提高顾客等待满意度的两类排队管理策略①

周文慧[1]，黄伟祥[1]，吴永忠[1*]，李合龙[2]
(1. 华南理工大学工商管理学院，广州 510640; 2. 华南理工大学经济与贸易学院，广州 510640)

摘要: 现代等待心理学认为: 好的排队管理能极大地提高顾客的等待满意度. 基于这一点，论文通过 M/M/1 排队系统研究了两类排队管理策略: 一是为队列前 N 名顾客提供额外服务的策略 H; 二是为队列中处于 N 之后的顾客提供额外服务的策略 T. 通过分析期望顾客等待满意度和期望额外服务成本，论文给出了企业在给定额外服务预算下的最大化顾客等待满意度的最优策略. 数值算例显示: 当预算足够大时，若系统的服务强度不大或者有无额外服务对顾客等待时间敏感程度的影响很大，策略 H 优于策略 T; 当预算不充足，且服务强度不是很大时，策略 T 优于策略 H. 若预算少且服务强度大，两类策略对提高顾客等待满意度基本不起作用.

关键词: 等待心理学; 排队管理; 顾客等待满意度; 排队系统
中图分类号: O226 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007 -9807(2014)04 -0001 -10

0 引 言

由于具有生产和消费的同时性，服务系统不能像制造系统一样使用库存来平滑需求，从而使得排队等待现象在服务业中更为常见[1]. Bielen 和 Demoulin[2] 指出等待满意度会对整个服务的满意度起着正向作用. Tom 和 Lucey[3] 以超市为例说明了顾客等待结账的时间太长会破坏顾客在整个购物活动的满意度，并指出顾客的等待满意度不但跟等待时间有关，还与顾客对服务方是否努力改善顾客排队过程的感知有关，即企业应致力于“让顾客非常满意”，而非简单地追求“顾客满意”[4]. 如果服务方不采取措施提高顾客的等待满意度，就很有可能因为等待满意度低而造成服务失败. 同时，杜建刚和范秀成[5] 指出，服务失败群体中会产生群体情绪感染现象. 类似地，Chatterjee[6] 等论证了愉快的等待经历能够提高顾客对服务的价值评定. 另一方面，虚拟社区的诞生增大了顾客知识分享对商品和服务的影响[7]，伊亚敏[8] 给出了服务消费中顾客公平感知公平性统计分析. 因此，采取某些措施来提高顾客等待满意度是十分必要的，尤其是在现今信息传播更快的大数据时代[9].

众所周知，顾客的等待满意度与顾客在服务系统中的等待时间成反比. 因此，缩短顾客在系统中的实际等待时间是提高顾客等待满意度的最直接有效的方法之一. 一般而言，降低顾客的实际等待时间有两种方式: 第一种是提高服务能力，通常来说服务能力相对稳定，企业很难在短时间内提高服务能力来缩短顾客的实际等待时间. 另一种则是设置服务优先权，缩短目标客户群的实际等待时间，如厉譞和苏强[10] 等的研究. 服务优先权实质上是通过增加其他顾客的等待时间来缩短目标顾客群的等待时间，这将恶化低服务优先权顾客的等待满意度，并引起公平性问题.

心理学专家发现，顾客的等待满意度取决于

① 收稿日期: 2013 -07 -15; 修订日期: 2013 -10 -17.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71271089; 71131003; 71090403; 71071059); 广东省哲学社会科学“十二五”规划一般资助项目(GD12CGL16); 教育部新世纪人才资助项目(NCET -12 -0191); 华南理工大学中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2013ZG0012).
通讯作者: 吴永忠(1979—)，男，广东海丰人，博士，讲师. Email: okwyz@hotmail.com

顾客的感知等待时间而非实际等待时间[11]. Norman[11]通过实证研究发现在无聊单调的环境下顾客的感知等待时间会更长，并提出了“改善排队环境”[12]，“填充等待时间”[13]和“令顾客觉得服务已经开始”等服务排队管理 8 条原则. 这些基于等待心理学的排队管理方法不同于一般的排队管理(排队规则、服务率设置等)，其核心是在不缩短顾客实际等待时间的前提下减少顾客的感知等待时间. 本文正是基于“填充等待时间”和“令顾客觉得服务已经开始”的两条排队心理学理论，将额外服务引入到排队管理.

