利率带有跳跃情形下的信用衍生品定价研究①

牛华伟[1,2]

(1. 南京审计学院金融工程研究中心与金融学院，南京 211815;
2. 南京大学商学院，南京 210093)

摘要: 考虑作为风险因素的利率的跳跃，以研究信用衍生品的定价问题. 通过影响信用衍生品参考债务实体违约概率相应的违约强度，利率的跳跃对信用衍生品的定价将产生影响. 为此，令描述各个状态变量变化的随机过程是交叉激励的，以体现各事件之间的依赖关系. 在线性—二次跳跃—扩散框架下给出了一般定价模型，并可通过 Riccati 方程组对其进行求解. 最后，在特定的随机过程下，将所得定价模型应用在 CDS 上，并给出定价公式的显性表达式，以作举例.

关键词: 信用衍生品; 定价; 利率; 跳跃; 违约强度

中图分类号: F830.91　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1007 - 9807(2014)04 - 0071 - 15

0 引 言

本文的主要目的是将利率的跳跃作为一个风险因素加以考虑，以研究信用衍生品的定价，并在线性—二次跳跃—扩散(LQJD，linear-quadratic jump-diffusion)框架下给出一般定价模型. 在经济处于不同发展阶段时，货币政策相应的随之改变，从而使得利率处于加息周期或者降息周期中. 2008 年金融危机爆发之后，全球经济处于衰退阶段，各国为刺激经济发展纷纷连续降低利率. 而当经济回归到正常轨道时，或者在通货膨胀压力等宏观经济因素的推动下，各国经济又将会处于加息周期中. 因此，在加息周期中，根据央行的货币政策目标，利率上调将会频繁发生，并且在利率上调到一定水平时，利率的跳跃将影响金融衍生品尤其是对利率敏感的衍生品的定价. 同样，利率连续频繁的下调也会影响对利率敏感的衍生品的定价.

确切地讲，利率的跳跃不仅会影响利率衍生品(例如债券)的价格，同时还会对信用衍生品的定价产生影响. 当利率连续上调时，显著的影响是所造成的流动性紧张将会导致部分企业资金链断裂以致破产. 在这种情况下，除了其它不可预测的因素以外，信用衍生品参考债务实体(如企业发行的债券)的违约概率将会随着利率的正向(负向)跳跃而明显增加(降低). 尤其是当经济仍处于调整阶段时，通货膨胀压力下的利率连续上调，将会加剧企业现金流状况的恶化，使得企业破产的概率随着利率正向跳跃的发生而大增，进而增高债券的违约概率. 由此可见，利率的跳跃与信用衍生品参考债务实体违约概率之间具有依赖关系. 若不将利率的跳跃作为风险因素加以考虑，那将不能准确地定价信用衍生品，以致增加系统信用风险. 因此，需要考虑信用衍生品参考债务实体违约概率与利率跳跃之间的依赖关系，更准确地定价信用衍生品(如 CDS、Loan CDS 等). 本文的主要思想是在加息周期中利率上调到一定水平时，利率的跳跃将影响到违约强度，而违约强度是

---

① 收稿日期: 2012 - 01 - 06; 修订日期: 2013 - 05 - 20.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71271042); 江苏省高校哲学社会科学重点研究基地重大资助项目(2012JDXM009); 南京审计学院人才引进资助项目.
作者简介: 牛华伟(1980—)，男，江苏徐州人，博士，讲师. Email: niuhuawei@gmail.com

与描述参考债务实体违约时刻的计数随机过程相对应的. 那么，利率中的跳跃便作为状态变量，在影响利率的同时也影响了另外一个状态变量——违约强度，进而影响到违约时刻的发生概率. 这样，描述各个状态变量变化的随机过程将是交叉激励(cross-exciting) 的，Errasi 等[1] 也已提出了类似的思想②.

已有的众多实证结果表明利率存在明显的跳跃特征，并且越来越多的相关文献在利率期限结构的研究中考虑利率的跳跃，见 Das[2]、Farnsworth 和 Bass[3]、Johannes[4]、Piazzesi[5]、Jarrow 等[6]、Hong 等[7]、林海和郑振龙[8]、张金清和周茂彬[9]、吴吉林等[10]、范龙振[11] 及其中的参考文献. 除了以上研究结果，由于利率大幅度的变化是由不可预测的市场信息所引发的，上述部分文献还考虑如下的实证事实，即跳跃的强度是随机的并且随时间变化. 例如，Johannes[4] 允许跳跃的强度是短期利率的函数. Piazzesi[5] 假设跳跃的强度在大部分时间内是常值，但在联邦公开市场操作委员会(FOMC) 会议期间，利率是一些状态变量(如利率的波动率、短期利率、联邦基金目标利率) 的线性函数. 此外，Jiang 和 Yan[12] 讨论了一般形式的跳跃强度，其中的特例可视为文献[4]和[5]的拓展. 类似于跳跃的强度是随机的，梁世栋、郭仌和方兆本[13] 在违约强度为随机过程以及违约强度与利率相关的条件下，构造了信用风险期限结构的框架性模型，但作者只考虑了扩散随机过程，并没有将利率跳跃的情形考虑进去，因而所给出的模型对于信用衍生品的定价并不是十分合理.

除了将跳跃—扩散过程应用在利率期限结构中，亦有众多文献研究跳跃—扩散过程下的可违约债券的定价和信用价差(credit spread) 的期限结构. 例如，Duffie 和 Lando[14] 发现，由不完全的会计信息造成的跳跃能够使得债券的价格在其违约时刻附近发生急剧的下跌. Manson 和 Bhattacharya[15] 在结构模型(structural model) 的框架下，针对跳跃过程讨论了可违约债券的定价问题. 基于这些研究成果，Zhou[16] 发展了结构模型，通过利用一般的跳跃—扩散过程描述企业价值的动态变化，给出了新的可违约债券定价模型，并且该模型能够更容易生成不同的信用价差期限结构.

尽管利率的跳跃已被用在利率期限结构的研究中，但已有的信用衍生品定价模型都没有将利率的跳跃作为风险因素加以考虑，这些模型将利率作为常数或者连续变化的状态变量对待，例如 Hull 和 White[17]，Chen 等[18] 及其中的参考文献. 为了将利率的跳跃纳入到信用衍生品的定价中去，采用包含多个跳跃过程的 LQJD 框架(如 Cheng 和 Scaillet[19]) . 将它用于衍生品定价的主要原因是，该模型包含了仿射跳跃—扩散(affine jump-diffusion，AJD) 模型和二次高斯模型(quadratic Gaussian，QG) 的优点. AJD 模型允许状态变量发生跳跃，但不能反映出所要描述变量的非线性特征(见 Ait-sahalia[20]、Ahn 和 Gao[21] 以及 Dai 和 Singleton[22]) . Dai 和 Singleton[22]、Backus 等[23] 进一步发现 AJD 模型的拟合程度只有在损失其所描述状态变量(如利率) 的正定性时才能够有显著的改进. 而 QG 模型可以解决上述问题，见 Chen 等[18]、Ahn，Dittmar 和 Gallant[24] 以及 Leippold 和 Wu[25－27] 中的例子. 然而，当 QG 模型中带有跳跃时，对该模型无法进行更深入地解析求解(analytical tractable) (见 Chen 等[28－29]) . LQJD 模型则将非线性、跳跃、状态变量的正定性等上述重要特征全部包括在内，并且利用 Duffie 等[30] 的方法，可对 LQJD 模型进行解析求解，尽管求解过程更加复杂.

如上所述，利率的跳跃将对违约时刻相应的违约强度产生一定影响，进而影响违约概率的大小. 这样，描述利率与违约强度变化的随机过程便是交叉激励的. 此外，除了利率的跳跃带来的冲击以外，还存在其它不可预测事件对违约概率产生影响. 为了全面考虑这些因素，本文在 LQJD 框架下给出一般定价模型并对其进行解析求解，这个模型可用于信用衍生品的定价. 对此，在特定的随机过程下，将该定价模型结合简约模型(reduced form model) ，以对 CDS 定价为例加以说明. 最后，需要指出的是，尽管不是本文所要讨论的内容，但已有许多学者通过不同的方法并利用历史数据估计随机过程的参数(见文献[1，512，18，31]及其

② 文献[1]将点随机过程(point process) 作为风险因素对待，从而使得描述各个状态变量变化的随机过程是自我激励和交叉激励的.

中的参考文献)，而这个实证工作将是今后的研究内容之一.

1　带有利率跳跃的信用衍生品定价模型

本节将具体介绍考虑利率的跳跃作为风险因素的信用衍生品定价模型. 首先讨论如何对利率的跳跃与违约时刻(或称违约停时)发生概率之间的依赖关系进行建模，这样描述各状态变量变化的随机过程便会交叉激励. 在 LQJD 框架下，将给出一般情形下的定价模型.

1.1　LQJD 框架回顾

给定一个概率空间(Ω,F,P)，其上有右连续的完全信息σ－域流$F=(F_t)_{t\geqslant 0}$，并且违约停时$0<T_1<T_2<\cdots$在该概率空间上有定义. 概率测度P的性质依赖于其应用的领域. 在风险管理中，P是实际或者统计测度，而在资产定价中，P是风险中性测度. 本文研究的是定价问题，除非有特别声明，否则后面P均指风险中性测度.

