$ 分别应和弧 $(2k-1, 2n+k+1)$ 、 $(2n+k+1, 2k-1)$ 、 $(2n+k+1, 2k)$ 和 $(2k, 2n+k+1)$ 相对应. 但是在网络 G 中, 由于不存在节点 $(2n+k+1)$, 故不存在上述弧; 并且由于没有 $f_{2k-1, 2k}$ 和 $f_{2k, 2k-1}$, 故没有对偶变量与 G 中表示工序的弧 $(2k-1, 2k)$ 和 $(2k, 2k-1)$ 相对应, 因此网络 G 虽然与式(4)和式(5)表示的初始模型对应, 但必无法与其对偶模型对应, 需进行转化. 因此, 应在 G 中添加节点 $(2n+k+1)$, 并将弧 $(2k-1, 2k)$ 和 $(2k, 2k-1)$ 转化为弧 $(2k-1, 2n+k+1)$ 、 $(2n+k+1, 2k-1)$ 、 $(2n+k+1, 2k)$ 和 $(2k, 2n+k+1)$, 如图 7 所

示,从而得到网络 G' :

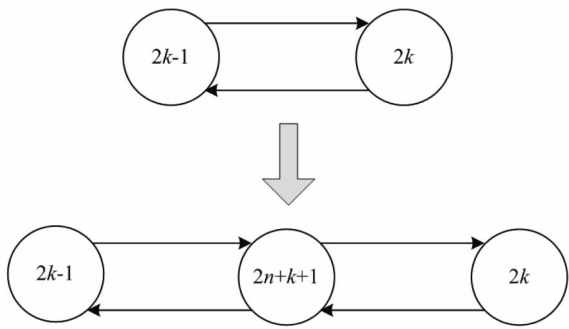


图 7 弧的转化

Fig. 7 Change representation of arc

根据初始对偶变换法则,建立式(8)和式(9)所表示模型的对偶模型如下

$$\min \omega = \sum_{(i,j) \in \bar{A}} (-d_{ij} f_{ij}) + \sum_{k=1}^n (-l_k f_{2k-1, 2n+k+1}) + \sum_{k=1}^n ((u_k - m_k) f_{2k, 2n+k+1}) + \sum_{k=1}^n (m_k f_{2n+k+1, 2k-1}) \quad (10)$$

$$\begin{cases} \sum_j f_{0j} - \sum_j f_{j0} = 0 \\ \sum_j f_{2k-1,j} - \sum_j f_{j,2k-1} = -a_k \\ \sum_j f_{2n+k+1,j} - \sum_j f_{j,2n+k+1} = a_k - b_k \\ \sum_j f_{2k,j} - \sum_j f_{j,2k} = b_k \\ \sum_j f_{2n+1,j} - \sum_j f_{j,2n+1} = 0 \\ f_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

式(10)可转化为下式

$$\min \omega = \sum_{(i,j) \in G'} w_{ij} f_{ij} \quad (12)$$

其中 $w_{ij} = -d_{ij}, \forall (i,j) \in \bar{A}; w_{2k-1, 2n+k+1} = -l_k; w_{2k, 2n+k+1} = u_k - m_k; w_{2n+k+1, 2k-1} = m_k$.

式(11)可转化为下式

$$\begin{cases} \sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = \begin{cases} 0 & i = 0, 2n+1 \\ -a_k & i = 2k-1 \\ b_k & i = 2k \\ a_k - b_k & i = 2n+k+1 \end{cases} \\ f_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

来看著名的“流量平衡条件”

$$\begin{cases} \sum_i f_{ij} - \sum_i f_{ji} = \begin{cases} v(f) & i = 1 \\ 0 & i \neq 1, n \\ -v(f) & i = n \end{cases} \\ f_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