以往的研究大多以收益最大化来设计系统的排队管理策略. 在这些研究中，一般直接将等待时间看成等待满意度并以此作为约束[14]. 然而，顾客在不同情形下对等待时间的感知往往是有差异的. 因此，本文把等待满意度看成是对等待时间感知的函数. 此外，本文针对现场的可操作性提出了两类基于等待心理学的排队管理策略：为在队列前(后)面等待的顾客提供额外服务的队头(尾)策略. 在实际生活中，“预服务”是较为常见的队头策略，比如：迪斯尼乐园为等待坐游览车的顾客提供展览和讲解[2]；护士为等待就诊的病人记录信息以及询问症状[2]. “补偿性服务”则是使用广泛的队尾策略，比如：当排队人数超过 6 位时，奥姆尼公园中心酒店的经理助理就会拿来葡萄汁和橙汁送给顾客[2]；餐厅和便利店为等待太久的顾客提供优惠券或者打折优惠. 对于这两类策略，本文将通过数值算例找出它们的适用场景，为现场管理提供参考.

1 模型描述

考虑服务能力有限的 M/M/1 排队系统. 顾客的到达服从参数为 λ 的泊松过程. 任意一个顾客的服务时间服从参数为 μ 的指数分布. 当一名顾客到达系统时，若服务台空闲，则马上接受服务；若系统中已经有顾客，则按先到先服务(FCFS)的规则在队列中等待. 记 t 为任意一名进入服务系统的顾客的等待时间，其概率密度函数为 $f(t)$，则根据排队系统理论[15]有

$$f(t)=\begin{cases}p_0, & t=0\\ \sum_{n=1}^{\infty}p_0\rho^n\Gamma_{n,\mu}(t)=\lambda p_0\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}, & t>0\end{cases}\tag{1}$$

其中，$\rho=\lambda/\mu$；$p_0=1-\rho$；$\Gamma_{n,\mu}(t)=\dfrac{\mu^n t^{n-1}\mathrm{e}^{-\mu t}}{(n-1)!}$ 是 n 名顾客完成服务所需时间的密度函数.

类似于文献[6]，假定顾客等待满意度是其等待时间的指数函数

$$S=\mathrm{e}^{-\beta t}$$

其中，S 为顾客等待满意度；$\beta(\beta\geqslant 0)$ 为顾客满意度对等待时间的敏感程度. 由于 $\beta\geqslant 0$，因此 $S\in[0,1]$. 同时可以看到顾客的等待时间 t 越大，顾客的等待满意度越低. 根据全概率公式，顾客等待满意度的期望值为

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[S]&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}f(t)\,\mathrm{d}t\\&=p_0+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\lambda p_0\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\mathrm{d}t\\&=p_0\frac{\mu+\beta}{\mu+\beta-\lambda}\end{aligned}\tag{2}$$

对于式(2)，当 $\beta=0$ 时，$\mathrm{E}[S]=1$. 即当顾客对等待时间完全不敏感时，顾客在等待过程中始终是满意的. 在给定的服务率和到达率的情况下，为了提高顾客的等待满意度，服务型企业提供两类排队管理策略：一是为队列前 N 位顾客提供额外服务(策略 H)；另一是为在队列 N 位后的顾客提供额外服务，直到其处于第 N 位(策略 T). 在这两种策略下，顾客的等待时间被划分为两段，即有/无额外服务的等待时间. 根据等待心理学，顾客的等待满意度取决于这两段等待时间的满意度的最小值. 进一步假设，企业为每位顾客提供额外服务单位时间成本为 C_e，提供额外服务的单位时间预算为 C_0. 记：

$S_e(t)=\mathrm{e}^{-\beta_e t_e}$ 表示顾客在经历了时间长度为 t_e 的有额外服务的等待满意度；

$S_n(t)=\mathrm{e}^{-\beta_n t_n}$ 表示顾客在经历了时间长度为 t_n 的无额外服务的等待满意度.