首先大致回顾 LQJD 框架. 令$\boldsymbol{X}_t=(X_1(t),X_2(t))^{\mathrm{T}}$为从给定的$n=(n_1+n_2)$－维状态空间$D$上选取的 cadlag 状态向量，且其满足如下的随机微分方程(SDE)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{\mu}(t,\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t+\mathrm{d}\boldsymbol{Z}_t \quad (1)$$

式中，$\boldsymbol{W}_t$是(n_1+n_2)－维标准布朗运动向量；$\boldsymbol{Z}_t$为独立于$\boldsymbol{W}_t$的纯跳跃过程，其增长$\mathrm{d}Z_t$是相互独立的，且跳跃强度和跳跃幅度的分布函数分别是$\lambda(t,\boldsymbol{X}_t)$和$\boldsymbol{\nu}(\mathrm{d}\boldsymbol{y},t)$. 此外，只有$\boldsymbol{Z}_t$的前$n_1$个分量是非零项；式(1)中的扩散项$\boldsymbol{\mu}(t,\boldsymbol{X}_t)$和协方差矩阵$\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t)$可分别写成如下形式

$$\boldsymbol{\mu}(t,\boldsymbol{X}_t)=(\boldsymbol{\mu}_{X_1},\boldsymbol{\mu}_{X_2})^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{11} & \boldsymbol{\Omega}_{12}\\ \boldsymbol{\Omega}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Omega}_{22}\end{bmatrix}$$

称$\boldsymbol{X}_t=(X_1(t),X_2(t))^{\mathrm{T}}$是线性—二次的，如果$\boldsymbol{\mu}_{X_1}$与$\boldsymbol{\Omega}_{11}$的分量及$\lambda(t,\boldsymbol{X}_t)$关于$X_1$是线性函数并且是$X_2$的二次函数，$\boldsymbol{\mu}_{X_2}$与$\boldsymbol{\Omega}_{12}$的分量仅关于$X_2$是线性函数，并且协方差矩阵$\boldsymbol{\Omega}_{22}$是时间变量$t$的确定性函数. 对于属于 LQJD 类的状态向量，Cheng 和 Scaillet[19] 给出了结构约束条件以及可容许条件以保证模型是可解析求解的，而上述随机微分方程(1)的参数设置满足这两个约束条件. 关于 LQJD 框架的更多详细内容，可参阅文献[19]及其中的参考文献.

1.2　一般定价模型

为了保证利率始终为正值且考虑利率的跳跃，采用 LQJD 模型来描述利率的变化，即利率$r(t)$是关于X_1的线性函数与关于X_2的二次函数之和. 更一般的，可以增加依赖时间的扩散项以作调整项(例如 Scott[32]、Chen 和 Yang[33]). 令无风险利率$r(t)$满足如下的随机微分方程

$$\mathrm{d}r(t)=\mathrm{d}\left\{\sum_{i=1}^{n_2}[l_i(t)+y_i^2(t)]\right\}+\mathrm{d}(J_t) \quad (2)$$

式中，$l_i(t)$是关于时间的函数. $\boldsymbol{Y}(t)=(y_1(t),\cdots,y_{n_2}(t))^{\mathrm{T}}$是二次型状态向量且满足

$$\mathrm{d}y_i(t)=-\alpha_i y_i(t)\mathrm{d}t+\sigma_i\mathrm{d}W_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n_2 \quad (3)$$

式中，α_i和σ_i是常数；$W_i(t)$是标准布朗运动，且满足$\mathrm{d}W_i(t)\mathrm{d}W_j(t)=\rho_{ij}\mathrm{d}t$，这样$\boldsymbol{Y}(t)$的协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n_2}\sigma_1\sigma_{n_2}\\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n_2}\sigma_2\sigma_{n_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \rho_{1n_2}\sigma_1\sigma_{n_2} & \rho_{2n_2}\sigma_2\sigma_{n_2} & \cdots & \sigma_{n_2}^2\end{pmatrix} \quad (4)$$

$J_t=\sum_{i=1}^{N_t}D_i$是复合 Poisson 过程且为线性状态变量，其强度为$\lambda(\boldsymbol{Y}_t,t)$且跳跃幅度的分布函数为$\boldsymbol{\nu}$. 假定跳跃的变换$\int \mathrm{e}^{\omega z}\mathrm{d}v(z)$对于复数$\omega$存在，并且其导数$\int z\mathrm{e}^{\omega z}\mathrm{d}v(z)$是有限的.

对于信用衍生品，一般涉及到一个或者多个与参考债务实体相关联的违约停时，不失一般性，假定存在k个违约停时$T_1,T_2,\cdots,T_k$. 在简约模型的框架下，违约停时T_i等价于强度为$\lambda_{i,t}$以及具有单位跳跃幅度的计数过程$N_{i,t}$，即$N_{i,t}=1_{\{T_i\leqslant t\}}$. 这里，强度$\lambda_{i,t}$服从一个严格为正的随机过程，使得对于很小的数$\Delta>0$，$\lambda_{i,t}$可以在$\mathrm{E}[N_{i,t+\Delta}-N_{i,t}\mid F_t]\approx\lambda_{i,t}\Delta$，$i=1,2,\cdots,k$的意义下等于条件均值到达率(conditional arrival rate). 在简约模型中，描述强度变化的随机过程完全决定违约停时

的概率分布.

加息周期中利率的跳跃将会对经济环境带来冲击,以致促使发生系统信用风险,这种影响可以从流动性的角度加以分析. 在货币政策收紧的不同阶段,发生违约事件以及系统性信用风险的概率各不相同. 在初期阶段,流动性比较充足,出现违约事件的可能性较低; 在中期阶段,流动性有所趋紧,出现系统性信用风险的可能性不大,但可能会发生个别违约事件; 在后期阶段,流动性日益紧张,某些行业的企业可能发生资金链断裂情况,出现系统性信用风险的可能性较大. 由此分析可以得出,当利率到达一定水平时,利率继续发生跳跃将会影响违约概率(亦即违约强度) 的大小. 同时,利率跳跃对违约概率的影响程度会不同,该影响系数依赖于利率的大小、跳跃的次数以及跳跃的幅度. 因此,利率的跳跃与违约停时相应的强度过程有如下关系,即跳跃次数越多且利率正向跳跃的幅度越大,则违约强度增加得越多且违约停时发生的概率越大. 因此,本文将建立个模型以体现利率的跳跃与违约概率之间的这种依赖关系. 然而,上述利率的连续上调影响违约概率的分析并没有相应的实证结果,因而给出如下的假定:

假定　当利率频繁上调且到达一定水平时,利率的跳跃将会同时影响到违约事件的发生概率.

正如本小节开始所述,令 $J_t = \sum_{i=1}^{N_t} D_i$ 为描述利率变化的随机过程的跳跃部分. 根据前面的分析,J_t 可以作为风险因素对待. 为了体现利率的跳跃与违约停时发生概率之间的依赖关系,令计数过程 $N_{i,t}$ 相应的违约强度满足下面的随机微分方程

$$\mathrm{d}\lambda_{i,t} = \mathrm{d}R_{i,t} + \delta_i \mathrm{d}J_t,\ i = 1,2,\cdots,k$$

式中,$R_{i,t}$ 为连续项; δ_i 是敏感系数,是关于利率与其跳跃幅度的函数,表示违约强度对利率跳跃的敏感程度,即若 δ_i 的绝对值越大,则违约强度对于利率的跳跃更加敏感. 为了对上述模型进行扩展,令

$$\mathrm{d}\lambda_{i,t} = \mathrm{d}R_{i,t} + \delta_i \mathrm{d}J_t + \sum_{j=1}^{m-1} [\boldsymbol{\delta}_j \mathrm{d}\boldsymbol{Z}_j(t)]_i,\quad i = 1,2,\cdots,k \tag{5}$$

式中,$\boldsymbol{Z}_j(t)$, $j = 1,2,\cdots,m-1$ 是其它 k 维跳跃过程向量,它对于违约强度的影响也是不可预测的. $\{\boldsymbol{\delta}_j\}_{j=1}^{m-1}$ 是 $m-1$ 个 k 维对角矩阵,其每个分量为相应跳跃过程分量的敏感系数. 由于违约强度决定着违约停时的概率分布,因而本文的模型体现了利率的跳跃与违约停时发生概率分布之间的依赖关系. 为了说明这点,给出了利率跳跃过程 J_t 的样本路径,以及满足式(5) 的违约强度 λ_t 在没有其它跳跃过程、$k = 1$ 且 $\mathrm{d}R_t = \kappa(\theta - \lambda_t)\mathrm{d}t$ 时的样本路径(见图 1) . 这里,回归率 $\kappa = 1.2$,回归水平 $\theta = 0.5$ 且敏感参数 $\delta = 1$. J_t 是纯跳跃过程,其在强度为 $c = 2$ 的 Poisson 时刻独立跳跃且跳跃幅度服从均值为 $J = 2$ 的指数分布.

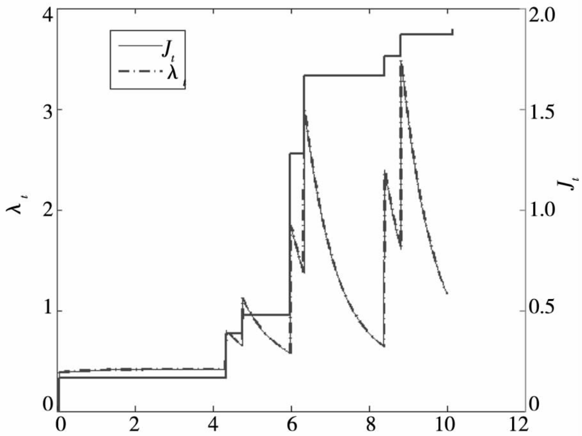

图 1　利率跳跃过程 J_t 的样本路径以及违约强度过程 λ_t 的样本路径

Fig. 1 Sample paths of jump process J_t in interest rate and the intensity process λ_t

从上面的参数设置可知,若违约强度过程 λ_t 不受利率跳跃过程 J_t 的影响,则 λ_t 将在回归水平 $\theta = 0.5$ 附近连续的变动. 而当 λ_t 与 J_t 正相关时,从图 1 可以看到,利率发生正向跳跃,违约强度 λ_t 也会随之发生正向跳跃,且使得 λ_t 的数值远远高于其回归水平. 由于违约的发生概率由违约强度决定,因此图 1 进而表明利率的正向跳跃将显著提高违约的发生概率.