式(13)与式(14)的区别在于,式(14)表示所有流量都从一个起点(1)流出,最终都流入到一个终点(n);而式(13)中,由于 $-a_k \leq 0, b_k \leq 0, a_k - b_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$,所以表示所有流量从 n 个“起点”流出,在网络 G' 中为节点 $(2n+k+1)$,流出流量 $a_k - b_k$,最终都流入到 $2n$ 个“终点”,在网络 G' 中为节点 $(2k-1)$ 和 $(2k)$,流入流量 a_k 和 $-b_k$.因此,给网络 G' 添加虚拟起点(s)和终点(t),添加虚拟弧 $(s, 2n+k+1)$,流量为 $f_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$,即流入节点 $(2n+k+1)$ 的流量也为 $a_k - b_k$,使得该节点的流量达到平衡;添加虚拟弧 $(2k-1, t)$,流量为 $f_{2k-1, t} = a_k$,即流出节点 $(2k-1)$ 的流量也为 a_k ,使得该节点的流量也达到平衡;同理,添加虚拟弧 $(2k, t)$,流量为 $f_{2k, t} = -b_k$,即流出节点 $(2k)$ 的流量也为 $-b_k$,使得该节点的流量也达到平衡,即

$$\begin{cases} \sum_j f_{2n+k+1,j} - \sum_j f_{j,2n+k+1} = 0 \\ \sum_j f_{2k-1,j} - \sum_j f_{j,2k-1} = 0 \\ \sum_j f_{2k,j} - \sum_j f_{j,2k} = 0 \end{cases}$$

得到网络 G^* .这样,从 G^* 的起点(s)流出的流量为 $\sum_j f_{sj} = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$,而流入 G^* 的终点(t)的流量也为 $\sum_j f_{jt} = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$,其它节点的流量平衡.因此,式(13)可转化为下式

$$\begin{cases} \sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) & i = s \\ 0 & i \neq s, t \\ -\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) & i = t \end{cases} \\ f_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k \\ f_{2k-1, t} = a_k \\ f_{2k, t} = -b_k \end{cases} \quad (15)$$

由于新添加的虚拟弧 $(s, 2n+k+1), (2k-$

1 t) 和 $(2k t)$ 在网络 G^* 中不存在, 所以根据 G^* 建立的目标函数应与式 (12) 相同. 可以将这三类弧的流量 $f_{s, 2n+k+1}$ 、 $f_{2k-1, t}$ 和 $f_{2k, t}$ 的系数都设为零, 即

$$w_{s, 2n+k+1} = w_{2k-1, t} = w_{2k, t} = 0 \quad (16)$$

然后根据 G^* 建立与式 (12) 相同的目标函数

$$\begin{aligned} \min \omega &= \sum_{(i, j) \in G^*} w_{ij} f_{ij} \\ &= \sum_{(i, j) \in G^*} w_{ij} f_{ij} + \sum_k (0f_{s, 2n+k+1} + 0f_{2k-1, t} + 0f_{2k, t}) \\ &= \sum_{(i, j) \in G^*} w_{ij} f_{ij} \end{aligned} \quad (17)$$

由式 (15) 式 (17) 组成的模型记为模型 1

$$\begin{aligned} \min \omega &= \sum_{(i, j) \in G^*} w_{ij} f_{ij} \\ &\begin{cases} \sum_j f_{ij} - \sum_j f_{ji} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) & i = s \\ 0 & i \neq s, t \\ -\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) & i = t \end{cases} \\ f_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k \\ f_{2k-1, t} = a_k \\ f_{2k, t} = -b_k \\ w_{s, 2n+k+1} = w_{2k-1, t} = w_{2k, t} = 0 \\ f_{ij} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

在推导过程中可以发现, 除了弧 $(s, 2n+k+1)$ 、 $(2k-1, t)$ 和 $(2k, t)$ 的流量要求必须达到 $f_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$ 、 $f_{2k-1, t} = a_k$ 和 $f_{2k, t} = -b_k$ 以外, 其余弧的流量均没有限制.

