# 基于完全偏好序信息的严格双边匹配方法①

樊治平[1]，乐　琦[1,2*]
(1. 东北大学工商管理学院，沈阳 110819; 2. 江西财经大学信息管理学院，南昌 330013)

摘要: 双边匹配问题一直是经济管理等领域研究的热点问题之一. 在基于完全偏好序信息的双边匹配问题中,进一步考虑双边主体的最高可接受偏好序,更具有现实意义. 针对此类双边匹配问题的研究,尚未受到重视,鉴于此,本文提出了一种严格双边匹配方法. 在文中,首先给出了双边匹配的相关概念,然后描述了考虑最高可接受偏好序的基于完全偏好序信息的双边匹配问题. 为解决该问题,给出了严格双边匹配的概念及其存在性理论,考虑到双边主体的满意度和最低可接受满意度,构建了多目标优化模型; 使用线性加权法将多目标优化模型转化为单目标优化模型,通过求解该单目标优化模型获得匹配结果; 最后,通过风险投资商与风险企业的双边匹配实例分析说明了所提方法的可行性和有效性.

关键词: 双边匹配; 偏好序; 最高可接受偏好序; 严格双边匹配; 优化模型; 匹配结果
中图分类号: C934　　文献标识码: A　　文章编号: 1007 - 9807(2014)01 - 0021 - 14

## 0　引　言

在实际生活中,众多问题都涉及到某群体中的主体需要与另一个群体中的主体相匹配的情形,例如婚姻匹配问题[1]、电子中介中商品买卖问题[2-3]、人力资源管理中员工与岗位匹配问题[4-5]、大学招生录取问题[6-7]等. 随着社会经济的飞速发展,经济管理中的双边匹配问题引起了更为广泛关注,例如二手房交易中买方与卖方匹配问题[8]、风险投资活动中风险投资商与风险企业匹配问题[9]. 因此,双边匹配问题具有广泛的实际应用背景. 鉴于现实社会经济、管理等领域中存在着大量的双边匹配问题,而合理有效的匹配结果有利于提高组织经济活动、管理活动的效率,有利于提高主体对其匹配主体的满意度. 因此,针对双边匹配问题的研究具有重要的理论意义和实际价值.

Gale 和 Shapley 针对大学录取和稳定婚姻指派问题,从稳定指派的概念、存在性、Pareto 最优性及求解算法等方面进行研究[10],反映了双边匹配的思想. 依据 Gale 和 Shapley 对大学与学生,男士与女士之间的指派问题的提炼和分析,Roth 明确提出了双边匹配的概念[11]. 双边匹配是指如何匹配两个不同有限集合中的主体,尽量使每个主体匹配到满意的另一边主体. 双边匹配一般是通过中介来进行[12],这里中介通常是指撮合双边主体进行匹配的个人、机构或决策系统. 此后,许多学者将双边匹配问题进行扩展,针对不同的实际问题,研究有针对性的决策分析方法,或从理论上完善、补充和扩展了 Gale-Shapley 算法,或从不同视角出发,试图采用经济博弈论、实验经济学等相关理论与方法获得匹配结果[12-15].

通常,在双边匹配过程中,需要考虑双边主体的偏好序信息. 目前,针对基于偏好序信息的双边匹配问题的研究受到了学者们的广泛关注. Teo

① 收稿日期: 2011 - 07 - 11; 修订日期: 2012 - 05 - 08.
基金项目: 国家创新研究群体科学基金资助项目(71021061); 国家自然科学基金资助项目(71071029; 71261007; 71261006); 教育部人文社会科学基金资助项目(12YJC630080); 江西省自然科学基金资助青年项目(20122BAB211009, 20114BAB211006); 江西省社会科学"十二五"规划资助项目(12GL32).
通讯作者: 乐　琦(1983—),男,江西东乡人,博士,讲师. Email: yueqichina@126.com

等从最优欺骗策略的角度研究了男女婚姻匹配问题[16]；Korkmaz 等运用 AHP 方法和改进的 Gale-Shapley 算法将军事人员与工作任务进行匹配，同时构建了双边匹配的决策支持系统[17]；Vate 和 John 基于图论的方法研究了男女婚姻匹配的特征，建立了相应的线性规划模型来获得匹配结果[18]；Lars 研究了一对一双边匹配问题中核的性质及格的结构[19]；Knoblauch 研究了具有随机分布偏好序的 Gale-Shapley 算法的性质[20]. 此外，一些学者还从经济博弈的角度研究了双边匹配问题[21-24].

已有的研究为解决基于偏好序信息的双边匹配问题提供了理论与方法层面的借鉴指导，同时也扩大了双边匹配实际应用背景. 然而，需要指出的是，已有的研究大多采用 Gale-Shapley 算法或其扩展算法将双边主体进行匹配，基于稳定性的 Gale-Shapley 算法及其扩展算法是从部分主体集合最优的角度提出的，使用这些算法只能得到部分主体最优的双边匹配，而现实问题中，主体可能对匹配主体含有最低可接受满意度的要求，在此要求的基础上更关注于匹配的满意程度. 例如，在一个 $6 \times 9$ 的婚姻匹配问题中，男士 $A_1$ 对其约会对象含有最低可接受满意度的要求(比如，男士 $A_1$ 的最大满意度为 1，男士 $A_1$ 要求匹配结果中对其约会对象的满意度要大于 0.5)，在这个要求基础上若匹配结果中男士 $A_1$ 对其约会对象的满意度越高，则男士 $A_1$ 对该匹配结果也越满意. 另外，若每个主体提出的最低可接受满意度都为其最大满意度，则此时很可能不存在满足这个要求的匹配结果. 因此，探讨如何测度每个主体的最低可接受满意度，又如何确定每个主体的最低可接受满意度，使得匹配结果中每个主体的最低可接受满意度要求都被满足，在满足这个条件基础上又如何提高匹配的满意程度具有重要的理论意义和实际价值. 鉴于此，本文从双边主体满意度的角度出发，通过引入严格双边匹配的概念，并分析其存在性理论，提出一种基于完全偏好序信息的严格双边匹配方法.

## 1 双边匹配

双边匹配问题涉及到两方主体，设甲方主体集合为 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，$m \geqslant 2$，其中 $A_i$ 表示第 $i$ 个甲方主体，$i = 1, 2, \cdots, m$；乙方主体集合为 $B = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$，$n \geqslant 2$，其中 $B_j$ 表示第 $j$ 个乙方主体，$j = 1, 2, \cdots, n$；不妨设 $m \leqslant n$，记 $M = \{1, 2, \cdots, m\}$，$N = \{1, 2, \cdots, n\}$.

**定义 1**[25] 设 $\mu: A \cup B \to A \cup B$ 为一一映射，若 $\forall A_i \in A, \forall B_j \in B$，满足：① $\mu(A_i) \in B$，② $\mu(B_j) \in A \cup \{B_j\}$，③ $\mu(A_i) = B_j$ 当且仅当 $\mu(B_j) = A_i$，则称 $\mu$ 为双边匹配.

**注 1** 定义 1 中，$\mu(A_i) = B_j$ 表示 $A_i$ 与 $B_j$ 在 $\mu$ 中匹配，$\mu(B_j) = B_j$ 表示 $B_j$ 在 $\mu$ 中未匹配.

**定义 2** 若 $\mu(A_i) = B_j$，则称 $(A_i, B_j)$ 为 $\mu$ - 匹配主体对.

依据定义 1 和定义 2 可知：若 $(A_i, B_j)$ 为 $\mu$ - 匹配主体对，则 $(B_j, A_i)$ 也为 $\mu$ - 匹配主体对. 为便于分析，若 $\mu(B_k) = B_k$，则仍记 $(B_k, B_k)$ 为 $\mu$ - 匹配主体对. 因此，双边匹配 $\mu$ 可表示为 $\mu = \mu_t \cup \mu_s$，$\mu_t = \{(A_i, B_{f(i)}) \mid i = 1, \cdots, m\}$，$\mu_s = \{(B_k, B_k) \mid k = \{1, \cdots, n\} \backslash \{f(1), \cdots, f(m)\}\}$，其中 $B_{f(i)} = \mu(A_i)$，$f(i) \in N$，且 $\forall i, i' \in I$，$i \neq i'$，有 $f(i) \neq f(i')$.