更一般地,将式(3) 、式(5) 及跳跃过程 J_t 写成向量的形式,即 n - 维状态空间 D 中的状态向量 $\boldsymbol{X}_t = (X_1(t), X_2(t))^{\mathrm{T}}$ 满足下面类似于式(1) 的随机微分方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\mu}(t,\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t + \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\delta}_j \mathrm{d}\boldsymbol{Z}_j(t) \tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{Z}_j(t)$ 是纯跳跃过程且只有前 $n_1 = k + 1$ 个

分量非零，其跳跃幅度在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上具有固定的概率分布 ν_j，强度为 $\{\lambda_j(X_t): t \geq 0\}$ 且 $\lambda_j: D \rightarrow [0,\infty)$.

为了定价信用衍生品，需要得到关于状态向量 X_t 的标准变换，这个标准变化是如下定义，即

$$\psi(g;X_t,t,T) = E_t\left[\exp\left(-\int_t^T R(s,X_s)\,ds\right)e^{g(T,X_T)}\right] \tag{7}$$

式中，$E_t[\cdot] = E_t[\cdot|F_t]$ 是在 t 时刻之前的信息 $\{F_t, t \leq T < \infty\}$ 下的条件期望. 下面的引理 1 表明，当函数 $g(t,X_t)$ 满足式(8) 时，随机过程

$$\psi(t,X_t) = \exp\left(-\int_t^T R(s,X_s)\,ds\right)e^{g(T,X_t)}$$

是一个鞅，进而可得到 $\psi(g;X_t,t,T) = e^{g(T,X_t)}$.

引理 1　如果可积条件成立且函数 $g(t,X_t)$ 满足下面的微分积分方程(PIDE)

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}tr\left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\right] + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(X_t)(\theta_j - 1) = R \tag{8}$$

式中，$\theta_j = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{g(t,x+\delta_j z)-g(t,x)}\,d\boldsymbol{\nu}_j(z)$，$j = 1,\cdots,m$ 且积分是良好定义的(well defined)，那么 $\Psi(t,X_t)$ 便是一个鞅.

引理 1 的证明(见附录 A) 类似于文献[19]中引理 2.1 的证明.

注 1　在仿射跳跃—扩散模型中，利率 $r(t)$、$\{Z_j\}_{j=1}^{m-1}$ 的违约强度 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m-1}$ 和跳跃过程 J_t 的违约强度 λ_t 都是 X_t 的线性函数，因而可以对微分积分方程(8) 进行求解. 而为了在 LQJD 框架下得到式(8) 的解，需假设 $r(t)$、λ_t 和 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m-1}$ 均是线性—二次函数，进而式(7) 中的 R 也是线性—二次函数，即令 $M = R$, $M = r$，或者 $M = \lambda_j$, $j = 1,\cdots,m$，则有

$$M(t,(x_1,x_2)) = \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\Lambda_M(t)\boldsymbol{x}_2 + a_M(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1 + b_M(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2 + c_M(t)$$

1.3　标准变换的求解

如在 1.1 与 1.2 节中所述，模型(1) 与(6) 满足 LQJD 框架的结构约束条件和可容许条件. 基于引理 1 中的式(8)，可以利用文献[30]中的方法得到标准变换(7) 的解，且得到的解将是指数线性—二次(exponential linear-quadratic) 函数. 为了求得该形式的解，首先把式(1) 中的扩散项与协方差矩阵重新写成与式(7) 一样的表达式

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mu}_{x_1} = \boldsymbol{K}_{10} + \boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{X}_2 + \zeta(\boldsymbol{X}_2),\ (\boldsymbol{K}_{10},\boldsymbol{K}_{11},\boldsymbol{K}_{12}) \in \mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_1\times n_1}\times\mathbb{R}^{n_1\times n_1},\\
&\zeta(\boldsymbol{X}_2) = (\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}_{n_1}\boldsymbol{X}_2)^{\mathrm{T}},\quad \zeta_1 \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2},\ i = 1,\cdots,n_1,\\
&\boldsymbol{\mu}_{x_2} = \boldsymbol{K}_{20} + \boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{X}_2,\ (\boldsymbol{K}_{20},\boldsymbol{K}_{22}) \in \mathbb{R}^{n_2}\times\mathbb{R}^{n_2\times n_2},\\
&(\Omega_{11})_{ij} = (\omega_{10})_{ij} + (\boldsymbol{\omega}_{11})_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1 + (\omega_{12})_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\vartheta}_{ij}\boldsymbol{X}_2,\\
&\quad((\omega_{10})_{ij},(\boldsymbol{\omega}_{11})_{ij},(\boldsymbol{\omega}_{12})_{ij},\boldsymbol{\vartheta}_{ij}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\times\mathbb{R}^{n_2\times n_2},\ i,j = 1,\cdots,n_1,\\
&(\boldsymbol{\Omega}_{12})_{ij} = (\omega_{20})_{ij} + (\omega_{22})_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2,\ ((\omega_{20})_{ij},(\boldsymbol{\omega}_{22})_{ij}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n_2},\ i = 1,\cdots,n_1,\ j = 1,\cdots,n_2,\\
&R = \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\Lambda_R(t)\boldsymbol{X}_2 + a_R(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{b}_R(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2 + c_R(t),\\
&\quad(\boldsymbol{\Lambda}_R,\boldsymbol{a}_R,\boldsymbol{b}_R,c_R) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}\times\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\times\mathbb{R},\\
&\lambda_j = \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_{\lambda,j}(t)\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{a}_{\lambda,j}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{b}_{\lambda,j}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2 + c_{\lambda,j}(t),\\
&\quad(\Lambda_{\lambda,j},\boldsymbol{a}_{\lambda,j},\boldsymbol{b}_{\lambda,j},c_{\lambda,j}) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}\times\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\times\mathbb{R},\ j = 1,\cdots,m
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

此外，方阵 $\boldsymbol{\Omega}_{22} \in \mathbb{R}^{n_2\times n_2}$ 是常值对称矩阵，并且方阵 ζ_1, $\boldsymbol{\vartheta}_{ij}$, $\boldsymbol{\Lambda}_R$ 和 $\{\Lambda_j\}_{j=1}^{m}$ 也同样是对称的. 上面对扩散项和协方差矩阵的表达式同样也可以用矩阵的 Kronecker 算子乘积来表示(参见文献[19]).

将式(9) 带入到式(8) 中，便得到函数 $g(t,X_t)$ 满足如下方程

$$R = \frac{\partial g}{\partial t} + [\boldsymbol{K}_{10} + \boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{X}_2 + \zeta(X_2)]^{\mathrm{T}} \frac{\partial g}{\partial x_1} + (\boldsymbol{K}_{20} + \boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{X}_2)^{\mathrm{T}} \frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{1}{2} tr [\Omega_{11}\boldsymbol{g}_{x_1x_1^{\mathrm{T}}} + 2\Omega_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{x_1x_2^{\mathrm{T}}} + \boldsymbol{\Omega}_{22}\boldsymbol{g}_{x_2x_2^{\mathrm{T}}}] + \sum_{j=1}^{m} [\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_{\lambda,j}(t)\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{a}_{\lambda,j}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{b}_{\lambda,j}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2 + c_{\lambda,j}(t)](\theta_j - 1) \tag{10}$$

为了使用待定系数法来求解函数 $g(t,X_t)$，假设满足 PIDE(10) 的解关于状态变量 X_t 是线性—二次函数，即

$$g(t,\boldsymbol{X}_t) = \boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{B}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{C}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1 + D(t)$$

并且满足边界条件 $g(T,\boldsymbol{x}) = g_0(\boldsymbol{x})$. 为了讨论方便，本文记 $\boldsymbol{A} = (A_1,\cdots,\boldsymbol{A}_{n_2})$，$\boldsymbol{B} = (B_1,\cdots,B_{n_2})^{\mathrm{T}}$，以及 $\boldsymbol{C} = (C_1,\cdots,C_{n_1})^{\mathrm{T}}$. 对函数 g 求偏导数并代入到式(10) 中，再考虑方程(10) 对任意的状态变量 X 都成立，那么在式(10) 中，X_1 和 X_2 各阶数的系数都必须为零. 这样便得到了下面的常微分方程组(ODEs)

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} &= -\boldsymbol{\Lambda}_R + \sum_i C_i\zeta_i + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_{22} + \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Omega}_{22}\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_iC_j\boldsymbol{\vartheta}_{ij} + \\
&\quad \sum_{i,j} C_i(\boldsymbol{A}_j(\omega_{22})_{ij}^{\mathrm{T}} + (\omega_{22})_{ij}A_j^{\mathrm{T}}) + \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{\Lambda}_{\lambda,j}(\theta_j - 1), \\
-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} &= -\boldsymbol{b}_R + \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}_{22}\boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_{20} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}_{20}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Omega}_{22}\boldsymbol{B} + \\
&\quad \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_iC_j(\boldsymbol{\omega}_{12})_{ij} + \sum_{i,j} C_i\boldsymbol{B}_j(\omega_{22})_{ij} + \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{b}_{\lambda,j}(\theta_j - 1), \\
-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t} &= -\boldsymbol{a}_R + \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_iC_j(\boldsymbol{\omega}_{11})_{ij} + \sum_{j=1}^{m} a_{\lambda,j}(\theta_j - 1), \\
-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t} &= -c_R + \boldsymbol{K}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}_{20}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} + \frac{1}{2}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_{10}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\omega_{20}\boldsymbol{B} + \\
&\quad \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\Omega_{22}\boldsymbol{B} + tr(\boldsymbol{\Omega}_{22}\boldsymbol{A}) + \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{c}_{\lambda,j}(\theta_j - 1).
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

通过上面的分析便得到如下的定理.