其中 β_n，β_e 分别为顾客在无额外服务和有额外服务下的等待满意度对等待时间的敏感程度. 根据等待心理学，顾客在有额外服务的情况下对等待时间的敏感程度较低，即 $\beta_n>\beta_e>0$.

在一般的 M/M/1 模型中，系统不提供额外服务，此时 $\beta=\beta_n$，代入式(2)，可得顾客在系统不提供额外服务时等待满意度的期望值

$$S_0=p_0\frac{\mu+\beta_n}{\mu+\beta_n-\lambda}\tag{3}$$

提供额外服务往往需要成本，比如迪斯尼为

顾客开设的展览以及企业提供的优惠都需要投入. 另一方面，由于这些额外服务并没有产生利润，因此企业不会提供过多的额外服务，比如聘请的讲解人员不会很多，不会提供太多的优惠等. 假设企业提供额外服务的成本预算为 C_0. 下文将分别分析两类排队管理策略在一定的额外服务成本预算下的最优设计.

2　队头额外服务策略 H

在该策略下，企业只为处于队列 N 位之内的顾客提供额外服务，即当顾客的位置小于或等于 N 时，顾客均会接受到额外服务，直到该名顾客到达服务台为止. 下面分别来求策略 H 下的顾客期望等待满意度和期望额外服务成本.

2.1　策略 H 下顾客的期望等待满意度

如图 1 所示，在策略 H 下，无额外服务的等待时间为由顾客到达系统到进入队列的第 N 位所经历的时间，记为 $t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}$; 有额外服务的等待时间为由顾客开始接受额外服务到顾客到达服务台的时间，记为 $t_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}$. 顾客到达系统时，若队长小于或等于 N，即 $t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}$ 为 0. 若 $N = 0$，即系统不提供额外服务($t_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}} = 0$)；若 $N = \infty$，即系统为所有等待的顾客提供额外服务($t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}} = 0$).

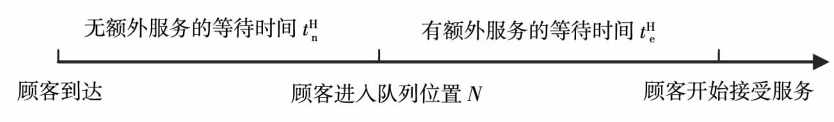

图 1　策略 H 的事件发生序列图

Fig. 1 The sequence of event under strategy H

记 $f_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}(t)$，$f_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}(t)$ 分别为 $t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}$，$t_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}$ 的概率密度函数，则有

$$f_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N} p_0\rho^n, & t = 0 \\ \sum_{n=N+1}^{\infty} p_0\rho^n \Gamma_{n-N,\mu}(t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} p_0\rho^n \dfrac{\mu^{n-N} t^{n-N-1} \mathrm{e}^{-\mu t}}{(n-N-1)!}, & t > 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$f_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}(t) = \begin{cases} p_0, & t = 0 \\ \sum_{n=1}^{N} p_0\rho^n \Gamma_{n,\mu}(t) + \sum_{n=N+1}^{\infty} p_0\rho^n \Gamma_{N,\mu}(t) = p_0 \sum_{n=1}^{N} \dfrac{\lambda^n t^{n-1} \mathrm{e}^{-\mu t}}{(n-1)!} + p_0 \sum_{n=N+1}^{\infty} \rho^n \dfrac{\mu^N t^{N-1} \mathrm{e}^{-\mu t}}{(N-1)!}, & t > 0 \end{cases} \tag{5}$$