## 2 考虑主体最高可接受偏好序的双边匹配问题

针对考虑主体最高可接受偏好序的基于完全偏好序信息的双边匹配问题，设 $R_i = (r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{in})$ 为甲方主体 $A_i$ 给出的关于乙方主体集合 $B$ 的完全偏好序向量，其中 $r_{ij}$ 表示甲方主体 $A_i$ 把乙方主体 $B_j$ 排在第 $r_{ij}$ 位，$d_i$ 为甲方主体 $A_i$ 通过中介协商给出的最高可接受偏好序，$r_{ij}, d_i \in N$；设 $T_j = (t_{1j}, t_{2j}, \cdots, t_{nj})^{\mathrm{T}}$ 为乙方主体 $B_j$ 给出的关于甲方主体集合 $A$ 的完全偏好序向量，其中 $t_{ij}$ 表示乙方主体 $B_j$ 把甲方主体 $A_i$ 排在第 $t_{ij}$ 位，$h_j$ 为乙方主体 $B_j$ 通过中介协商给出的最高可接受偏好序，$t_{ij}, h_j \in M$.

综上，本文需要解决的问题是：如何依据甲方主体 $A_i$ 给出的完全偏好序向量 $R_i$ 和最高可接受偏好序 $d_i$，$i = 1, 2, \cdots, m$，乙方主体 $B_j$ 给出的完全偏好序向量 $T_j$ 和最高可接受偏好序 $h_j$，$j = 1, 2,$

$\cdots$,$n$,运用何种决策方法,获得合理的匹配结果.

**注 2**　在本文中,合理的匹配结果是指每个主体的满意度都在大于其最低可接受满意度的条件下尽可能大.

## 3　严格双边匹配的相关概念

针对考虑的双边匹配问题,不失一般性,若甲方主体 $A_i$ 把乙方主体 $B_j$ 排在第一位,即 $r_{ij}=1$,则 $A_i$ 对 $B_j$ 的满意度最高; 若甲方主体 $A_i$ 把乙方主体 $B_k$ 排在最后一位,即 $r_{ik}=n$,则 $A_i$ 对 $B_k$ 的满意度最低. 为便于分析,满意度界定在区间 $[0,1]$ 上,进一步给出如下定义.

**定义 3**　设 $\alpha_{ij}$ 为甲方主体 $A_i$ 对乙方主体 $B_j$ 的满意度,$\beta_{ij}$ 为乙方主体 $B_j$ 对甲方主体 $A_i$ 的满意度,则满意度 $\alpha_{ij}$ 与 $\beta_{ij}$ 可分别表示为

$$\alpha_{ij}=l(r_{ij}),\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

$$\beta_{ij}=g(t_{ij}),\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

其中 $l(x)$ 与 $g(y)$ 为单调递减函数,$0<f(n)$,$f(1)\leqslant 1$,$0<g(m)$,$g(1)\leqslant 1$.

**注 3**　定义 3 中,函数 $l(x)$ 与 $g(y)$ 具有多种表示形式,但在现实中,偏好序与满意度之间通常不具有线性递减关系. 例如在婚姻匹配问题中,某男士对 7 位女士进行排序,该男士对排名第 1 与排名第 2 的两位女士之间满意程度的差距,通常要比排名第 6 和排名第 7 的两位女士之间的差距要大. 基于此,可作进一步分析: 在男士(或女士)心中,总是更关心自己能与最偏爱的异性相匹配,如若不能匹配,则会感觉十分失望,即满意度会大幅降低,尤其对排序靠后的异性,满意度虽然仍随着序值的增加而降低,但差别会越来越小. 因此,考虑到如上所述的双边主体心理感受,则 $l''(x)>0$,$g''(y)>0$. 再者,考虑到每个主体都是个人理性的[25-26],若主体单身时的满意度为 0,则该主体的最小满意度大于 0. 因此,为了使得满意度函数 $l(x)$ 与 $g(y)$ 不仅满足上述两条性质,而且方便计算,本文给出如下形式: $l(x)=\left(\frac{n+1-x}{n}\right)^2$, $g(y)=\left(\frac{m+1-y}{m}\right)^2$,则式(1)和(2)分别转化为

$$\alpha_{ij}=\left(\frac{n+1-r_{ij}}{n}\right)^2,\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

$$\beta_{ij}=\left(\frac{m+1-t_{ij}}{m}\right)^2,\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

**例 1**　对于 $6\times 9$ 的双边匹配问题,若甲方主体 $A_1$ 把乙方主体 $B_9$ 排在第 6 位,即 $r_{19}=6$,则依据式(3),可得 $\alpha_{19}=\left(\frac{9+1-6}{9}\right)^2=0.197\,5$; 若乙方主体 $B_6$ 把甲方主体 $A_2$ 排在第 3 位,即 $t_{62}=3$,则依据式(4),可得 $\beta_{62}=\left(\frac{6+1-3}{6}\right)^2=0.444\,4$.

在本文中,最低可接受满意度被视为主体对其匹配主体的最小满意度要求,是满意度类型中的一种. 其测度方法仍然可采用间接满意度函数方法,即依据双边主体的最高可接受偏好序,运用满意度函数 $l(x)$ 或 $g(y)$,获得双边主体的最低可接受满意度. 因此,本文给出如下最低可接受满意度测度公式.

**定义 4**　设 $\gamma_i$ 为甲方主体 $A_i$ 的最低可接受满意度,$\eta_j$ 为乙方主体 $B_j$ 的最低可接受满意度,则 $\gamma_i$ 与 $\eta_j$ 分别表示为

$$\gamma_i=l(d_i),\ i=1,2,\cdots,m \tag{5}$$

$$\eta_j=g(h_j),\ j=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

其中 $l(x)$ 与 $g(y)$ 为定义 3 中引入的函数.

**注 4**　若 $l(x)=\left(\frac{n+1-x}{n}\right)^2$,$g(y)=\left(\frac{m+1-y}{m}\right)^2$,则式(5)和(6)分别转化为

$$\gamma_i=\left(\frac{n+1-d_i}{n}\right)^2,\ i=1,2,\cdots,m \tag{7}$$

$$\eta_j=\left(\frac{m+1-h_j}{m}\right)^2,\ j=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

**例 2**　对于 $9\times 11$ 的双边匹配问题,若经中介协商甲方主体 $A_2$ 要求跟排在前 6 位的乙方主体匹配,即 $d_2=6$,则依据式(7),可得 $\gamma_2=\left(\frac{11+1-6}{11}\right)^2=0.297\,5$; 若经中介协商乙方主体

$B_6$ 要求跟排在前 5 位的甲方主体匹配，即 $h_6 = 5$，则依据式(8)，可得 $\eta_6 = \left(\frac{9+1-5}{9}\right)^2 = 0.3086$.

**定义 5** 对于双边匹配 $\mu(\mu = \mu_t \cup \mu_s)$，若在匹配主体对 $(A_i, B_{f(i)})$ 中，$A_i$ 对 $B_{f(i)}$ 的满意度大于等于 $\gamma_i$，$B_{f(i)}$ 对 $A_i$ 的满意度大于等于 $\eta_{f(i)}$，即 $\alpha_{i,f(i)} \geqslant \gamma_i$，$\beta_{i,f(i)} \geqslant \eta_{f(i)}$，$i = 1,\cdots,m$，则称 $\mu$ 为严格双边匹配.

**注 5** 定义 5 中，$B_{f(i)} = \mu(A_i)$，$f(i) = S(\mu(A_i)) \in N$，其中 $S(\mu(A_i))$ 为取下标函数[27]，即若 $\mu(A_i) = B_j$，则 $S(\mu(A_i)) = j$.

## 4 严格双边匹配的存在性

在提出严格双边匹配方法之前，须探讨严格双边匹配的存在性. 依据定义 5 可知：严格双边匹配的存在性与最低可接受满意度 $\gamma_i$ 和 $\eta_j$ 密切相关，下面从这入手进行分析.

设 $d_{\min}$ 为关于所有甲方主体的共同最高可接受偏好序，$d_{\min} = \min\{d_i \mid i = 1,2,\cdots,m\}$，$h_{\min}$ 为关于所有乙方主体的共同最高可接受偏好序，$h_{\min} = \min\{h_j \mid j = 1,2,\cdots,n\}$，则依据式(7)和式(8)，可设 $\gamma_{\max} = \max\{\gamma_i \mid i = 1,2,\cdots,m\}$，$\eta_{\max} = \max\{\eta_j \mid j = 1,2,\cdots,n\}$.

**定理 1** 若 $d_i = n, \forall i \in M, h_j = m, \forall j \in N$ 则基于完全偏好序向量 $R_i$ 和 $T_j$，最高可接受偏好序 $d_i$ 和 $h_j$ 的双边匹配问题，严格双边匹配存在.

**证明** 由于 $d_i = n, \forall i \in M, h_j = m, \forall j \in N$，则 $\min_i \min_j \{r_{ij}\} = n = d_i$，$\min_i \min_j \{t_{ij}\} = m = h_j$. 因此，依据式(3)和式(4)，式(7)和式(8)，可得 $\alpha_{ij} \geqslant \gamma_i$，$\beta_{ij} \geqslant \eta_j$，$\forall i \in M, \forall j \in N$. 令 $\mu = \{(A_1,B_1),\cdots,(A_m,B_m),(B_{m+1},B_{m+1}),\cdots,(B_n,B_n)\}$，则 $\mu$ 为严格双边匹配. 证毕.