定理 假设技术性的可积条件成立，那么标准变换(7) 可以由如下形式给出

$$\psi(g;\boldsymbol{X}_t,t,T) = \mathrm{E}_t\left[\exp\left(-\int_t^T R(s,\boldsymbol{X}_s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{g(T,X_T)}\right] = \mathrm{e}^{g(t,X_t)} = \mathrm{e}^{X_2^{\mathrm{T}}A(t)X_2+B(t)^{\mathrm{T}}X_2+C(t)^{\mathrm{T}}X_1+D(t)} \tag{12}$$

其中系数函数 $(A,B,C,\mathrm{D}) \in \mathrm{R}^{n_2\times n_2}\times\mathrm{R}^{n_2}\times\mathrm{R}^{n_1}\times\mathrm{R}$，是在边界条件 $g(T,\boldsymbol{x}) = g_0(\boldsymbol{x})$ 下 Riccati 方程组(11) 的唯一解.

信用衍生品的定价问题通常还需要计算扩展变换 $\phi:\mathrm{R}^{n_1}\times\mathrm{R}^{n_1}\times D\times\mathrm{R}_+\times\mathrm{R}_+\rightarrow\mathrm{R}$，该扩展变换 ϕ 的定义如下

$$\phi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{X}_t,t,T) = \mathrm{E}_t\left[\boldsymbol{v}\boldsymbol{X}_1(t)\exp\left(-\int_t^T R(s,\boldsymbol{X}_s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{uX_1(t)}\right] \tag{13}$$

通过在边界条件 $g(T,\boldsymbol{X}_T) = \boldsymbol{u}\boldsymbol{X}_1(T)$ 下求得标准变换 ψ 并对 ψ 求偏导数，可以计算扩展变换 ϕ. 特别是，在包括 θ 可微等特定技术性条件下，能够得到

$$\phi(v,u,X_t,t,T) = \psi(g;\boldsymbol{X}_t,t,T)(\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}}(t)\boldsymbol{X}_2 + \widetilde{\boldsymbol{B}}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_2 + \widetilde{\boldsymbol{C}}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1 + \widetilde{D}(t)) \tag{14}$$

式中，ψ 在 $g(T,\boldsymbol{X}_T) = \boldsymbol{u}\cdot X_1(T)$ 时由式(12) 给出; 系数函数 $\widetilde{A}(t)$，$\widetilde{\boldsymbol{B}}(t)$，$\widetilde{\boldsymbol{C}}(t)$ 和 $\widetilde{D}(t)$ 是常微分方程组

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{A}}}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \widetilde{C}_i\zeta_i + (\widetilde{\boldsymbol{A}}K_{22} + \boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}}) + 4\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Omega}_{22}\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\widetilde{C}_iC_j + C_i\widetilde{C}_j)\boldsymbol{\vartheta}_{ij} + \\
&\quad \sum_{i,j}\widetilde{C}_i(\boldsymbol{A}_j(\omega_{22})_{ij}^{\mathrm{T}} + (\omega_{22})_{ij}\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}) + \sum_{i,j}C_i(\widetilde{\boldsymbol{A}}_j(\omega_{22})_{ij}^{\mathrm{T}} + (\omega_{22})_{ij}\widetilde{\boldsymbol{A}}_j^{\mathrm{T}}) + \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{\Lambda}_{\lambda,j}\nabla\theta_j(\delta_j\boldsymbol{C})\widetilde{\boldsymbol{C}}, \\
-\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{B}}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{K}_{22}\widetilde{\boldsymbol{B}} + 2\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{K}_{20} + 2\widetilde{\boldsymbol{A}}\omega_{20}^{\mathrm{T}}C + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}_{20}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}} + 2\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Omega}_{22}\boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Omega}_{22}\widetilde{\boldsymbol{B}} + \\
&\quad \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\widetilde{C}_iC_j + C_i\widetilde{C}_j)(\omega_{12})_{ij} + \sum_{i,j}(\widetilde{C}_i\boldsymbol{B}_j + C_i\widetilde{\boldsymbol{B}}_j)(\omega_{22})_{ij} + \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{b}_{\lambda,j}\nabla\theta_j(\delta_j\boldsymbol{C})\widetilde{\boldsymbol{C}}, \\
-\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{C}}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\widetilde{C}_iC_j + C_i\widetilde{C}_j)(\omega_{11})_{ij} + \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{a}_{\lambda,j}\nabla\theta_j(\delta_j\boldsymbol{C})\widetilde{\boldsymbol{C}}, \\
-\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{D}}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{K}_{10}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{K}_{20}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\omega_{10}\widetilde{\boldsymbol{C}} + \widetilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\omega_{20}B + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\omega_{20}\widetilde{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\Omega_{22}\widetilde{B} + tr(\Omega_{22}\widetilde{\boldsymbol{A}}) + \\
&\quad \sum_{j=1}^{m}c_{\lambda,j}\nabla\theta_j(\delta_j\boldsymbol{C})\widetilde{\boldsymbol{C}}
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

在边界条件 $\widetilde{A}(T)=0$，$\widetilde{B}(T)=\mathbf{0}$，$\widetilde{C}(T)=\boldsymbol{v}$ 以及 $\boldsymbol{D}(T)=0$ 下的解，并且 $\nabla\theta(\boldsymbol{c})$ 是 $\theta(\boldsymbol{c})$ 关于 $c\in\mathbb{R}^{n_1}$ 的梯度. 这样，便可得到如下的推论.

推论 假设可积条件成立，那么由式(13)定义的扩展变换 ϕ 可由式(14)与式(15)给出.

2 模型在 CDS 定价上的应用

本节在考虑把利率的跳跃作为风险因素的基础上，讨论如何把上一节给出的一般定价模型应用在 CDS 的定价上. 包括 CDS 在内的信用衍生品是与信用违约事件相关的金融创新产品，因此对于信用衍生品的定价，关键的一点是如何计算违约停时发生的概率. 目前信用风险定价模型可以分为两类: 1) 结构模型[34-35]; 2) 简约模型，或者称为强度模型(intensity model)[30,36-37]. 本节采用简约模型的框架，结合得到的一般定价模型，在状态变量满足特定随机微分方程的条件下，给出 CDS 价差(spread)定价公式的显性表达式.

简约模型假设违约是在没有预期的情况下突然发生并且服从一个 Poisson 过程. 为了下面的叙述方便，首先简单介绍简约模型. 如在 1.1 小节中已提到的，给定一个概率空间 (Ω,F,P)，其上有右连续的完全信息 σ-域流 $F=(F_t)_{t\geqslant0}$. 在简约模型中，完整的 σ-域流 $F_t=H_t\vee G_t$，其中 H_t 是违约相应的计数过程 $N_t=1_{\{\tau\leqslant t\}}$ 所产生的 σ-域流，G_t 是表示市场信息产生的 σ-域流，τ 代表违约时刻(或违约停时). 对于计数过程 N_t，对其强度过程 $\lambda_t=\lambda(t)$ 做出双随机(double stochastic)的假设，使得 $\{N_t-\int_0^t\lambda_s\mathrm{d}s: t\geqslant0\}$ 在测度 P 下是个局部鞅. 这样 N_t 是个 Cox 过程，即在 σ-域流 G_t 的条件下，对于 $0\leqslant s\leqslant t$，有

$$P(N_t-N_s=k\mid F_s\vee G_\infty)=\frac{(\Lambda_t-\Lambda_s)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\Lambda_t-\Lambda_s)}$$

其中 $\Lambda_t=\int_0^t\lambda_u\mathrm{d}u$. 在这个设定下，得到违约时刻的概率

$$P_t(\tau>T)=\mathrm{E}_t\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T\lambda_u\mathrm{d}u}\right]$$

式中 $\mathrm{E}_t[\;]=\mathrm{E}_t[\;\mid G_t]$ 是在 t 时刻之前的市场信息 G_t 下的条件期望.