本文将弧的流量限制转化为弧的容量限制, 即令弧 $(s, 2n+k+1)$ 、 $(2k-1, t)$ 和 $(2k, t)$ 的容量分别为 $c_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$ 、 $c_{2k-1, t} = a_k$ 和 $c_{2k, t} = -b_k$, 而令其余弧 (i, j) 的容量 $c_{ij} = +\infty$, 进而将该模型进一步变形为标准的最小费用最大流模型, 记为模型 2

$$\begin{aligned} \min \omega &= \sum_{(i, j) \in G^*} w_{ij} f_{ij} \\ \max \omega' &= v(f) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sum_i f_{ij} - \sum_i f_{ji} = \begin{cases} v(f) & i = s \\ 0 & i \neq s, t \\ -v(f) & i = t \end{cases} \\ f_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

其中 $\forall (i, j) \in \bar{A}, w_{ij} = -d_{ij}, c_{ij} = +\infty; w_{2k-1, 2n+k+1} = -l_k, c_{2k-1, 2n+k+1} = +\infty; w_{2n+k+1, 2k} = 0, c_{2n+k+1, 2k} = +\infty; w_{2k, 2n+k+1} = u_k - m_k, c_{2k, 2n+k+1} = +\infty; w_{2n+k+1, 2k-1} = m_k, c_{2n+k+1, 2k-1} = +\infty; w_{s, 2n+k+1} = 0, c_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k; w_{2k-1, t} = 0, c_{2k-1, t} = a_k; w_{2k, t} = 0, c_{2k, t} = -b_k.$

由于 $f_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$ 、 $f_{2k-1, t} = a_k$ 和 $f_{2k, t} = -b_k$ 是严格限制, 而 $c_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$ 、 $c_{2k-1, t} = a_k$ 和 $c_{2k, t} = -b_k$ 则表示 $f_{s, 2n+k+1} \leq c_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$ 、 $f_{2k-1, t} \leq c_{2k-1, t} = a_k$ 和 $f_{2k, t} \leq c_{2k, t} = -b_k$, 是非严格限制, 因此模型 1 和 2 并非完全等价. 本文需对模型 2 进行修正, 使其与模型 1 完全等价.

对于模型 1, 该模型具有可行解的条件是满足 $f_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$ 、 $f_{2k-1, t} = a_k$ 和 $f_{2k, t} = -b_k$. 由于该模型是与网络 G 相对应的原最小费用模型 (即式 (4) 和 (5)) 的对偶模型, 若其在 $f_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$ 、 $f_{2k-1, t} = a_k$ 和 $f_{2k, t} = -b_k$ 条件下求得最优解, 则相应地可根据初始对偶关系求得原最小费用模型的最优解, 即原问题的最优解; 若该模型无可行解, 说明原模型的目标函数值为

$$\max z' = \sum_{k=1}^n (a_k x_k + b_k y_k) = +\infty$$

可知存在 $a_k x_k + b_k y_k = +\infty$, 即 $x_k = +\infty$ 或 $y_k = +\infty$, 则对应的总工期也是 $+\infty$, 说明原网络 G 在任何情况下都存在正回路, 表示项目不存在可行状态.

而对于模型 2, 必然存在可行解. 另外, 该模型的最优解必然对应流量网络 G^* 的最大流. 由于 $c_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$ 、 $c_{2k-1, t} = a_k$ 、 $c_{2k, t} = -b_k$, 说明若最大流 $\max v(f) = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$, 则 $f_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$ 、 $f_{2k-1, t} = a_k$ 、 $f_{2k, t} = -b_k$, 与模型 1 相同. 根据最优解以及初始对偶关系可求得原问题的最优解; 但如果 $\max v(f) < \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$, 则必然不满足所有 $f_{s, 2n+k+1} = a_k - b_k$ 、 $f_{2k-1, t} = a_k$ 和 $f_{2k, t} = -b_k$. 根据模型 1, 说明无法求得原问题的最优解, 项目在任何时候都不可行.

因此, 要使模型 2 与模型 1 等价, 需要对模型 2 的最优解进行判断, 如下:

1) 如果模型 2 对应的最大流为 $\max v(f) =$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$$

则通过该模型的最优解, 以及初始对偶关系, 可求得原问题的最优解;

2) 如果模型 2 对应的最大流为 $\max v(f) <$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$$

则原问题无最优解, 项目在任何时候都不可行.

模型 2 就是 4.1 节中式 (6) 和式 (7) 表示的

最小费用最大流模型, 它与式 (4) 和式 (5) 表示的最小费用模型满足初始对偶关系.