在最高可接受偏好序 $d_i$ 和 $h_j$ 更小的情形下，给出如下两阶段分析法来说明严格双边匹配的存在性.

### 4.1 确定共同最高可接受偏好序 $d_{\min}$ 和 $h_{\min}$

设 $d$ 为经中介协商所有甲方主体给出的统一的最高可接受偏好序，$d \in [1,n]$，$h$ 为经中介协商所有乙方主体给出的统一的最高可接受偏好序，$h \in [1,m]$.

基于完全偏好序向量 $R_i(1,2,\cdots,m)$ 与 $T_j(j = 1,2,\cdots,n)$，分别建立完全偏好序矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{m\times n}$. 依据式(3)和式(4)，完全偏好序矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{m\times n}$ 转化为完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\overline{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{m\times n}$. 依据式(7)和式(8)，最高可接受偏好序 $d$ 与 $h$ 转化为最低可接受满意度 $\gamma$ 与 $\eta$. 依据最低可接受满意度 $\gamma$ 与 $\eta$，完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\overline{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{m\times n}$ 转化为 0 - 1 矩阵 $\Phi = [\varphi_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\Omega = [\omega_{ij}]_{m\times n}$，其中 $\varphi_{ij}$ 与 $\omega_{ij}$ 分别表示为

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} 1, & \alpha_{ij} \geqslant \gamma, \\ 0, & \alpha_{ij} < \gamma, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n \tag{9}$$

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 1, & \beta_{ij} \geqslant \eta, \\ 0, & \beta_{ij} < \eta, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n \tag{10}$$

基于 0 - 1 矩阵 $\Phi$ 和 $\Omega$，构建综合 0 - 1 矩阵 $\boldsymbol{\Delta} = [\delta_{ij}]_{m\times n}$，其中

$$\delta_{ij} = \varphi_{ij}\omega_{ij} = \begin{cases} 1, & \varphi_{ij} = \omega_{ij} = 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{11}$$

$$i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n$$

依据综合 0 - 1 矩阵 $\boldsymbol{\Delta}$，构建确定 $d_{\min}$ 和 $h_{\min}$ 的优化模型. 设 $x_{ij}$ 为 0 - 1 变量，其中 $x_{ij} = 0$ 表示 $\mu(A_i) \neq B_j$，即 $A_i$ 与 $B_j$ 在 $\mu$ 中未匹配，$x_{ij} = 1$ 表示 $\mu(A_i) = B_j$，则可构建下列优化模型(12)

$$\max\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}x_{ij} \tag{12a}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,2,\cdots,m \tag{12b}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1,\ j = 1,2,\cdots,n \tag{12c}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1,\ i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n \tag{12d}$$

模型(12)中，式(12b)的含义是每个甲方主体必须且只能与一个乙方主体匹配；式(12c)的含义是每个乙方主体至多与一个甲方主体匹配.

**定理 2** 模型(12)存在最优解.

**证明** 由于模型(12)是含有 $mn$ 个变量的 0 - 1 整数规划，则它最多产生 $2^{mn}$ 个可行解. 显然

$x_{ij}=\begin{cases}1, j=i,\\0, j\neq i,\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$,为模型(12) 的可行解,则模型(12) 的可行域非空. 因此,由式(12a) 确定的目标函数在某个可行解上达到最大,即模型(12) 存在最优解. 证毕.

**定理 3** 存在 $d(d\in[1,n])$ 与 $h(h\in[1,m])$ 使得 $Z^*=m$,其中 $Z^*$ 为模型(12) 的目标函数最优值.

**证明** 若存在 $d$ 与 $h$,其中 $d\in[1,n]$,$h\in[1,m-1]$,或 $d\in[1,n-1]$,$h\in[1,m]$,使得模型(12) 的目标函数最优值 $Z^*=m$,则结论成立. 否则 $d=n$,$h=m$,依据定理 1 的证明过程可知,$\gamma=0$,$\eta=0$. 依据式(9) - 式(11),可得 $\delta_{ij}=1$,$\forall i\in M$,$\forall j\in N$. 因此,模型(12) 转化为下列优化模型(13)

$$\max\ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij} \tag{13a}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1, j=1,2,\cdots,m \tag{13b}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\leqslant 1, j=1,2,\cdots,n \tag{13c}$$

$$x_{ij}=0 \text{ 或 } 1, \tag{13d}$$

$$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

求解模型(13),可得 $Z^*=m$. 综上,存在 $d(d\in[1,n])$ 与 $h(h\in[1,m])$ 使得 $Z^*=m$. 证毕.

进一步地,下面给出确定共同最高可接受偏好序 $d_{\min}$ 和 $h_{\min}$ 的算法.

**算法 1**

**步骤 1** 令 $d=1$,$h=1$,转步骤 2;

**步骤 2** 建立并求解优化模型(12);若 $Z^*<m$,则转步骤 3;否则 $Z^*=m$,转步骤 6;

**步骤 3** 令 $d=d+1$,转步骤 4;

**步骤 4** 建立并求解优化模型(12);若 $Z^*<m$,则转步骤 5;否则 $Z^*=m$,转步骤 6;

**步骤 5** 令 $h=h+1$, 转步骤 2;

**步骤 6** 终止,输出"$d_{\min}=d$,$h_{\min}=h$".

基于上述分析可知: 通过算法 1,可确定 $d_{\min}$ 与 $h_{\min}$,且依据 $d_{\min}$ 与 $h_{\min}$ 构建的优化模型(12) 的目标函数最优值 $Z^*=m$.

**定理 4** 算法 1 至多经过 $mn$ 次迭代收敛.

**证明** 根据定理 3,可知存在 $d(d\in[1,n])$ 与 $h(h\in[1,m])$ 使得模型(12) 的目标函数最优值 $Z^*=m$. 因此,根据终止条件,可知算法 1 至多经过 $mn$ 次迭代收敛. 证毕.

### 4.2 严格双边匹配的存在性定理

依据最低可接受满意度 $\gamma_i$ 与 $\eta_j$,完全满意度矩阵 $\bar{A}=[\alpha_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\bar{B}=[\beta_{ij}]_{m\times n}$ 转化为 0 - 1 矩阵 $\Phi'=[\varphi_{ij}']_{m\times n}$ 和 $\Omega'=[\omega_{ij}']_{m\times n}$,其中 $\varphi_{ij}'$ 与 $\omega_{ij}'$ 分别表示为

$$\varphi_{ij}'=\begin{cases}1, \alpha_{ij}\geqslant\gamma_i,\\0, \alpha_{ij}<\gamma_i,\end{cases} i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{14}$$

$$\omega_{ij}'=\begin{cases}1, \beta_{ij}\geqslant\eta_j,\\0, \beta_{ij}<\eta_j,\end{cases} i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{15}$$

基于矩阵 $\Phi'$ 和 $\Omega'$,构建综合 0 - 1 矩阵 $\Delta'=[\delta_{ij}']_{m\times n}$,其中

$$\delta_{ij}'=\varphi_{ij}'\omega_{ij}'=\begin{cases}1, \varphi_{ij}'=\omega_{ij}'=1,\\0, \text{其它},\end{cases} \tag{16}$$

$$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

设 $x_{ij}$ 为 0 - 1 变量,其中 $x_{ij}=0$ 表示 $\mu(A_i)\neq B_j$,$x_{ij}=1$ 表示 $\mu(A_i)=B_j$,则依据矩阵 $\Delta'$,可构建下列优化模型(17)

$$\max\ F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}'x_{ij} \tag{17a}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1, i=1,2,\cdots,m \tag{17b}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\leqslant 1, j=1,2,\cdots,n \tag{17c}$$

$$x_{ij}=0 \text{ 或 } 1, i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{17d}$$

模型(17) 中,式(17b) 的含义是每个甲方主体必须且只能与一个乙方主体匹配; 式(17c) 的含义是每个乙方主体至多与一个甲方主体匹配.

**定理 5** 模型(17) 存在最优解.

**证明** 由于模型(17) 是含有 $mn$ 个变量的 0 - 1 整数规划,则它最多产生 $2^{mn}$ 个可行解. 显然,$x_{ij}=\begin{cases}1, j=i\\0, j\neq i,\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$,为模型(17) 的可行解,则模型(17) 的可行域非空. 因此,由式(17a) 确定的目标函数在某个可行解上达到最大,即模型(17) 存在最优解. 证毕.