2.1 CDS 定价

信用违约互换(credit default swap，CDS)是国外债券市场中近些年来最常见的信用衍生产品. 它是指信用保护买方(信用风险卖方)向信用保护卖方(信用风险买方)支付一定费用，如果双方约定的“参考债务实体”在规定的时间内发生信用违约事件，信用保护卖方须向信用保护买方支付信用违约产生的损失的互换交易合约. 这些互换合约可以分为多类，包括单实体 CDS(single-name)，投资组合违约互换以及信用

互换指数. 本节主要考虑单实体 CDS(简记之 CDS). 标准 CDS 合约包括两个部分,即在互换交易中涉及到两个方面的费用:一是保费的现金流支付,另一是违约赔偿费. 对于保费的现金流支付,信用保护买方必须定期以固定的价差向信用保护卖方支付保费,直到合约到期或者违约发生为止. 同时,如果违约事件在合约到期日之前发生,信用保护卖方须向信用保护买方支付由于违约所造成的损失. 这样,保费是由支付的现金流构成,即在合约规定的时刻 $t_k = k\Delta t, k = 1, 2, \cdots, N$ 支付 $S_t K\Delta t$,这里 S_t 是 t 时刻的 CDS 价差,K 是 CDS 参考债务实体的名义价值. 另一方面,当违约发生即 $\tau < T$ 时,信用保护卖方要支付的违约损失为 $(1 - R)K$,其中 R 为参考债务实体的回收率 (recovery rate),为了讨论方便令其为常数. 由于是在简约模型下,令 $N_{0,t} = 1_{\{\tau < t\}}$ 为计数过程,其强度为 $\lambda_{0,t} = \lambda_0(t)$. 因而对于 $0 \leqslant t \leqslant u$,有

$$P_t(\tau > u) = \mathrm{E}_t\left[\mathrm{e}^{-\int_t^u \lambda_{0,s}\mathrm{d}s}\right]$$

由风险中性定价理论可知,在 $t < t_1$ 时刻的保费总额现值为 $V_t(T)S_t$,其中③

$$\begin{aligned} V_t(t) &= K\Delta t\Bigg\{\sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{-\int_t^{t_k} r_s\mathrm{d}s}1_{\{\tau > t_k\}} \mid F_t\right] + \\ &\quad \sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}\left[\frac{\tau - t_{k-1}}{\Delta t}\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau} r_s\mathrm{d}s}1_{\{t_{k-1} < \tau < t_k\}} \mid F_t\right]\Bigg\} \\ &= K\Delta t\Bigg\{\sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}_t\left[\mathrm{e}^{-\int_t^{t_k}(r_s + \lambda_{0,s})\mathrm{d}s}\right] + \\ &\quad \sum_{k=1}^{N}\int_{t \vee t_{k-1}}^{t_k}\frac{u - t_{k-1}}{\Delta t}\mathrm{e}^{-\int_t^u r_s\mathrm{d}s}\mathrm{d}P_t(\tau < u)\Bigg\} \end{aligned} \tag{16}$$

并且违约的赔付现值为

$$\begin{aligned} D_t(T) &= (1 - R)K\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau} r_s\mathrm{d}s}1_{\{t < \tau < T\}} \mid F_t\right] = \\ &\quad (1 - R)K\int_t^T \mathrm{E}_t\left[\lambda_{0,u}\mathrm{e}^{-\int_t^u (r_s + \lambda_{0,s})\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{17}$$

根据上面对 CDS 的介绍,令保费总额现值与违约赔付现值相等,便得到在时刻 t 的公平 CDS 价差为

$$S_t = \frac{D_t(T)}{V_t(T)} \tag{18}$$

式中 $V_t(T)$ 与 $D_t(T)$ 分别由式(16)、式(17) 给出.

注 2 如果假设保费是连续支付的直到 $T \wedge \tau$ 为止,即意味着 $N \to \infty$,那么在违约时刻 τ 的应计保费将不存在,这样,$V_t(T)$ 的公式可以重新写成

$$V_t(T) = K\int_t^T \mathrm{E}_t\left[\mathrm{e}^{-\int_t^u (r_s + \lambda_{0,s})\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}u \tag{19}$$

基于上面给出的公平 CDS 价差公式 (16)—(19),应用已得定理的结果来研究在考虑利率的跳跃时 CDS 的定价问题. 正如在 1.2 节中所讨论的,令利率 $r(t)$ 满足下面的随机微分方程

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r(t) &= \mathrm{d}\left\{\sum_{i=1}^{n_2}\left[l_i(t) + y_i^2(t)\right]\right\} + \mathrm{d}J_t \\ &= \mathrm{d}\left[\tilde{L}(t) + \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2(t)\right] + \mathrm{d}J_t \end{aligned}$$

式中,$l_i(t)$ 是可以被估计的与时间相关的函数; $\tilde{L}(t) = \sum_{i=1}^{n_2} l_i(t)$; $\boldsymbol{Y}(t) = (y_1(t), \cdots, y_{n_2}(t))^{\mathrm{T}}$ 是二次型状态向量且满足

$$\mathrm{d}y_i(t) = -\alpha y_i(t)\,\mathrm{d}t + \sigma_i\mathrm{d}W_i(t),\ i = 1, 2, \cdots$$

式中,α_i 和 σ_i 是常数; $W_i(t)$ 是标准布朗运动且满足 $\mathrm{d}W_i(t)\,\mathrm{d}W_j(t) = \rho_{ij}\mathrm{d}t$,其协方差矩阵由式(4) 给出. 除此以外,令跳跃过程 J_t 的强度 $\lambda(t, \boldsymbol{Y}_t)$ 为 $l + \boldsymbol{Y}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Y}(t)$,其它跳跃过程 $Z_i(t)$ 的强度 $\lambda_i(t, \boldsymbol{Y}_t)$ 亦为状态变量 $\boldsymbol{Y}(t)$ 的二次函数,即

$$\lambda_i(t) = l_i + \boldsymbol{Y}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_i\boldsymbol{Y}(t),\ i = 2, \cdots, m - 1$$

式中,l 与 $\{l_i\}_{i=1}^{m-1}$ 是非负常数; $\boldsymbol{\Lambda}$ 与 $\{\boldsymbol{\Lambda}_i\}_{i=1}^{m-1}$ 是对称方阵. 违约相应的计数过程 $N_{0,t}$ 的强度 $\lambda_0(t)$ 满足式(5),以表示违约强度与利率的跳跃之间的依赖关系. 这样,定价模型中的状态向量便是 $\boldsymbol{X} = (\lambda_0, J_t, y_1, \cdots, y_{n_2})$,其中 $\boldsymbol{X}_1 = (\lambda_0, J_t)$ 是线性状态向量,$\boldsymbol{X}_2 = (y_1, \cdots, y_{n_2})$ 是二次型状态向量. 由于模型的参数过多,考虑一般的情况比较复杂,为了说明如何将本文的模型应用在 CDS 的定价上,下一节将在状态向量满足特定过程的条件下,给出一个具体且相对简单的例子.

2.2 一个具体例子

考虑如下特殊的情形. 假设跳跃过程 J_t 的强度是常数 $\bar{\lambda}$ 且跳跃幅度服从指数分布,$\tilde{L}(t) = 0$ 并且 $n_2 = 1$,即只有 1 个二次型变量 y,从而将利率简单的设置为 $r(t) = y^2(t) + J_t$. 此外,除了跳跃过程 J_t 以外没有其它的跳跃过程来驱动强度

③ 对于任意的 x 与 y,$x \wedge y$ 表示两者最小值,$x \vee y$ 表示两者最大值.

$\lambda_0(t)$，即 $\boldsymbol{Z}(t)=(J_t,J_t)^{\mathrm{T}}$. 这样，状态向量 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_1,X_2)=(\lambda_0,J_t,y)$，其中 $\boldsymbol{X}_1=(\lambda_0,J_t)$ 且 $X_2=y$，并且这些状态变量满足如下的随机过程

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\lambda_0(t)=\kappa(c-\lambda_0(t))\,\mathrm{d}t+\widetilde{\sigma}\mathrm{d}\widetilde{W}(t)+\delta\mathrm{d}J_t\\
&\mathrm{d}J_t=\mathrm{d}J_t\\
&\mathrm{d}y(t)=-\alpha y(t)\,\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W(t)
\end{aligned}\tag{20}$$

式中，$\widetilde{\sigma}$ 和 σ 是常数；$\widetilde{W}(t)$ 与 $W(t)$ 是标准布朗运动且满足 $\mathrm{d}\widetilde{W}(t)\mathrm{d}\widetilde{W}(t)=\rho_{11}\mathrm{d}t\mathrm{d}W(t)\mathrm{d}W(t)=\rho_{22}\mathrm{d}t$，以及 $\mathrm{d}\widetilde{W}(t)\mathrm{d}W(t)=\rho_{12}\mathrm{d}t$，$\rho_{ij}$ 是常数且 $\rho_{11}=\rho_{22}=1$，$i,j=1,2$. δ 是敏感系数，它可以是时间和利率的函数. 例如，对于常数 $a>0$ 以及 $b>0$，可以定义 $\delta=a1_{\{r_t\geqslant b\}}$（或者 $\delta=a1_{\{b\leqslant r_t\leqslant h\}}$），这意味着当利率累积上调到达或超过一定水平 b（或者利率处于一定的区间 $[b,h]$）时，违约时刻 τ 的强度才会被利率的正向跳跃提高，且影响程度由参数 a 控制. 在此例中对 δ 只做简单的处理，即假设 $\delta>0$ 为常数. 为了能够应用所得到的定理，将随机微分方程组(20) 重新写成如下的形式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}t+\vec{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}\vec{W}_t+\xi\mathrm{d}\boldsymbol{Z}_t$$

式中，$\boldsymbol{\mu}(X)=\begin{pmatrix}\mu_{X_1}\\ \mu_{X_2}\end{pmatrix}$；

$$\boldsymbol{\mu}_{X_1}=\boldsymbol{K}_{10}+\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}\kappa c\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\kappa&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0\\J_t\end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{\mu}_{X_2}=\boldsymbol{\kappa}_{22}X_2=-\alpha y$；$\vec{\sigma}=\mathrm{diag}(\widetilde{\sigma},0,\sigma)$；$\vec{W}_t=(\widetilde{W},0,W)^{\mathrm{T}}$；$\xi=\mathrm{diag}(\delta,1)$ 是敏感系数矩阵.