5 应用举例

图 8 表示工序之间具有广义优先关系 (GPRs) 的工程项目网络图, 试求该项目的最小费用. 其中 l_k , m_k 和 u_k 分别表示工序 k 的最短工期、最小费用工期和最长工期, a_k 和 b_k 分别表示工序 k 在工期 $[l_k, m_k]$ 和 $(m_k, u_k]$ 的边际费用率, $k = 1, 2, \dots, 8$.

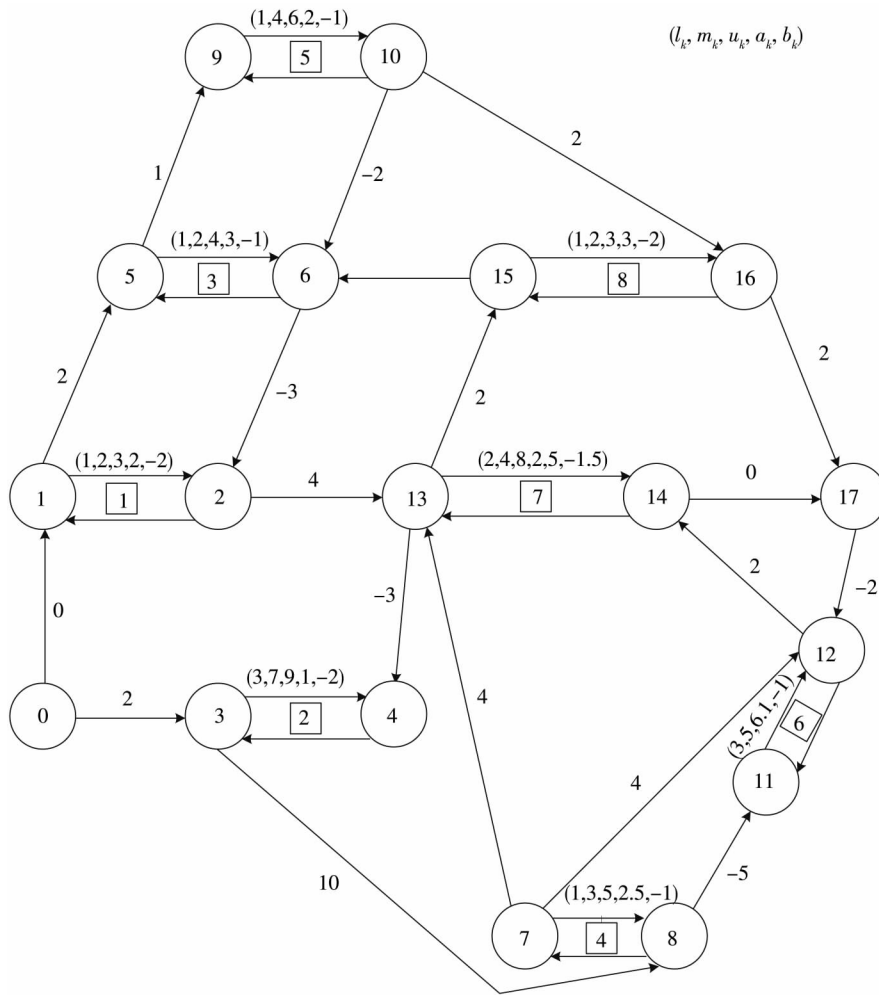


图 8 GPRs 网络

Fig. 8 GPRs network

本文利用 4.1 节方法, 将该问题等效转化为特殊的最小费用最大流问题, 并求最优解, 然后根据初始对偶关系以及上述最优解, 得到原问题

的最优解.

步骤 1 按 4.1 节中的 (1) 将图 8 所示的 GPRs 网络等效转化为费用流网络, 如图 9 所示.