**定理 6** 严格双边匹配存在的充分必要条件是模型(17)的目标函数最优值 $F^* = m$.

**证明** 先证明必要性. 假设严格双边匹配存在,则根据定义 5 可知,存在双边匹配 $\mu'$ 满足 $\alpha_{i,S(\mu'(A_i))} \geqslant \gamma_i$,$\beta_{i,S(\mu'(A_i))} \geqslant \eta_{S(\mu'(A_i))}$,$i = 1,\cdots,m$. 令 $X' = [x'_{ij}]_{m\times n}$,其中 $x'_{ij} = \begin{cases}1, j = S(\mu'(A_i)),\\ 0, j \neq S(\mu'(A_i)),\end{cases}$ $i = 1, 2,\cdots,m$,则 $X'$ 满足式(17b) -(17d),且目标值 $F' = m$. 由于模型(17)的目标函数系数矩阵 $\Delta'$ 中的元素 $\delta'_{ij}$ 为 0 -1 值,则根据式(17b) -(17d),可知 $F \leqslant m$. 因此,$F^* = F' = m$.

再证明充分性. 设模型(17)的目标函数最优值 $F^* = m$,$X^* = [x^*_{ij}]_{m\times n}$ 为相应的解矩阵,$\mu^*$ 为对应于 $X^*$ 的双边匹配,则根据式(17b) -(17d),可知 $x^*_{ij} = \begin{cases}1, j = S(\mu^*(A_i)),\\ 0, j \neq S(\mu^*(A_i)),\end{cases}$ $i = 1,2, \cdots,m$. 下面证明 $\delta'_{i,S(\mu^*(A_i))} = 1$,$i = 1,2,\cdots,m$. 假设 $\exists i_0 = (i_0 \in M)$,使得 $\delta'_{i_0,S(\mu^*(A_i))} \neq 1$,则根据式(17a),可得 $F^* < m$,与 $F^* = m$ 矛盾. 因此,$\delta_{i,S(\mu^*(A_i))} = 1$,$i = 1,2,\cdots,m$. 根据式(16),可得 $\varphi'_{i,S(\mu^*(A_i))} = \omega'_{i,S(\mu^*(A_i))} = 1$. 因此,$\alpha_{i,S(\mu^*(A_i))} \geqslant \gamma_i$,$\beta_{i,S(\mu^*(A_i))} \geqslant \eta_{S(\mu^*(A_i))}$,$i = 1,2,\cdots,m$,即 $\mu^*$ 为满意双边匹配. 证毕.

考虑到模型(17)的目标函数值 $F \leqslant m$,根据定理 6,可得下列推论.

**推论 1** 严格双边匹配不存在的充分必要条件是模型(17)的目标函数最优值 $F^* < m$.

**定理 7** 对于任意的 $d_i \in [d_{\min},n]$ 和 $h_j \in [h_{\min},m]$,模型(17)的目标函数最优值 $F^* = m$.

**证明** 由于 $\gamma_{\max} \geqslant \gamma_i$,$\eta_{\max} \geqslant \eta_j$,因此,若 $\alpha_{ij} \geqslant \gamma_{\max}$,则 $\alpha_{ij} \geqslant \gamma_i$;若 $\beta_{ij} \geqslant \eta_{\max}$,则 $\beta_{ij} \geqslant \eta_j$. 根据式(9) -式(11)及式(14) -式(16),可得 $\delta_{ij} = \delta'_{ij}$,$\forall i \in M$,$\forall j \in N$. 因此,依据 $d_{\min}$ 与 $h_{\min}$ 构建的模型(12)与模型(17)相同. 又因为依据 $d_{\min}$ 与 $h_{\min}$ 构建的模型(12)的目标函数最优值 $Z^* = m$,因此,$\forall d_i \in [d_{\min},n]$ 和 $\forall h \in [h_{\min},m]$,有 $F^* = m$. 证毕.

依据定理 5 - 定理 7,可得下列定理.

**定理 8** 对于任意的 $d_i \in [d_{\min},n]$ 和 $h_j \in [h_{\min},m]$,严格双边匹配存在.

依据算法 1 和定理 8,下面给出确定最高可接受偏好序 $d_i$ 和 $h_j$ 的交互式算法.

**算法 2**

**步骤 1** 通过算法 1,确定共同最高可接受偏好序 $d_{\min}$ 与 $h_{\min}$;

**步骤 2** 中介告知所有甲方主体严格双边匹配在偏好序区间 $[d_{\min},n]$ 上存在,告知所有乙方主体严格双边匹配在偏好序区间 $[h_{\min},m]$ 上存在;

**步骤 3** 甲方主体 $A_i$ 针对偏好序区间 $[d_{\min},n]$ 结合自身偏好等情况,给出最高可接受偏好序 $d_i$;乙方主体 $B_j$ 针对偏好序区间 $[h_{\min},m]$ 结合自身偏好等情况,给出最高可接受偏好序 $h_j$;若某甲方主体不接受偏好序区间 $[d_{\min},n]$,或某乙方主体不接受偏好序区间 $[h_{\min},m]$,则剔除该主体,转步骤 1.

依据定理 8 和算法 2,可得下列定理.

**定理 9** 基于偏好序向量 $\boldsymbol{R}_i$ 和 $\boldsymbol{T}_j$,以及最高可接受偏好序 $d_i$ 和 $h_j$ 的双边匹配问题,严格双边匹配存在.

# 5 严格双边匹配方法

## 5.1 决策模型的构建

基于完全偏好序向量 $\boldsymbol{R}_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 与 $\boldsymbol{T}_j(j = 1,2,\cdots,n)$,分别建立完全偏好序矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{m\times n}$. 依据式(3)和式(4),完全偏好序矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{m\times n}$ 转化为完全满意度矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\bar{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{m\times n}$. 依据式(7)和式(8),最高可接受偏好序 $d_i$ 与 $h_j$ 转化为最低可接受满意度 $\gamma_i$ 与 $\eta_j$. 依据最低可接受满意度 $\gamma_i$ 与 $\eta_j$,完全满意度矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\bar{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{m\times n}$ 转化为满意度截矩阵 $\boldsymbol{\Theta} = [\theta_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_{ij}]_{m\times n}$,其中 $\theta_{ij}$ 与 $\psi_{ij}$ 分别表示为

$$\theta_{ij} = \begin{cases}\alpha_{ij}, \alpha_{ij} \geqslant \gamma_i,\\ -K, \alpha_{ij} < \gamma_i,\end{cases} i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n \tag{18}$$

$$\psi_{ij} = \begin{cases}\beta_{ij}, \beta_{ij} \geqslant \eta_j,\\ -K, \beta_{ij} < \eta_j,\end{cases} i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n \tag{19}$$

其中 $K$ 为足够大的正数.

设 $y_{ij}$ 为0－1变量，其中 $y_{ij}=0$ 表示 $\mu(A_i)\neq B_j$，$y_{ij}=1$ 表示 $\mu(A_i)=B_j$，则依据满意度截矩阵 $\boldsymbol{\Theta}=[\theta_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{\Psi}=[\psi_{ij}]_{m\times n}$，可构建如下多目标优化模型(20)

$$\max\ F_{A_i}=\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}y_{ij},\ i=1,2,\cdots,m \tag{20a}$$

$$\max\ F_{B_j}=\sum_{i=1}^{m}\psi_{ij}y_{ij},\ j=1,2,\cdots,n \tag{20b}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}y_{ij}=1,\ j=1,2,\cdots,m \tag{20c}$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ij}\leqslant 1,\ j=1,2,\cdots,n \tag{20d}$$

$$y_{ij}=0\text{ 或 }1,i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{20e}$$

模型(20)中，式(20a)和(20b)为目标函数；式(20a)的含义是在严格双边匹配意义下最大化甲方主体 $A_i$ 关于乙方主体的满意度，式(20b)的含义是在严格双边匹配意义下最大化乙方主体 $B_j$ 关于甲方主体的满意度；式(20c)的含义是每个甲方主体必须且只能与一个乙方主体匹配；式(20d)的含义是每个乙方主体至多与一个甲方主体匹配，若 $m=n$，则 $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1$.

通常，每边主体具有相等的优先权，因此，模型(20)可转化为下列多目标优化模型(21)

$$\max\ F_A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}y_{ij} \tag{21a}$$

$$\max\ F_B=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\psi_{ij}y_{ij} \tag{21b}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}y_{ij}=1,\ j=1,2,\cdots,m \tag{21c}$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ij}\leqslant 1,\ j=1,2,\cdots,n \tag{21d}$$

$$y_{ij}=0\text{ 或 }1,i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{21e}$$

模型(21)中，式(21a)和(21b)为目标函数；式(21a)的含义是在严格双边匹配意义下最大化所有甲方主体 $A_i$ 关于乙方主体的满意度之和，式(21b)的含义是在严格双边匹配意义下最大化所有乙方主体 $B_j$ 关于甲方主体的满意度之和.