并且，跳跃过程 $Z(t)=(J_t,J_t)^{\mathrm{T}}$. 协方差矩阵是 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{11}&\boldsymbol{\Omega}_{12}\\ \boldsymbol{\Omega}_{12}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\Omega}_{22}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\Omega}_{11}=\begin{pmatrix}\rho_{11}\widetilde{\sigma}^2&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Omega}_{12}=\begin{pmatrix}\rho_{12}\widetilde{\sigma}\sigma\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Omega}_{22}=\rho_{22}\sigma^2$. 令式(7) 中的

$R(t,\boldsymbol{X}_t)=r(t)+\lambda_0(t)=y^2+J_t+\lambda_0(t)$ 则 $R(t,\boldsymbol{X}_t)$ 是状态向量(λ_0,J_t,y) 的线性—二次函数. 为了使公平 CDS 价差的定价公式(18) 是可求解的，必须计算 $\mathrm{E}_t\left[\lambda_0(T)\mathrm{e}^{-\int_t^T(r(s)+\lambda_0(s))\mathrm{d}s}\right]$. 为此，需要首先计算

$$I(v,\boldsymbol{X}_t,t,T)=\mathrm{E}_t\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T(r(s)+\lambda_0(s))\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{g(T,X_T)}\right]$$

其中

$$g(t,\boldsymbol{X}_t)=A(t)y^2+B(t)y+\boldsymbol{C}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1+D(t)$$

且满足边界条件 $g(T,\boldsymbol{X}_T)=v\lambda_0(T)$.

这样，由已得定理的结论可知

$$I(v,\boldsymbol{X}_t,t,T)=\mathrm{e}^{A(t)y^2+B(t)y+c(t)^{\mathrm{T}}X_1+D(t)}\tag{21}$$

其中函数 $A(t)$，$B(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$，$D(t)$ 是下面 Riccati 方程组

$$\left.\begin{aligned}
&-\partial_tA(t)=-1-2\alpha A(t)+2\sigma^2A^2(t),\\
&-\partial_tB(t)=-\alpha B(t)+2(\rho_{12}\sigma\widetilde{\sigma})A(t)C_1(t)+2\sigma^2A(t)B(t),\\
&-\partial_tC(t)=-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\kappa C_1(t)\\0\end{pmatrix},\\
&-\partial_tD(t)=\kappa cC_1(t)+\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2C_1^2(t)+(\rho_{12}\sigma\widetilde{\sigma})B(t)C_1(t)+\sigma^2A(t)+\\
&\qquad\frac{1}{2}\sigma^2B^2(t)+\bar{\lambda}\left(\int_{\mathrm{R}^2}\mathrm{e}^{(\xi C(t))^{\mathrm{T}}z}\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}(z)-1\right)
\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

在边界条件 $A(T)=0$，$B(T)=0$，$\boldsymbol{C}(T)=(v,0)^{\mathrm{T}}$ 与 $D(T)=0$ 下的解.

在上述边界条件下，容易求解出方程组(22) 中的关于 $A(t)$ 和 $\boldsymbol{C}(t)=(C_1(t),C_2(t))^{\mathrm{T}}$ 的解析解. 由附录 B 中的引理 2，可以得到

式中，$\gamma=\sqrt{\alpha^2+2\sigma^2}$；$q=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}$.

并且

$$C_1(t)=\mathrm{e}^{-\kappa(T-t)}\left(v+\frac{1}{\kappa}\right)-\frac{1}{\kappa},$$

$$C_2(t)=-(T-t)$$

基于上面得到的解 $A(t)$ 和 $\boldsymbol{C}(t)$，能够得到下面关于 $B(t)$ 的解析表达式

$$B(t) = e^{-\int_0^t (2\sigma^2 A(u) - \alpha)\,du} \int_t^T 2\rho_{11}\sigma\tilde{\sigma}A(s)\,C_1(s)\,e^{-\int_0^s (2\sigma^2 A(u) - \alpha)\,du}\,ds$$

$$= \frac{2\rho_{11}\sigma\tilde{\sigma}e^{\gamma t}}{e^{-2\gamma(T-t)+2q+1}}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$$

其中

$$P_1 = \left(v + \frac{1}{\kappa}\right)\frac{\alpha}{2\sigma^2}e^{-\kappa T}\left\{e^{(\kappa-\gamma)T+2q}\frac{1}{\kappa+\gamma}\left(1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}\right) + e^{(\kappa-\gamma)T}\frac{1}{\kappa-\gamma}\left(1 - e^{-(\kappa-\gamma)(T-t)}\right)\right\},$$

$$P_2 = \left(v + \frac{1}{\kappa}\right)\frac{\gamma}{2\sigma^2}e^{-\kappa T}\left\{e^{(\kappa-\gamma)T+2q}\frac{1}{\kappa+\gamma}\left(1 - e^{-(\kappa+\gamma)(T-t)}\right) - e^{(\kappa-\gamma)T}\frac{1}{\kappa-\gamma}\left(1 - e^{-(\kappa-\gamma)(T-t)}\right)\right\},$$

$$P_3 = \left(-\frac{1}{\kappa}\frac{\alpha}{2\sigma^2}\right)\left\{\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma T+2q}\left(1 - e^{-\gamma(T-t)}\right) - \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma T}\left(1 - e^{\gamma(T-t)}\right)\right\},$$

$$P_4 = \left(-\frac{1}{\kappa}\frac{\gamma}{2\sigma^2}\right)\left\{\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma T+2q}\left(1 - e^{-\gamma(T-t)}\right) + \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma T}\left(1 - e^{\gamma(T-t)}\right)\right\}$$

这样，在求解 $A(t)$，$B(t)$ 和 $\boldsymbol{C}(t)$ 后，可以直接通过对式(22)的最后一个方程等式的右半部分积分求得 $D(t)$.

注 3　一般，在大部分情况下，$A(t)$，$B(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$ 和 $D(t)$ 的解析表达式很难得到，只能通过数值方法(如 Runge-Kutta 法)进行求解.

得到标准变换 I 之后，便可通过对 I 关于 v 求偏导数以求解扩展变换

$$L(v,\boldsymbol{X}_t,t,T) = \mathrm{E}_t\left[\lambda_0(T)\exp\left(-\int_t^T (y^2(u) + \lambda_0(u) + J_u)\,du\right)e^{g(T,X_T)}\right]$$

这需要求解下面给出的常微分方程组(24). 在包括 θ 可微等技术性条件下，有

$$L(v,\boldsymbol{X}_t,t,T) = I(v,\boldsymbol{x},t,T)\left(\tilde{A}(t)y^2 + \tilde{B}(t)y + \tilde{\boldsymbol{C}}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{D}(t)\right) \tag{23}$$

式中 I 由式(21)给出，函数 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$ 和 $\tilde{D}$ 是常微分方程组

$$\left.\begin{aligned}
-\partial_t\tilde{A}(t) &= -2\alpha\tilde{A} + 4\sigma^2 A\tilde{A} + \Lambda,\\
-\partial_t\tilde{B}(t) &= -\alpha\tilde{B} + 2\tilde{A}(\rho_{12}\sigma\tilde{\sigma})C_1 + 2A(\rho_{12}\sigma\tilde{\sigma})\tilde{C}_1 + 2\sigma^2 B\tilde{A} + 2\sigma^2 A\tilde{B},\\
-\partial_t\tilde{\boldsymbol{C}}(t) &= \begin{pmatrix}-\kappa\tilde{C}_1\\ 0\end{pmatrix},\\
-\partial_t\tilde{D}(t) &= c\kappa\tilde{C}_1 + \tilde{C}_1\tilde{\sigma}^2 C_1 + \rho_{12}\sigma\tilde{\sigma}B\tilde{C}_1 + \rho_{12}\sigma\tilde{\sigma}\tilde{B}C_1 + \sigma^2\tilde{A} + \sigma^2 B\tilde{B} + \bar{\lambda}\,\nabla\theta(\xi\boldsymbol{C})\,\xi\tilde{\boldsymbol{C}}
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

在边界条件 $\tilde{A}(T) = 0$，$\tilde{B}(T) = 0$，$\tilde{C}(T) = (1, 0)^{\mathrm{T}}$ 与 $\tilde{D}(T) = 0$ 下的解，这里 $\nabla\theta(c)$ 是 $\theta(c)$ 关于 $c \in \mathrm{R}^2$ 的梯度. 类似的，除了一些极少数的情形，上述常微分方程组只能通过数值方法求解.

然而在本例中，由于已经得到了 I 中各系数函数的解析解，直接对 $I(v,\boldsymbol{x},t,T)$ 关于 v 求偏导数便可得到 $L(v,\boldsymbol{x},t,T)$，即

$$L(v,\boldsymbol{X}_t,t,T) = \partial_v I(v,\boldsymbol{X}_t,t,T) = \left[\partial_v A(t)y^2 + \partial_v B(t)y + \partial_v C_1(t)\lambda_0(t) + \partial_v D(t)\right]I(v,\boldsymbol{X}_t,t,T) \tag{25}$$

由上面的分析可知

$$I(0,\boldsymbol{X}_t,t,T) = \mathrm{E}_t\left[\exp\left(-\int_t^T (y^2(u) + \lambda_0(u) + J_u)\,du\right)\right] = e^{A(t)y^2 + B(t)y + \boldsymbol{C}(t)^{\mathrm{T}}X_1 + D(t)}\Big|_{v=0}$$

并且

$$L(0,\boldsymbol{X}_t,t,T) = \mathrm{E}_t\left[\lambda_0(T)\exp\left(-\int_t^T (y^2(u) + \lambda_0(u) + J_u)\,du\right)\right]$$

$$= \left[\partial_v A(t)y^2 + \partial_v B(t)y + \partial_v C_1(t)\lambda_0 + \partial_v D(t)\right]e^{A(t)y^2 + B(t)y + \boldsymbol{C}(t)^{\mathrm{T}}X_1 + D(t)}\Big|_{v=0}$$

这样便可以显性的计算得到 CDS 价差公式(18).