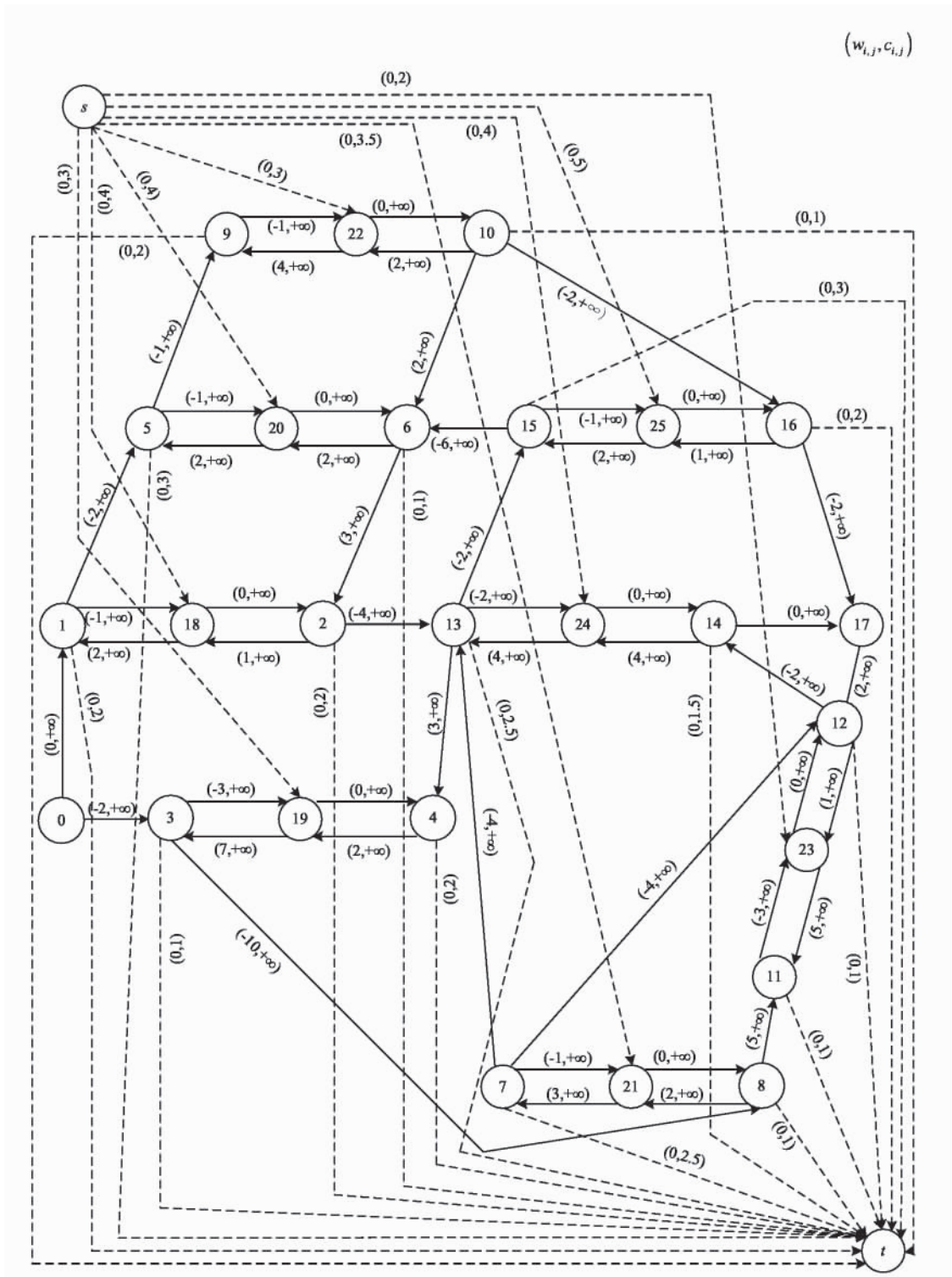


图9 费用流网络

Fig. 9 Cost flow network

步骤2 求图9所示费用流网络中起点到终点的最小费用最大流,可用已有的任何相关算法求解,具体过程从略,得最大流为

$$\max v(f) = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = 28.5$$

所以原问题存在可行解,进而求得各实弧 (i, j) 的

最佳流量 f_{ij}^* 并通过初始对偶关系, 得到图 8 中 GPRs 网络各节点的最佳实现时间 $t_0^* = 0$ $t_1^* = 0$ $t_2^* = 2$ $t_3^* = 2$ $t_4^* = 9$ $t_5^* = 2$ $t_6^* = 5$ $t_7^* = 8$, $t_8^* = 12$ $t_9^* = 3$ $t_{10}^* = 7$ $t_{11}^* = 9$ $t_{12}^* = 14$ $t_{13}^* = 10$, $t_{14}^* = 16$ $t_{15}^* = 11$ $t_{16}^* = 13$ $t_{17}^* = 16$, 从而得到各工序的最佳工期 $\mu_1 = t_2^* - t_1^* = 2$ $\mu_2 = t_4^* - t_3^* = 7$ $\mu_3 = t_6^* - t_5^* = 3$ $\mu_4 = t_8^* - t_7^* = 4$ $\mu_5 = t_{10}^* - t_9^* = 4$ $\mu_6 = t_{12}^* - t_{11}^* = 5$ $\mu_7 = t_{14}^* - t_{13}^* = 6$ $\mu_8 = t_{16}^* - t_{15}^* = 2$, 以及费用最小的总工期 $T^* = t_{17}^* - t_0^* = 16$.

6 结束语

项目调度是项目管理的重要核心, 而调度的过程本质上就是优化的过程, 需要从一个起点开始, 逐步达到所要求的目的. 对于多数问题来说, 起点的选择至关重要, 它很大程度上影响着优化的过程和最终结果的最优性. 对于项目调度问题, 费用最省始终是其目的之一, 因此优化过程通常都以项目的最小费用作为起点, 使得问题最优解能够更快更有效地获得. 例如, 对于经典的时间-费用权衡问题, 最直接有效的求解方法就是先求出项目的最小费用及对应的工期, 然后

用最小的压缩费用将总工期逐步缩短, 直到达到项目要求. 因此, 求得项目最小费用是解决项目调度问题的关键环节.

如果工序之间只有单一且特殊的严格优先关系, 只需令工序都选用费用最小的工期就可得到项目最小费用. 但是当工序之间存在更普遍的广义优先关系 (GPRs) 时, 如果各工序仍选用费用最小的工期, 则很可能无法满足优先关系, 导致项目不可行, 也就不存在优化. 优先关系取决于客观条件, 不可以改变, 只能通过调整各工序的工期来满足, 因此求解 GPRs 下的项目最小费用问题就成为项目调度中必须面对的新问题. 由于 GPRs 不论在含义上还是表示方法上都远比传统的严格优先关系复杂, 因此用普通方法求解该问题的难度很大.

本文主要利用文献 [10] 提出的 GPRs 的网络表示法, 建立了 GPRs 下的项目最小费用模型, 并利用初始对偶变换, 将该模型等效转化为特殊的最小费用最大流模型. 该模型可以运用已有的相关算法求解, 并且根据初始对偶关系, 利用该模型的最优解能很容易求得初始模型的最优解, 即 GPRs 下的项目最小费用, 进而可以研究如何进一步求解 GPRs 下的项目调度问题, 提高求解的效率和精度.