模型(21)的目标函数中并没有体现出中介的利益要求，这可以从以下角度解释：①该中介是公益型中介，不收取任何费用或对每个主体的收费标准都一样，因而没有把中介的利益要求当成一个目标函数形式；②该中介是效益型中介，但只对双边匹配方案中的匹配主体收取相同费用，因此也没有把中介的利益要求当成一个目标函数形式.

若考虑到效益型中介对匹配主体更精细的利益要求，则可给出类似于定义3的分析，此时可考虑中介对匹配主体收取与其最高可接受偏好序相一致的费用，限于篇幅，这里省略.

### 5.2　决策模型的求解

为了求解模型(21)，考虑到 $\theta_{ij}\in[0,1]$，$\psi_{ij}\in[0,1]$，则采用线性加权法将式(21a)和(21b)进行加权. 设 $w_A$ 和 $w_B$ 分别表示目标 $F_A$ 和 $F_B$ 的权重，满足 $0<w_A,w_B<1,w_A+w_B=1$，则模型(21)转化为如下单目标优化模型(22)

$$\max\ F=w_A\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}y_{ij}+w_B\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\psi_{ij}y_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}y_{ij} \tag{22a}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}y_{ij}=1,\ j=1,2,\cdots,m \tag{22b}$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ij}\leqslant 1,\ j=1,2,\cdots,n \tag{22c}$$

$$y_{ij}=0\text{ 或 }1,i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{22d}$$

其中 $f_{ij}=w_A\theta_{ij}+w_B\psi_{ij}$. 在现实的双边匹配问题中，$w_A$ 和 $w_B$ 可被分别视为甲方主体和乙方主体的重要程度，通常由中介依据双边主体的地位来考虑如何确定权重. 若认为双边主体在匹配过程中处于平等地位，则有 $w_A=w_B$. 若认为双边主体在匹配过程中的地位不同，即一方主体与另一方主体相比在匹配过程中显得更重要，则有 $w_A\neq w_B$，在这种情况下，可以采取通过比较两个目标 $F_A$ 和 $F_B$ 的方式来确定权重. 例如，若目标 $F_A$ 比目标 $F_B$ 更重要，且其重要程度为 $\theta,\theta>1$，则有 $w_A=\frac{\theta}{1+\theta}$ 和 $w_B=\frac{1}{1+\theta}$.

显然，模型(22)可转化为标准的指派问题模型，这样可使用匈牙利法[28]进行求解. 当模型(22)中的变量和约束条件个数较多时，可采用

Lingo11.0、Cplex9.0、WinQSB2.0 等软件，或采用启发式方法，如遗传算法、禁忌搜索算法等进行求解. 根据模型求解结果，可获得双边匹配方案.

**定理 10** 模型(22) 存在最优解，且目标函数最优值 $F^* > 0$.

**证明** 根据式(18) 和(19)，可得

$$f_{ij} = \begin{cases} w_A\alpha_{ij} + w_B\beta_{ij}, & \alpha_{ij} \geqslant \gamma_i, \beta_{ij} \geqslant \eta_j, \\ -K', & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $K'$ 为足够大的正数. 由于最高可接受偏好序 $d_i$ 和 $h_j$ 是通过算法 2 确定的，则依据定理 9，可知严格双边匹配存在. 根据定理 6，可知存在可行解矩阵 $Y' = [y'_{ij}]_{m\times n}$，其中

$$y'_{ij} = \begin{cases} 1, & j = S(\mu'(A_i)), \\ 0, & j \neq S(\mu'(A_i)) \end{cases}$$

使得 $\alpha_{i,S(\mu'(A_i))} \geqslant \gamma_i$，$\beta_{i,S(\mu'(A_i))} \geqslant \eta_{S(\mu'(A_i))}$，$i = 1, 2, \cdots, m$. 因此，

$$f_{ij} = \begin{cases} w_A\alpha_{ij} + w_B\beta_{ij} > 0, & j = S(\mu'(A_i)), \\ -K' & \text{其它} \end{cases}$$

依据式(22a)，可得 $F' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}y'_{ij} > 0$. 因此，可行解矩阵 $Y' = [y'_{ij}]_{m\times n}$ 对应的目标函数值 $F' > 0$. 由于模型(22) 是含有 $mn$ 个变量的 0 - 1 整数规划，则它最多产生 $2^{mn}$ 个可行解. 因此，由式(22a) 确定的目标函数在可行域某点 / 某个可行解上达到最大，即模型(22) 存在最优解，且目标函数最优值 $F^* \geqslant F' > 0$. 证毕.

**定理 11** 模型(22) 的最优解矩阵对应的双边匹配方案为严格双边匹配.

**证明** 设模型(22) 的最优解矩阵为 $Y^* = [y^*_{ij}]_{m\times n}$，目标函数最优值为 $F^*$，$\mu^*$ 为对应于 $Y^*$ 的双边匹配方案. 依据式(18) 和式(19)，可得

$$f_{ij} = \begin{cases} w_A\alpha_{ij} + w_B\beta_{ij}, & \alpha_{ij} \geqslant \gamma_i, \beta_{ij} \geqslant \eta_j, \\ -K', & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $K'$ 为足够大的正数. 依据式(22a)，可得 $F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}y_{ij}$，$F^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}y^*_{ij}$. 依据定义 5 可知，要证 $\mu^*$ 为严格双边匹配，只需证明 $\alpha_{i,S(\mu^*(A_i))} \geqslant \gamma_i$，$\beta_{i,S(\mu'(A_i))} \geqslant \eta_{S(\mu^*(A_i))}$，$i = 1, 2, \cdots, m$. 下面用反证法证明. 假设存在 $i_0(i_0 \in M)$ 使得 $\alpha_{i_0,S(\mu^*(A_{i_0}))} < \gamma_{i_0}$ 或 $\beta_{i_0,S(\mu^*(A_{i_0}))} < \eta_{S(\mu^*(A_{i_0}))}$ 成立. 不妨设 $K' = m$，则 $f_{i_0,S(\mu'(A_{i_0}))} = -m$. 进一步地，依据式(22b) - (22d)，有 $F^* \leqslant -1$. 根据定理 10，可知 $F^* \leqslant -1$ 与 $F^*$ 为目标函数最优值矛盾. 因此 $\mu^*$ 为严格双边匹配. 证毕.

根据多目标规划理论可知，模型(22) 的最优解是模型(21) 的有效解; 根据定理 11 可知，通过求解模型(22) 获得的双边匹配方案为严格双边匹配.

### 5.3 决策方法的步骤

综上，考虑主体最高可接受偏好序的严格双边匹配方法的步骤如下:

**步骤 1** 基于完全偏好序向量 $\boldsymbol{R}_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 与 $\boldsymbol{T}_j(j = 1, 2, \cdots, n)$，分别建立完全偏好序矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{m\times n}$; 依据式(3) 和式(4)，完全偏好序矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{m\times n}$ 转化为完全满意度矩阵 $\overline{A} = [\alpha_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\overline{B} = [\beta_{ij}]_{m\times n}$;

**步骤 2** 使用算法 1，确定共同最高可接受偏好序 $d_{\min}$ 与 $h_{\min}$;

**步骤 3** 使用算法 2，确定最高可接受偏好序 $d_i$ 和 $h_j$;

**步骤 4** 依据式(7) 和式(8)，最高可接受偏好序 $d_i$ 和 $h_j$ 转化为最低可接受满意度 $\gamma_i$ 和 $\eta_j$;

**步骤 5** 依据式(18) 和式(19)，完全满意度矩阵 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 转化为满意度截矩阵 $\boldsymbol{\Theta} = [\theta_{ij}]_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_{ij}]_{m\times n}$;

**步骤 6** 依据满意度截矩阵 $\boldsymbol{\Theta}$ 与 $\boldsymbol{\Psi}$，构建多目标优化模型(20);

**步骤 7** 将多目标优化模型(20) 转化为多目标优化模型(21);

**步骤 8** 使用线性加权法将多目标优化模型(21) 转化为单目标优化模型(22);

**步骤 9** 求解优化模型(22)，获得双边匹配方案 $\mu^*$.

## 6 算例分析

下面以风险投资活动中风险投资商与风险企业的双边匹配问题为例，来说明严格双边匹配方法的实用性和有效性.