由 $I(0,X_t,t,T)$ 与 $L(0,X_t,t,T)$ 的公式可以知道，将利率的跳跃作为风险因素考虑时，由于违约强度 λ_0 是由利率的跳跃驱动的，因而在利率发生正向跳跃时，考虑利率跳跃将使得 λ_0 亦发生正向跳跃，即 $\Delta\lambda_0(t)=\lambda_0(t)-\lambda_0(t\_)>0$. 又由上面的计算可知

$$C_1(t)\mid_{v=0}=\frac{1}{\kappa}(e^{-\kappa(T-t)}-1)<0,$$

$$\partial_v C_1(t)\mid_{v=0}=e^{-\kappa(T-t)}\in(0,1)$$

因而利率正向跳跃时 I 将减少，即 $\Delta I=I(0,X,t,T)-I(0,X,t\_,T)<0$. 而对于 L，通过计算可以知道 L 或者增加或者减少，但即使 L 减少，其减少幅度的比例也小于 I 减少幅度的比例④. 由式(17)—(19)，有

$$S_t=\frac{D_t}{V_t}=\frac{(1-R)\int_t^T L(0,X_t,t,u)\,du}{\int_t^T I(0,X_t,t,u)\,du},$$

故由上面的分析可知 CDS 价差会有跳跃性的变化且 $S_t>S_t'$，这里 S_t' 表示不考虑利率跳跃时的 CDS 价差. 由此可见，当处于加息周期时，若不将利率的跳跃作为风险因素考虑，那么得到的 CDS 价差将会变小，从而对 CDS 定价不准确，以致造成定价风险. 从历史数据上看，在美联储从 2004 年 6 月至 2006 年 6 月的连续 17 次加息的时间内，5 年期 iTraxx Europe CDS 指数在 2005 年 3 月份后会出现不同程度的跳跃性上涨(参见文献[8])，这也从一定程度上说明了利率在连续上调后的正向跳跃会对 CDS 价差的显著提升产生影响.

3　结束语

本文在 LQJD 框架下，将利率的跳跃作为风险因素考虑以研究信用衍生品定价问题. 基于这样的假定，即当利率频繁上调到一定水平时，利率的跳跃将会影响违约发生的概率，通过建模使得线性—二次向量的各个分量满足的随机过程是交叉激励的，以描述违约概率与利率的跳跃之间的这种依赖关系. 由于常微分方程组决定着违约概率分布，因而给出的定价公式是可计算的. 为了说明如何将得到的定价模型应用在信用衍生品定价上，将该模型应用在 CDS 上，并在状态向量满足特定随机过程的条件下得到了 CDS 价差定价公式的显性表达式.

本文的假定是从流动性的角度通过经验分析给出的，但严格的实证研究结论目前并没有给出，这需要进一步地研究. 同时，描述状态向量变化的随机过程的参数估计也是今后需要继续研究的内容. 本文假设利率的跳跃会同时影响违约概率相应的违约强度过程，但利率的跳跃影响违约概率可能会有时滞性. 因此，得到的模型需要改变，并且刻画违约概率分布的常微分方程组将变成时滞微分方程组(delay deferential equations，DDEs)，这也许会得到一些更有趣的结果. 本文将这些问题作为后继的研究工作.

参 考 文 献:

[1] Errais E，Giesecke K，Goldberg L R. Affine point processes and portfolio credit risk [J]. Journal of Financial Mathematics，2010，1(1)：642 - 665.

[2] Das S R. The surprise element：Jumps in interest rates [J]. Journal of Econometrics，2002，106(1)：27 - 65.

[3] Farnsworth H，Bass R. The term structure with semi-credible targeting [J]. Journal of Finance，2003，58(2)：839 - 865.

[4] Johannes M. The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models [J]. Journal of Finance，2004，59(1)：227 - 260.

[5] Piazzesi M. Bond yields and the federal reserve [J]. Journal of Political Economy，2005，113(2)：311 - 344.

[6] Jarrow R，Li H，Zhao F. Interest rate caps "smile" too! But can the LIBOR market models capture it? [J]. Journal of Fi-

④　通过简单的计算可以证明 $\Delta L=L(0,X,t,T)-L(0,X,t\_,T)=L-L\_$ 或者为正值或者 $\Delta L<0$，且在两种情形下都会使得不等式 $\frac{L\_}{I\_}<\frac{L\_+\Delta L}{I\_+\Delta I}$ 始终成立.

nance, 2007, 62(1): 345 – 382.

[7] Hong Y, Lin H, Wang S Y. Modeling the dynamics of Chinese spot interest rates [J]. Journal of Banking and Finance, 2010, 34(6): 1047 – 1061.

[8] 林 海, 郑振龙. 中国利率动态模型研究[J]. 财经问题研究, 2005, (9): 45 – 49.
Lin Hai, Zheng Zhenlong. Dynamic interest rate model for Chinese market [J]. Research on Financial and Economic Issues, 2005, (9): 45 – 49. (in Chinese)

[9] 张金清, 周茂彬. 中国短期利率跳跃行为的实证研究[J]. 统计研究, 2008, 25(1): 59 – 64.
Zhang Jinqing, Zhou Maobin. Empirical research on the jump behavior of Chinese short rate [J]. Statistical Research, 2008, 25(1): 59 – 64. (in Chinese)

[10] 吴吉林, 张二华, 原鹏飞. 我国银行间同业拆借利率的动态研究——基于跳跃 – 扩散 – 机制转换模型的实证分析[J]. 管理科学学报, 2011, 14(11): 33 – 41.
Wu Jilin, Zhang Erhua, Yuan Pengfei. Study on dynamic behavior of Chinese interbank offered rate: The empirical analysis based on jump-diffusion-regime switching model [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(11): 33 – 41. (in Chinese)

[11] 范龙振. 以 1 年期储蓄存款利率为状态变量的跳跃型广义 Vasicek 模型[J]. 管理科学学报, 2010, 13(10): 69 – 78.
Fan Longzhen. Generalize Vasicek model with jump type one-year deposit rate as state variable [J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(10): 69 – 78. (in Chinese)

[12] Jiang G, Yan S. Linear-quadratic term structure models-toward the understanding of jumps in interest rates [J]. Journal of Banking and Finance, 2009, 33(3): 473 – 485.

[13] 梁世栋, 郭 仌, 方兆本. 随机违约强度下的信用风险期限结构研究[J]. 管理科学学报, 2005, 8(4): 74 – 79.
Liang Shidong, Guo Bing, Fang Zhaoben. Study of credit risk term structure with stochastic default intensity [J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(4): 74 – 79. (in Chinese)

[14] Duffie D, Lando D. Term structure of credit spreads with incomplete accounting information [J]. Econometrica, 2001, 69(3): 633 – 664.

[15] Mason S P, Bhattacharya S. Risky debt, jump processes, and safety covenants [J]. Journal of Financial Economics, 1981, 9(3): 281 – 307.

[16] Zhou C. The term structure of credit spreads with jump risk [J]. Journal of Banking and Finance, 2001, 25(11): 2015 – 2040.

[17] Hull J, White A. Valuation of a CDO and an n-th to default CDS without Monte Carlo simulation [J]. Journal of Derivatives, 2004, 12(2): 8 – 23.

[18] Chen R, Cheng X, Fabozzi F J, et al. An explicit, multi-factor credit default swap pricing model with correlated factors [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2008, 43(1): 123 – 160.

[19] Cheng P, Scaillet O. Linear-quadratic jump-diffusion modeling [J]. Mathematical Finance, 2007, 17(4): 575 – 598.

[20] Ait-Sahalia Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate [J]. Review of Financial Studies, 1996, 9(2): 385 – 426.

[21] Ahn D-H, Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics [J]. Review of Financial Studies, 1999, 12(4): 721 – 762.

[22] Dai Q, Singleton K J. Specification analysis of affine term structure models [J]. Journal of Finance, 2000, 55(5): 1943 – 1978.

[23] Backus D, Foresi S, Mozumdar A, et al. Predictable changes in yields and forward rates [J]. Journal of Financial Economics, 2001, 59(3): 281 – 311.

[24] Ahn D H, Dittmar R F, Gallant A R. Quadratic term structure models: Theory and evidence [J]. Review of Financial Studies, 2002, 15(1): 243 – 288.

[25] Leippold M, Wu L. Asset pricing under the quadratic class [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2002, 37(2): 271 – 295.

[26] Leippold M, Wu L. Design and estimation of quadratic term structure models [J]. European Finance Review, 2003, 7(1): 47 – 73.