参考文献:

- [1] Fulkerson D R. A network flow computation for project cost curves [J]. *Management Science*, 1961, 7(2): 167-178.
- [2] 乞建勋, 李星梅, 王强. 等效子网络构建的理论与方法 [J]. *管理科学学报*, 2010, 13(1): 40-44.
Qi Jianxun, Li Xingmei, Wang Qiang. Theories and methods of creating equivalent sub-network [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2010, 13(1): 40-44. (in Chinese)
- [3] 李星梅, 乞建勋, 苏志雄. 自由时差定理与 k 阶次关键路线的求法 [J]. *管理科学学报*, 2009, 12(2): 98-104.
Li Xingmei, Qi Jianxun, Su Zhixiong. Free float theorem and algorithm of seeking the k-th order critical path [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2009, 12(2): 98-104. (in Chinese)
- [4] 刘春林, 陈华友. 区间数计划网络的关键路问题研究 [J]. *管理科学学报*, 2006, 9(1): 27-32.
Liu Chunlin, Chen Huayou. Critical path for an interval project network [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2006, 9(1): 27-32. (in Chinese)
- [5] 安世虎, 聂培尧, 贺国光. 节点赋权网络中节点重要性的综合测度法 [J]. *管理科学学报*, 2006, 9(6): 37-42.
An Shihu, Nie Peiyao, He Guoguang. Comprehensive importance measurement for nodes within a node-weighted network [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2006, 9(6): 37-42. (in Chinese)
- [6] Roy B. Graphes et ordonnancements [J]. *Rev. Francaise Recherche Oper*, 1962, 25: 323-326.
- [7] Elmaghraby S E. An algebra for the analysis of generalized activity networks [J]. *Management Science*, 1964, 10: 494-514.
- [8] Kerbosh J A G M, Schell H J. Network Planning by the Extended METRA Potential Method [R]. Report KS-1.1, University of Technology Eindhoven, Department of Industrial Engineering, Netherlands, 1975.