中国上海某投资中介(investment intermediary)公司负责聚合风险投资商和风险企业双方的信息,并对双方进行全面考察和客观评价,使双方形成合理匹配. 该投资中介在某一时段收到了 6 个风险投资商($A_1, A_2, \cdots, A_6$) 和 9 个风险企业($B_1, B_2, \cdots, B_9$) 的信息. 根据收到的信息,风险投资商对风险企业以及风险企业对风险投资商进行多指标主观评价. 风险投资商 $A_i$ 从投资回收期、年投资回报率、所处行业、技术水平、规避风险能力、企业家素质、市场的竞争状况、预期的市场增长、资金需求额以及税收优惠政策等指标[29-30] 对风险企业集合 $B = \{B_1, B_2, \cdots, B_9\}$ 进行主观评价,进而给出偏好序向量 $\boldsymbol{R}_i = [r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{i9}]$, $i = 1, 2, \cdots, 6$,如表 1 所示; 风险企业 $B_j$ 从风险投资商的实力、投资成功率、信誉、投资规模以及投资回报率等指标[29-30] 对风险投资商集合 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_6\}$ 进行主观评价,进而给出偏好序向量 $\boldsymbol{T}_j = [t_{1j}, t_{2j}, \cdots, t_{6j}]^{\mathrm{T}}$, $j = 1, 2, \cdots, 9$,如表 2 所示.

为了解决风险投资商与风险企业的双边匹配问题,下面详细说明使用该方法的计算过程.

**步骤 1**　基于完全偏好序向量 $\boldsymbol{R}_i (i = 1, 2, \cdots, 6)$ 与 $\boldsymbol{T}_j (j = 1, 2, \cdots, 9)$,分别建立完全偏好序矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{6\times 9}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{6\times 9}$; 依据式(3) 和式(4),完全偏好序矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{6\times 9}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{6\times 9}$ 转化为完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{6\times 9}$ 与 $\overline{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{6\times 9}$,如表 3 和表 4 所示.

**表 1**　风险投资商 $A_i$ 给出的关于风险企业集合 $B$ 的偏好序向量 $R_i$

Table 1 Preference ordinal vector $R_i$ on venture business set $B$ given by venture capitalist $A_i$

| 风险投资商 | 偏好序向量 | 风险企业 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ | $B_9$ |
| $A_1$ | $\boldsymbol{R}_1$ | 3 | 9 | 2 | 7 | 6 | 8 | 4 | 1 | 5 |
| $A_2$ | $\boldsymbol{R}_2$ | 2 | 8 | 4 | 6 | 7 | 1 | 5 | 9 | 3 |
| $A_3$ | $\boldsymbol{R}_3$ | 7 | 3 | 6 | 5 | 2 | 9 | 8 | 4 | 1 |
| $A_4$ | $\boldsymbol{R}_4$ | 5 | 9 | 1 | 8 | 6 | 3 | 4 | 2 | 7 |
| $A_5$ | $\boldsymbol{R}_5$ | 2 | 1 | 5 | 9 | 8 | 7 | 3 | 6 | 4 |
| $A_6$ | $\boldsymbol{R}_6$ | 9 | 5 | 7 | 2 | 3 | 6 | 1 | 8 | 4 |

**表 2**　风险企业 $B_j$ 给出的关于风险投资商集合 $A$ 的偏好序向量 $T_j$

Table 2 Preference ordinal vector $T_j$ on venture capitalist set $A$ given by venture business $B_j$

| | 风险企业 | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ | $B_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 偏好序向量 | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | $T_6$ | $T_7$ | $T_8$ | $T_9$ |
| 风险投资商 | $\boldsymbol{A}_1$ | 6 | 3 | 1 | 4 | 2 | 1 | 2 | 5 | 4 |
| | $\boldsymbol{A}_2$ | 4 | 2 | 5 | 3 | 6 | 3 | 6 | 1 | 2 |
| | $\boldsymbol{A}_3$ | 1 | 4 | 2 | 2 | 5 | 5 | 1 | 6 | 3 |
| | $\boldsymbol{A}_4$ | 3 | 6 | 4 | 1 | 3 | 6 | 4 | 2 | 5 |
| | $\boldsymbol{A}_5$ | 5 | 1 | 6 | 6 | 4 | 4 | 5 | 3 | 1 |
| | $\boldsymbol{A}_6$ | 2 | 5 | 3 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |

**表 3**　满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{6\times 9}$

Table 3 Satisfaction degree matrix $\overline{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{6\times 9}$

| $\alpha_{ij}$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ | $B_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0.604 9 | 0.012 3 | 0.790 1 | 0.111 1 | 0.197 5 | 0.049 4 | 0.444 4 | 1 | 0.308 6 |
| $A_2$ | 0.790 1 | 0.049 4 | 0.444 4 | 0.197 5 | 0.111 1 | 1 | 0.308 6 | 0.012 3 | 0.604 9 |
| $A_3$ | 0.111 1 | 0.604 9 | 0.197 5 | 0.308 6 | 0.790 1 | 0.012 3 | 0.049 4 | 0.444 4 | 1 |
| $A_4$ | 0.308 6 | 0.012 3 | 1 | 0.049 4 | 0.197 5 | 0.604 9 | 0.444 4 | 0.790 1 | 0.111 1 |
| $A_5$ | 0.790 1 | 1 | 0.308 6 | 0.012 3 | 0.049 4 | 0.111 1 | 0.604 9 | 0.197 5 | 0.444 4 |
| $A_6$ | 0.012 3 | 0.308 6 | 0.111 1 | 0.790 1 | 0.604 9 | 0.197 5 | 1 | 0.049 4 | 0.444 4 |

表 4　满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{6\times9}$

Table 4 Satisfaction degree matrix $\overline{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{6\times9}$

| $\beta_{ij}$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ | $B_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0.027 8 | 0.444 4 | 1 | 0.25 | 0.694 4 | 1 | 0.694 4 | 0.111 1 | 0.25 |
| $A_2$ | 0.25 | 0.694 4 | 0.111 1 | 0.444 4 | 0.027 8 | 0.444 4 | 0.027 8 | 1 | 0.604 9 |
| $A_3$ | 1 | 0.25 | 0.694 4 | 0.694 4 | 0.111 1 | 0.111 1 | 1 | 0.027 8 | 0.444 4 |
| $A_4$ | 0.444 4 | 0.027 8 | 0.25 | 1 | 0.444 4 | 0.027 8 | 0.25 | 0.694 4 | 0.111 1 |
| $A_5$ | 0.111 1 | 1 | 0.027 8 | 0.027 8 | 0.25 | 0.25 | 0.111 1 | 0.444 4 | 1 |
| $A_6$ | 0.694 4 | 0.111 1 | 0.444 4 | 0.111 1 | 1 | 0.694 4 | 0.444 4 | 0.25 | 0.027 8 |

**步骤 2**　使用算法 1，可得共同最高可接受偏好序 $d_{\min}$ 与 $h_{\min}$，即 $d_{\min} = 3$，$h_{\min} = 3$.

**步骤 3**　使用算法 2，确定最高可接受偏好序 $d_i$ 和 $h_j$；不妨假设所有的风险投资商都接受偏好序区间 [3, 9]，并给出自身的最高可接受偏好序 $d_i$：$d_1 = 4$，$d_2 = 3$，$d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 4$；所有的风险企业都接受偏好序区间 [3, 9]，并给出自身的最高可接受偏好序 $h_j$：$h_1 = h_2 = 4$，$h_3 = h_4 = h_5 = h_6 = h_7 = h_8 = h_9 = 3$.

**步骤 4**　依据式(7)和式(8)，最高可接受偏好序 $d_i$ 和 $h_j$ 转化为最低可接受满意度 $\gamma_i$ 和 $\eta_j$，即 $\gamma_1 = 0.444\,4$，$\gamma_2 = 0.604\,9$，$\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0.444\,4$，$\eta_1 = \eta_2 = 0.25$，$\eta_3 = \eta_4 = \cdots = \eta_9 = 0.444\,4$.

**步骤 5**　依据式(18)和式(19)，完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 转化为满意度截矩阵 $\boldsymbol{\Theta} = [\theta_{ij}]_{6\times9}$ 和 $\boldsymbol{\Theta} = [\theta_{ij}]_{6\times9}$，如表 5 和表 6 所示.