对于式(4)，由于前 N 名顾客都获得了额外服务，因此无额外服务的等待时间为零，故 $t = 0$ 的概率为队长 n 不大于 N 的概率总和; 当队长 n 大于 N 时，刚到达的顾客需要等待 $n - N$ 名顾客接受完额外服务才能得到额外服务. 对于式(5)，第 1 项表示，当队长 n 小于 N 时，顾客在有额外服务下的等待时间就是其实际等待时间; 第 2 项表示，当队长 n 大于 N 时，刚到达顾客在第 N 位时才开始接受额外服务，即这一类顾客有额外服务的时间相当于第 N 名顾客的等待时间. 另记 $S_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}$($S_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}$) 为顾客在无(有) 额外服务的时间里的等待满意度. 由式(2)、(4) 和(5) 有

$$G_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}(N) := \mathrm{E}[S_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}] = \sum_{n=0}^{N} p_0\rho^n + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta_{\mathrm{n}} t} \sum_{n=N+1}^{\infty} p_0\rho^n \frac{\mu^{n-N} t^{n-N-1} \mathrm{e}^{-\mu t}}{(n-N-1)!} \mathrm{d}t,$$

$$G_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}(N) := \mathrm{E}[S_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}] = p_0 + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta_{\mathrm{e}} t} \times \left(p_0 \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^n t^{n-1} \mathrm{e}^{-\mu t}}{(n-1)!} + p_0 \sum_{n=N+1}^{\infty} \rho^n \frac{\mu^N t^{N-1} \mathrm{e}^{-\mu t}}{(N-1)!}\right) \mathrm{d}t$$

顾客的期望等待满意度为两阶段期望满意度的最小值，即

$$\mathrm{E}[S_{\mathrm{H}}] = \min\{\mathrm{E}[S_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}], \mathrm{E}[S_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}]\}$$

2.2　策略 H 下企业的期望额外服务成本

记 C_{H} 为企业在策略 H 下为顾客提供额外服务的单位时间平均总成本. 由于顾客的到达为一个泊松过程，根据泊松到达看见时间平均性质(PASTA)[17]，有

$$C_{\mathrm{H}} = \lambda C_{\mathrm{e}} \mathrm{E}(T_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}),$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[T_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}] &= \sum_{n=1}^{N} p_0 \rho^n \frac{n}{\mu} + \sum_{n=N+1}^{\infty} p_0 \rho^n \frac{N}{u} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_0 \rho^n \frac{n}{\mu} - \sum_{n=N+1}^{\infty} p_0 \rho^n \frac{n-N}{u} \\ &= p_0(1-\rho^N) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \frac{n}{\mu} \end{aligned}$$

上式第 1 项表示，当顾客加入系统时，若队长 n 不大于 N，系统需要为他提供额外服务直到他到达服务台，即该名顾客的额外服务时间就是他的实际等待时间; 第 2 项表示，若队长 n 大于 N 时，顾客的额外服务时间就是第 N 名顾客的等待时间. 因此上式是个全概率公式，是所需服务时间与所需服务时间发生的概率之积的累加，化简有

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{H}} &= \lambda C_{\mathrm{e}} \mathrm{E}(T_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}) = C_{\mathrm{e}} \rho (1-\rho^N) p_0 \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n \\ &= C_{\mathrm{e}} \frac{\rho^2(1-\rho^N)}{1-\rho} \end{aligned}$$

2.3　策略 H 下企业的最优决策

企业的主要问题是在预算内优化参数 N，使得顾客的等待满意度最大，即

$$\begin{aligned} &\max_{N} \mathrm{E}|S_{\mathrm{H}}| \\ &\mathrm{s.t.}\ C_{\mathrm{H}} \leqslant C_0 \end{aligned} \tag{P1}$$

记

$$N_0^{\mathrm{H}} = \arg\max\{G_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}(\lfloor R_{\mathrm{H}} \rfloor), G_{\mathrm{e}}^{\mathrm{H}}(\lceil R_{\mathrm{H}} \rceil)\}$$

其中，$\lfloor R_{\mathrm{H}} \rfloor$ 是小于或等于 R_{H} 的最大整数; $\lceil R_{\mathrm{H}} \rceil$ 是大于或等于 R_{H} 的最小整数，可得如下结论.