- [9]Elmaghraby S E , Kamburowski J. The Analysis of Activity Networks under Generalized precedence Relations(GPR) [R]. Parts I and II. OR Reports ,1989 ,231 – 232.
- [10]Elmaghraby S E , Kamburowski J. The analysis of activity networks under generalized precedence relations(GPRs) [J]. Management Science ,1992 ,38(9) : 1245 – 1263.
- [11]Reyck B D , Herroelen W. A branch-and-bound procedure for the resource-constrained project scheduling problem with generalized precedence relations [J]. European Journal of Operational Research ,1998 ,111: 152 – 174.
- [12]Reyck B D , Herroelen W. The multi-mode resource-constrained project scheduling problem with generalized precedence relations [J]. European Journal of Operational Research ,1999 ,119: 538 – 556.
- [13]Cesta , Oddi A , Smith S F. A constraint-based method for project scheduling with time windows [J]. Journal of Heuristics , 2002 ,8(1) : 109 – 136.
- [14]Neumann K , Zhan J. Heuristics for the minimum project-duration problem with minimal and maximal time lags under fixed resource constraints [J]. Intell. Manuf ,1995 ,6: 145 – 154.
- [15]Sakellariopoulos S , Chassiakos A P. Project time-cost analysis under generalised precedence relations [J]. Advances in Engineering Software ,2004 ,35(10) : 715 – 724.
- [16]Chassiakos A P , Sakellariopoulos S. Time-cost optimization of construction projects with generalized activity constraints [J]. Journal of Construction Engineering and Management ,2005 ,131(10) : 1115 – 1124.
- [17]Valls V , Lino P. Criticality analysis in activity-on-node networks with minimal time lags [J]. Annals of Operations Research ,2001 ,102(1) : 17 – 37.
- [18]Stefan C , Pawel Z. The computational complexity of the criticality problems in a network with interval activity times [J]. European Journal of Operational Research ,2002 ,136(3) : 541 – 550.
- [19]Najafi A A , Niaki S T A , Shahsavar M. A parameter-tuned genetic algorithm for the resource investment problem with discounted cash flows and generalized precedence relations [J]. Computers & Operations Research ,2009 ,36: 2994 – 3001.
- [20]Didier D , Hélène F , Jérôme F. Computational methods for determining the latest starting times and floats of tasks in interval-valued activity networks [J]. Journal of Intelligent Manufacturing ,2005 ,16(4 – 5) : 407 – 421.
- [21]Haji Y S , Hassan G S. Computing latest starting times of activities in interval-valued networks with minimal time lags [J]. European Journal of Operational Research ,2010 ,200(3) : 874 – 880.

An approach for the minimum cost problem of projects under generalized precedence relations (GPRs)

SU Zhi-xiong , QI Jian-xun , WANG Qiang

School of Economics and Management , North China Electric Power University , Beijing 102206 , China

Abstract: For project scheduling , when solving a cost problem , such as the time-cost tradeoff problem , we need to obtain the minimum cost of the project as a starting point of the optimization process. If only a single precedence relation exists between activities , we can obtain the minimum cost of a project by letting all activities choose their minimum cost durations. If generalized precedence relations (GPRs) exist between activities , letting all activities choose their minimum cost durations may not meet the given precedence relations and result in a unfeasible project. Aiming at the minimum cost problem of projects under GPRs , we found a mathematical model , and then transform it into an equivalent and special minimum cost maximum flow model by using primal-dual theory. Thus , we can calculate the optimal solution of the special minimum cost maximum flow model by using a current algorithm , and then obtain the minimum cost of a project under GPRs based on the primal-dual relation.

Key words: project scheduling; generalized precedence relations (GPRs); minimum costof project; minimum cost maximum flow model; primal-dual