表 5　满意度截矩阵 $\boldsymbol{\Theta} = [\theta_{ij}]_{6\times9}$

Table 5 Satisfaction degree cut matrix $\boldsymbol{\Theta} = [\theta_{ij}]_{6\times9}$

| $\theta_{ij}$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ | $B_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0.604 9 | $-K$ | 0.790 1 | | $-K$ | $-K$ | 0.444 4 | 1 | $-K$ |
| $A_2$ | 0.790 1 | $-K$ | $-K$ | $-K$ | $-K$ | 1 | $-K$ | $-K$ | 0.604 9 |
| $A_3$ | $-K$ | 0.604 9 | $-K$ | $-K$ | 0.790 1 | $-K$ | $-K$ | 0.444 4 | 1 |
| $A_4$ | $-K$ | $-K$ | 1 | $-K$ | $-K$ | 0.604 9 | 0.444 4 | 0.790 1 | $-K$ |
| $A_5$ | 0.790 1 | 1 | $-K$ | $-K$ | $-K$ | $-K$ | 0.604 9 | $-K$ | 0.444 4 |
| $A_6$ | $-K$ | $-K$ | $-K$ | 0.790 1 | 0.604 9 | $-K$ | 1 | $-K$ | 0.444 4 |

表 6　满意度截矩阵 $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_{ij}]_{6\times9}$

Table 6 Satisfaction degree cut matrix $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_{ij}]_{6\times9}$

| $\psi_{ij}$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ | $B_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $-K$ | 0.444 4 | 1 | $-K$ | 0.694 4 | 1 | 0.694 4 | $-K$ | $-K$ |
| $A_2$ | 0.25 | 0.694 4 | $-K$ | 0.444 4 | $-K$ | 0.444 4 | $-K$ | 1 | 0.694 4 |
| $A_3$ | 1 | 0.25 | 0.694 4 | 0.694 4 | $-K$ | $-K$ | 1 | $-K$ | 0.444 4 |
| $A_4$ | 0.444 4 | $-K$ | $-K$ | 1 | 0.444 4 | $-K$ | $-K$ | 0.694 4 | $-K$ |
| $A_5$ | $-K$ | 1 | $-K$ | $-K$ | $-K$ | $-K$ | $-K$ | 0.444 4 | 1 |
| $A_6$ | 0.694 4 | $-K$ | 0.444 4 | $-K$ | 1 | 0.694 4 | 0.444 4 | $-K$ | $-K$ |

**步骤 6**　依据满意度截矩阵 $\boldsymbol{\Theta}$ 与 $\boldsymbol{\Psi}$，构建如下多目标优化模型

$$\max\ F_{A_i} = \sum_{j=1}^{9} \theta_{ij} y_{ij},\ i = 1,2,\cdots,6$$

$$\max\ F_{B_j} = \sum_{i=1}^{6} \psi_{ij} y_{ij},\ i = 1,2,\cdots,9$$

$$\text{s.t}\quad \sum_{j=1}^{9} y_{ij} = 1,\ i = 1,2,\cdots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_{ij} \leqslant 1,\ j = 1,2,\cdots,9$$

$$y_{ij} = 0\ \text{或}\ 1,\ i = 1,2,\cdots,6;\ j = 1,2,\cdots,9$$

**步骤 7**　考虑到每边的主体具有相等的优先

权，可将上述模型转化为如下多目标优化模型

$$\max \quad F_A = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{9}\theta_{ij}y_{ij}$$

$$\max \quad F_B = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{9}\psi_{ij}y_{ij}$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{j=1}^{9}y_{ij} = 1,\ i = 1,2,\cdots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6}y_{ij} \leqslant 1,\ i = 1,2,\cdots,9$$

$$y_{ij} = 0 \text{ 或 } 1,\ i = 1,2,\cdots,6;\ j = 1,2,\cdots,9$$

**步骤 8**　不妨设 $w_A = w_B = 0.5$，则多目标优化模型转化为如下单目标优化模型

$$\max \quad F = 0.5\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{9}\theta_{ij}y_{ij} + 0.5\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{9}\psi_{ij}y_{ij} = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{9}f_{ij}y_{ij}$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{j=1}^{9}y_{ij} = 1,\ i = 1,2,\cdots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6}y_{ij} \leqslant 1,\ i = 1,2,\cdots,9$$

$$y_{ij} = 0 \text{ 或 } 1,\ i = 1,2,\cdots,6;\ j = 1,2,\cdots,9$$

其中 $f_{ij} = 0.5\theta_{ij} + 0.5\psi_{ij}$，系数矩阵 $[f_{ij}]_{6\times9}$ 如表 7 所示.

表 7　系数矩阵 $[f_{ij}]_{6\times9}$

Table 7 Coefficient matrix $[f_{ij}]_{6\times9}$

| $f_{ij}$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ | $B_8$ | $B_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $-K'$ | $-K'$ | 0.895 1 | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | 0.569 4 | $-K'$ | $-K'$ |
| $A_2$ | 0.520 1 | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | 0.722 2 | $-K'$ | $-K'$ | 0.649 7 |
| $A_3$ | $-K'$ | 0.427 5 | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | 0.722 2 |
| $A_4$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | 0.742 3 | $-K'$ |
| $A_5$ | $-K'$ | 1 | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | 0.722 2 |
| $A_6$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | $-K'$ | 0.802 5 | $-K'$ | 0.722 2 | $-K'$ | $-K'$ |

**步骤 9**　通过 Lingo 11.0 优化软件包编程求解模型(22)，可得

$$Y^* = [y_{ij}^*]_{6\times9} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此，匹配结果为 $\mu^* = \mu_t^* \cup \mu_s^*$，其中 $\mu_t^* = \{(A_1,B_3),(A_2,B_6),(A_3,B_9),(A_4,B_8),(A_5,B_2),(A_6,B_5)\}$，$\mu_s^* = \{(B_1,B_1),(B_4,B_4),(B_7,B_7)\}$；即 $A_1$ 与 $B_3$ 匹配，$A_2$ 与 $B_6$ 匹配，$A_3$ 与 $B_9$ 匹配，$A_4$ 与 $B_8$ 匹配，$A_5$ 与 $B_2$ 匹配，$A_6$ 与 $B_5$ 匹配，$B_1$、$B_4$ 和 $B_7$ 单身，且 $r_{13} = 2$，$r_{26} = 1$，$r_{39} = 1$，$r_{48} = 2$，$r_{52} = 1$，$r_{65} = 3$；$t_{13} = 1$，$t_{26} = 3$，$t_{39} = 3$，$t_{48} = 2$，$t_{52} = 1$，$t_{65} = 1$.

为进一步阐明本文提出方法的意义，给出如下分析.

在本例中，若使用风险投资商最优的 G-S 算法，则可得匹配结果为 $\mu'^* = \mu_t'^* \cup \mu_S'^*$，其中 $\mu_t'^* = \{(A_1,B_8),(A_2,B_6),(A_3,B_9),(A_4,B_3),(A_5,B_2),(A_6,B_7)\}$，$\mu_S'^* = \{(B_1,B_1),(B_4,B_4),(B_5,B_5)\}$；若使用风险企业最优的 G-S 算法，则可得匹配结果为 $\mu''^* = \mu_t''^* \cup \mu_S''^*$，其中 $\mu_t''^* = \{(A_1,B_3),(A_2,B_6),(A_3,B_9),(A_4,B_8),(A_5,B_2),(A_6,B_7)\}$，$\mu_S''^* = \{(B_1,B_1),(B_4,B_4),(B_5,B_5)\}$.

表 8 所示了这三种决策方法的匹配结果. 从表 8 中可知：1）运用这三种决策方法获得的匹配结果不同. 2）与本文提出的方法相比，若使用风险投资商最优的 G-S 算法，则 $A_1$ 与 $B_8$ 匹配，$A_4$ 与 $B_3$ 匹配，$A_6$ 与 $B_7$ 匹配，此时 $t_{18} = 5 < h_8 = 3$，$t_{43} = 4 < h_3 = 3$，这就说明风险企业 $B_3$ 和 $B_8$ 对其匹配主体的满意度小于其最低可接受满意度；若使用风险企业最优的 G-S 算法，则 $A_6$ 与 $B_7$ 匹配，虽然此时 $t_{67} = 3 = h_7$，但从表 7 可知，$f_{65} = 0.802\,5 > f_{67} = 0.722\,2$. 综上，与已有的 G-S 等算法相比，使用本文提出的方法获得的匹配为严格双边匹配，即每个主体对其匹配主体的满意度都大于其最低可接受满意度，而使用 G-S 等算法不能保证获得

严格双边匹配结果; 此外,使用本文提出的方法可以在满足最低可接受满意度要求下更大程度的提高主体满意度,这就是本文提出方法的主要创新点所在.

表 8 三种决策方法的匹配结果 $\mu^*$

Table 8 Matching result $\mu^*$ of the three decision methods

| 双边匹配决策方法 | 匹配结果 $\mu^* = \mu_t^* \cup \mu_S^*$ | |
|---|---|---|
| | $\mu_t^*$ | $\mu_s^*$ |
| 本文提出的方法 | $\{(A_1,B_3),(A_2,B_6),(A_3,B_9),(A_4,B_8),(A_5,B_2),(A_6,B_5)\}$ | $\{(B_1,B_1),(B_4,B_4),(B_5,B_5)\}$ |
| 风险投资商最优的 G-S 算法 | $\{(A_1,B_8),(A_2,B_6),(A_3,B_9),(A_4,B_3),(A_5,B_2),(A_6,B_7)\}$ | $\{(B_1,B_1),(B_4,B_4),(B_5,B_5)\}$ |
| 风险企业最优的 G-S 算法 | $\{(A_1,B_3),(A_2,B_6),(A_3,B_9),(A_4,B_8),(A_5,B_2),(A_6,B_7)\}$ | $\{(B_1,B_1),(B_4,B_4),(B_5,B_5)\}$ |

## 7 结束语

本文基于双边主体满意度的视角,研究了严格双边匹配的相关概念及存在性理论,构建了求解双边匹配问题的多目标优化模型,通过求解该模型获得匹配结果,主要结论如下.