[27] Leippold M, Wu L. Design and estimation of multi-currency quadratic models [J]. Review of Finance, 2007, 11(2): 167-207.
[28] Chen L, Filipovic D, Poor H V. Quadratic term structure models for risk-free and defaultable rates [J]. Mathematical Finance, 2004, 14(4): 515-536.
[29] Chen L, Bayraktar E, Poor H V. Consistency problems for jump-diffusion models [J]. Applied Mathematical Finance, 2005, 12(2): 101-119.
[30] Duffie D, Pan J, Singleton K. Transformation analysis and asset pricing for affine jump diffusions [J]. Econometrica, 2000, 68(6): 1343-1376.
[31] Pan J. The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study [J]. Journal of Financial Economics, 2002, 63(1): 3-50.
[32] Scott L. The valuation of interest rate derivatives in a multi-factor term structure model with deterministic components [C] // Research Symposium Proceedings, Chicago: Chicago Board of Trade, 1996: 223-253.
[33] Chen R R, Yang T T L. A simple multi-factor, time-dependent-parameter model for the term structures of interest rates [J]. Review of Quantitative Finance and Accounting, 2002, 19(1): 5-20.
[34] Merton R C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates [J]. Journal of Finance, 1974, 29(2): 449-470.
[35] Black F, Cox J. Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions [J]. Journal of Finance, 1976, 31(2): 351-367.
[36] Jarrow R, Trunbull S. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk [J]. Journal of Finance, 1995, 50(1): 53-85.
[37] Lando D. On Cox processes and credit risky securities [J]. Review of Derivatives Research, 1998, 2(2): 99-120.
[38] 过蓓蓓，方兆本. CDS 价差结构转换模型及对标准化 CDO 价格的修正 [J]. 中国科学技术大学学报，2010，40(9): 902-907.
Guo Beibei, Fang Zhaoben. Regime-switching model of CDS spreads and an improved pricing method of standard CDO [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2010, 40(9): 902-907 (in Chinese)

Pricing credit derivatives with jumps in interest rates

NIU Hua-wei[1,2]
1. Center for Financial Engineering and School of Finance, Nanjing Audit University, Nanjing 211815, China;
2. School of Business, Nanjing University, Nanjing 210093, China

Abstract: In this paper, we study the valuation of credit derivatives with jumps in interest rates and propose a general pricing model under the linear-quadratic jump-diffusion framework. Jumps in interest rates would influence intensities of default times, which decide the default possibilities that determine the prices of credit derivatives. We let the components of linear-quadratic process be cross-exciting and facilitate the description of complex event dependence structures. To illustrate how our model works, we make an application on CDS under the specific underlying processes, and an explicit formula of the fair CDS spread can be obtained through a system of matrix Riccati equations.

Key words: credit derivative; pricing; interest rate; jump; default intensity

附录 A:

引理 1 的证明

由 Ito's **公式，有**

$$\Psi_t = \Psi_0 + \int_0^t D\Psi_s \mathrm{d}s + \int_0^t \boldsymbol{\eta}_s \mathrm{d}\boldsymbol{W}_s + \boldsymbol{J}_t,$$

其中 D **表示关于状态向量** X_t **的** Levy **型无穷小算子**(infinitesimal operator) **，其作用在一阶与二阶有界可导函数** $f \in C^2$ **上满足**

$$Df(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{x}^2}\right] + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\boldsymbol{x}) \int_{\mathrm{R}^{n_1}} [f(t,\boldsymbol{x} + \delta_j z) - f(t,\boldsymbol{x})] \mathrm{d}\boldsymbol{\nu}_j(z)$$

并且

$$\boldsymbol{\eta}_t = \left(\frac{\partial \Psi_t}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}, J_t = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{0 < \tau_j(i) < t} (\Psi_{\tau_j(i)} - \Psi_{\tau_j(i)-}) - \int_0^t \gamma_s^j \mathrm{d}s\right]$$

这里 $\tau_j(i) = \inf\{t : N_t^j = i\}$ **，** $j = 1,\cdots,m$**，表明跳跃过程** Z_j **的第** i **次跳跃，且**

$$\gamma_t^j = \lambda_j(\boldsymbol{x}) \int_{\mathrm{R}^{n_1}} [\Psi(t,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta}_j z) - \Psi(t,\boldsymbol{x})] \mathrm{d}\boldsymbol{\nu}_j(z)$$

假设如下的可积条件满足

1. $\mathrm{E}\left[\int_0^T |\gamma_s| \mathrm{d}s\right] < \infty$;

2. $\mathrm{E}[|\Psi_t|] < \infty$;

3. $\mathrm{E}\left[\left(\int_0^T \boldsymbol{\eta}_s \boldsymbol{\eta}_s^{\mathrm{T}} \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$.

在可积条件 3 **下，**$\int_0^t \boldsymbol{\eta}_s \mathrm{d}\boldsymbol{W}_s$ **是个鞅. 下面证明** J_t **也是个鞅. 令** $t < s$ **且固定** j**，有**

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t\left[\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{t < \tau_j(i) < s}(\Psi_{\tau_j(i)} - \Psi_{\tau_j(i)-})\right)\right] &= \mathrm{E}_t\left\{\sum_{j=1}^{m} \mathrm{E}\left[\sum_{t < \tau_j(i) < s}(\Psi_{\tau_j(i)} - \Psi_{\tau_j(i)-} \,\middle|\, X_{\tau_j(i)-}, \tau_j(i)\right]\right\} \\
&= \mathrm{E}_t\left[\sum_{t < \tau_j(i) < s} \Psi_{\tau_j(i)-}(\theta_{j,\tau(i)} - 1)\right] \\
&= \mathrm{E}_t\left[\sum_{t < \tau_j(i) < s} \int_{\tau_j(i-1)+}^{\tau^i} \Psi_{u-}(\theta_{j,u} - 1) \mathrm{d}N_u\right] \\
&= \mathrm{E}_t\left[\int_t^s \Psi_{u-}(\theta_{j,u} - 1) \mathrm{d}N_u\right]
\end{aligned}$$

因为跳跃 — 可数过程 $N_{j,t}$ **有强度** $\lambda_j(t,X_t)$ **，则由可积条件** 1 **得到**

$$\mathrm{E}_t\left[\int_t^s \Psi_{u-}(\theta_{j,u} - 1) \mathrm{d}N_u\right] = \mathrm{E}_t\left[\int_t^s \Psi_{u-}(\theta_{j,u} - 1) \lambda_j(u,\boldsymbol{X}_u) \mathrm{d}u\right]$$

从而得到 $\mathrm{E}_t[J_s] = J_t$**，即** J_t **是鞅. 因此，通过令** $\mathrm{D}\Psi_t$ **等于零并且将方程除以** Ψ_t **便可证得结论.**

附录 B:

引理 2 及其证明

引理 2　对于 $t \leqslant T$ **且满足** $fh < 0$ **的** Riccati **方程:**

$$y'(t) = fy^2(t) + gy(t) + h \tag{B1}$$

在边界条件 $y(T) = k$ **下其解为**

$$y(t) = l + d\tanh(-\gamma(T - t)/2 + \mathrm{e}) \tag{B2}$$

其中 $\gamma = \sqrt{g^2 - 4fh}$, $l = -g/(2f)$, $d = -\gamma/(2f)$, $\mathrm{e} = \mathrm{a\,tanh}((k - l)/d)$.

证明　首先可以检验 $a = -\frac{g + \gamma}{2f}$ **是** Riccati **方程**(B1) **的解，这里** $\gamma^2 = g^2 - 4fh$. **对** y **做变换** $z = \frac{1}{y - a}$**，这样** $y = a + \frac{1}{z}$ **且** $y' = -\frac{z'}{z^2}$. **将这两个等式带入到方程**(B1) **中，得到关于变量** z **的一阶常微分方程**

$$z' = \frac{1}{2}(-2f) + \gamma z \tag{B3}$$

由边界条件 $y(T) = k$，可知 z 满足 $z(T) = \frac{1}{k-a}$. 这样通过积分便可以求解方程(B3)，其解为

$$z = \frac{-f\int_T^t e^{\gamma(T-s)}\,ds + C}{e^{\gamma(T-t)}} = \frac{-f}{\gamma e^{\gamma(T-t)}}\left[1 - e^{\gamma(T-t)}\right] + Ce^{\gamma(T-t)}$$

由条件 $z(T) = \frac{1}{k-a}$，解得常数 $C = \frac{1}{k-a}$. 因此

$$z = \frac{-f}{\gamma}\left[e^{-\gamma(T-t)} - 1\right] + \frac{1}{k-a}e^{-\gamma(T-t)}$$

由方程(B3)的解能够得到方程(B1)的解为

$$y = a + \frac{1}{z} = -\frac{g+\gamma}{2f} + \frac{2\gamma(a-k)}{(a-k)(-2f)(e^{-\gamma(T-t)} - 1) - 2\gamma e^{-\gamma(T-t)}}$$

通过如下的计算，可以得到

$$\begin{aligned}
y &= l + \frac{-\gamma}{2f} + \frac{2\gamma(a-k)e^{\gamma(T-t)}}{\left[(g+\gamma) - (-2f)k\right](1 - e^{\gamma(T-t)}) - 2\gamma} \\
&= l + \frac{(2a\gamma - 2k\gamma)(-2f)e^{\gamma(T-t)} + \gamma((g+\gamma) + 2fk)(1 - e^{\gamma(T-t)}) - 2\gamma^2}{(-2f)\left[(g+\gamma) - (-2f)k\right](1 - e^{\gamma(T-t)}) - 2(-2f)\gamma} \\
&= l + \frac{-\gamma}{2f}\frac{e^{-\gamma(T-t)}\left(-\frac{\gamma-g}{2f} + k\right) - \left(-\frac{\gamma-g}{2f} - k\right)}{e^{-\gamma(T-t)}\left(-\frac{\gamma-g}{2f} + k\right) + \left(-\frac{\gamma-g}{2f} - k\right)} \\
&= l + d\tanh\left\{\frac{-\gamma(T-t)}{2} + \frac{1}{2}\log\left[\frac{d+k-l}{d-k-l}\right]\right\} \\
&= l + d\tanh\left[\frac{-\gamma(T-t)}{2} + e\right]
\end{aligned}$$

最后，通过上面的结果便得到了 Riccati 方程组(22)第 1 个方程的解析解.