(1) 本文给出的严格双边匹配的相关概念及理论分析,丰富并发展了双边匹配的相关理论,为进一步开展考虑主体最高可接受偏好序的双边匹配相关理论研究奠定了良好基础.

(2) 本文开发的确定最高可接受偏好序的算法能够有效的测度主体对其匹配主体的最低可接受满意度,可以使得匹配结果中所有主体对其匹配主体的满意度都大于其最低可接受满意度.

(3) 本文提出的严格双边匹配方法,能够有效的解决考虑主体最高可接受偏好序的基于完全偏好序信息的双边匹配问题,丰富并发展了双边匹配方法研究的相关成果,为进一步相关研究提供了新思路.

(4) 与已有的 G-S 等算法相比,本文提出的方法最大优势在于其能够在满足主体最低可接受满意度要求下更大程度的提高主体满意度.

因此,本文提出的新方法具有概念清晰、实用有效等特点,有助于中介、企业或组织等对现实生活中的双边匹配问题做出判断,对双边匹配理论、方法与应用等方面研究具有较强的指导价值.

## 参 考 文 献:

[1] Gusfield D, Irving R W. The Stable Marriage Problem, Structure and Algorithms [M]. Cambridge: MIT Press, 1989.

[2] Jung J J, Jo G S. Brokerage between buyer and seller agents using constraint satisfaction problem models [J]. Decision Support Systems, 2000, 28(4): 293 – 304.

[3] 樊治平, 陈 希. 电子中介中基于公理设计的多属性交易匹配研究 [J]. 管理科学, 2009, 22(3): 83 – 88.
Fan Zhiping, Chen Xi. Research on multi-attribute trade matching problem in electronic broker based on axiomatic design [J]. Journal of Management Science, 2009, 22(3): 83 – 88. (in Chinese)

[4] Goodman S A, Svyantek D J. Person-organization fit and contextual performance: Do shared value matter [J]. Journal of Vocational Behavior, 1999, 55(2): 254 – 275.

[5] 陈 希, 樊治平. 考虑多种形式信息的求职者与岗位双边匹配研究 [J]. 运筹与管理, 2009, 18(6): 103 – 109.
Chen Xi, Fan Zhiping. Research on two-sided matching problem between employees and positions based on multiple format information [J]. Operations Research and Management Science, 2009, 18(6): 103 – 109. (in Chinese)

[6] Pais J. Random matching in the college admissions problem [J]. Economic Theory, 2008, 35(1): 99 – 116.

[7] 聂海峰. 高考录取机制的博弈分析 [J]. 经济学(季刊), 2007, 6(3): 899 – 915.
Nie Haifeng. A game theoretical analysis of Chinese college admission mechanism [J]. China Economic Quarterly, 2007, 6(3): 899 – 915. (in Chinese)

[8] 陈 林, 朱卫平. 基于二手市场与理性预期的房地产市场机制研究 [J]. 管理科学学报, 2011, 14(2): 61 – 70.

Chen Lin, Zhu Weiping. Research on real estate market mechanism in the second-hand market and rational expectation [J]. Journal o f Management Sciences in China, 2011, 14(2): 61 - 70. (in Chinese)

[9] SØrensen M. How smart is smart money? A two-sided matching model of venture capital [J]. The Journal of Finance, 2007, 62(6): 2725 - 2762.

[10] Gale D, Shapley L. College admissions and the stability of marriage [J]. American Mathematical Monthly, 1962, 69(1): 9 - 15.

[11] Roth A E. Common and conflicting interests in two-sided matching markets [J]. European Economic Review, 1985, 27(1): 75 - 96.

[12] Bloch F, Ryder H. Two-sided search, marriage and matchmakers [J]. International Economic Review, 2000, 41(1), 93 - 115.

[13] Klumpp T. Two-sided matching with spatially differentiated agents [J]. Journal of Mathematical Economics, 2009, 45(5 - 6), 376 - 390.

[14] Chakraborty A, Citanna A, Ostrovsky M. Two-sided matching with interdependent values [J]. Journal of Economic Theory, 2010, 145(1), 85 - 105.

[15] Ahn T, Arcidiacono P, Murphy A, et al. Explaining cross-racial differences in teenage labor force participation: Results from a two-sided matching model [J]. Journal of Econometrics, 2010, 156(1): 201 - 211.

[16] Teo C P, Sethuraman J, Tan W P. Gale-Shapley stable marriage problem revisited strategic issues and applications [J]. Management Science, 2001, 47(9): 1252 - 1267.

[17] Korkmaz I, Gökçen H, Çetinyokuş T. An analytic hierarchy process and two-sided matching based decision support system for military personnel assignment [J]. Information Sciences, 2008, 178(14): 2915 - 2927.

[18] Vate V, John H. Linear programming brings marital bliss [J]. Operations Research Letters, 1989, 8(3): 1 - 23.

[19] Lars Ehlers. Von Neumann-Morgenstern stable sets in matching problems [J]. Journal of Economic Theory, 2007, 134(1): 537 - 547.

[20] Knoblauch V. Marriage matching and gender satisfaction [J]. Social Choice and Welfare, 2009, 32(1): 15 - 27.

[21] Chen F H. Monotonic matching in search equilibrium [J]. Journal of Mathematical Economics, 2005, 41(6): 705 - 721.

[22] Alpern S, Katrantzi I. Equilibria of two-sided matching games with common preferences [J]. European Journal of Operational Research, 2009, 196, 3(1): 1214 - 1222.

[23] Kotsogiannis C, Serfes K. Public goods and tax competition in a two-sided market [J]. Journal of Public Economic Theory, 2010, 12(2): 281 - 321.

[24] **吴德胜, 李维安. 非正式契约与正式契约交互关系研究——基于随机匹配博弈的分析 [J]. 管理科学学报**, 2010, 13(12): 76 - 85.

Wu Desheng, Li Weian. Interaction between formal contracts and informal contracts under random matching game [J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(12): 76 - 85. (in Chinese)

[25] Echenique F. What matchings can be stable? The testable implications of matching theory [J]. Mathematics of Operations Research, 2008, 33(3): 757 - 768.

[26] Ehlers L. Truncation strategies in matching markets [J]. Mathematics of Operations Research, 2008, 33(2): 327 - 335.

[27] **陈 侠, 樊治平. 基于不同偏好信息的评价专家水平研究 [J]. 系统工程理论与实践**, 2007, 27(2): 27 - 35.

Chen Xia, Fan Zhiping. Study on assessment level of experts based on difference preference information [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2007, 27(2): 27 - 35. (in Chinese)

[28] Kuhn H W. The Hungarian method for the assignment problem [J]. Naval Research Logistic Quarterly, 1955, 2(1 - 2): 83 - 97.

[29] Dimov D, Shepherd D A, Sutcliffe K M. Requisite expertise, firm reputation, and status in venture capital investment allocation decisions [J]. Journal of Business Venturing, 2007, 22(4): 481 - 502.

[30] Bettignies J E. Financing the entrepreneurial venture [J]. Management Science, 2008, 54(1): 151 - 166.

# Strict two-sided matching method based on complete preference ordinal information

*FAN Zhi-ping*[1], *YUE Qi*[1,2]

1. School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110819, China;
2. School of Information Management, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang 330013, China

**Abstract:** The two-sided matching problem has always been one of the hot issues discussed in the fields of economic management and so on. In the two-sided matching problems with complete preference ordinal information, it is more significant to consider the highest acceptable preference ordinal of two-sided agents. However, this kind of two-sided matching problem has not yet received great attention. Hence, a strict two-sided matching method is proposed. In this paper, the related concept on two-sided matching is firstly introduced, and then the two-sided matching problem with the highest acceptable preference ordinal based on complete preference ordinal information is described. In order to solve the problem, the concept and existence theory of strict two-sided matching is given. Considering the satisfaction degree and the lowest acceptable satisfaction degree of two-sided agents, a multi-objective optimization model is developed. By using linear weighted method, the multi-objective optimization model is converted into a single objective model. The matching result is obtained by solving the model. Finally, an illustrative example of two-sided matching between venture investors and venture businesses is given to illustrate the feasibility and validity of the proposed method.

**Key words:** two-sided matching; preference ordinal; the highest acceptable preference ordinal; strict two-sided matching; optimization model; matching result