定理 1　在策略 H 下，当 $C_0 \geqslant C_{\mathrm{H}}(N_0^{\mathrm{H}})$ 时，最优策略参数为 $N_{\mathrm{H}}^* = N_0^{\mathrm{H}}$; 当 $C_0 < C_{\mathrm{H}}(N_0^{\mathrm{H}})$ 时，最优策略参数为 $N_{\mathrm{N}}^* = \max\{n \mid C_{\mathrm{H}}(n) \leqslant C_0\}$.

定理 1 给出了策略 H 的最优设计: 当预算充足时，存在唯一的 N_0^{H} 使得顾客的等待满意度达到最大值. 当 N 太小时，顾客有(无) 额外服务的等待时间比较短(长)，因此顾客会因为漫长的无额外服务的等待时间而觉得不满意; 相反，当 N 太大时，尽管额外服务会降低顾客对等待时间的敏感程度，但是顾客最终也会因为漫长的有额外服务的等待而觉得不满意. 因此，任何偏离 N_0^{H} 的方案都是不合理的. 然而，N 越大意味着系统中更多的顾客会接受到额外服务，那么提供额外服务的成本也会增加. 当预算较大时，N_0^{H} 的方案显然可以实施. 当预算较小时，N 只能小于 N_0^{H}. 又因为越靠近 N_0^{H} 的方案越能提高顾客的满意度，因此 N 应当在预算范围内增加到最接近 N_0^{H} 的位置. 记 S_{H}^* 为优化模型(P1) 的最优值. 则很容易得到如下性质.

命题 1　当 $C_0 < C_{\mathrm{H}}(N_0^{\mathrm{H}})$ 时，则 N_{H}^* 和 S_{H}^* 都随着 C_0 的增加而增加.

在策略 H 下，当预算较小时，最佳的策略为最大限度地提高 N. 当预算增加时，N 可以进一步提高，并更靠近没有受到预算约束时的最优策略，于是顾客的等待满意度将得到提升.

3　队尾额外服务策略 T

在该策略下，企业只为处于队列 N 位之后的顾客提供额外服务，即当顾客的位置大于 N 时，顾客均会接受到额外服务，直到该名顾客到达队列的第 N 位置.

3.1　策略 T 下顾客的期望等待满意度

如图 2 所示，在策略 T 下，顾客的有额外服务的等待时间 $t_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}$ 为从进入系统到进入队列位置 N 的时间; 顾客的无额外服务的等待时间 $t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}$ 为从进入位置 N 到开始接受服务的时间.

记 $f_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)$，$f_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}(t)$ 分别为 $t_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}$，$t_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}$ 的概率密度函数，类比式(4) 和(5)，有

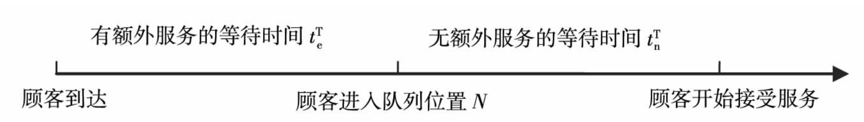

图 2　策略 T 的事件发生序列图

Fig. 2 The sequence of event under strategy T

$$f_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)=\begin{cases}p_0, & t=0\\ p_0\sum_{n=1}^{N}\dfrac{\lambda^n t^{n-1}\mathrm{e}^{-\mu t}}{(n-1)!}+ & \\ p_0\sum_{n=N+1}^{\infty}\rho^n\dfrac{\mu^N t^{N-1}\mathrm{e}^{-\mu t}}{(N-1)!}, & t>0\end{cases}\tag{6}$$

$$f_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}(t)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N}p_0\rho^n, & t=0\\ \sum_{n=N+1}^{\infty}p_0\rho^n\dfrac{\mu^{n-N}t^{n-N-1}\mathrm{e}^{-\mu t}}{(n-N-1)!}, & t>0\end{cases}\tag{7}$$

记 $S_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(S_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}})$ 为顾客在无(有)额外服务的期望等待满意度. 由式(2)、(6)和(7)，当 $N>0$，有

$$G_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(N):=\mathrm{E}[S_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}]=p_0+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta_{\mathrm{n}}t}\times\left(p_0\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda^n t^{n-1}\mathrm{e}^{-\mu t}}{(n-1)!}+p_0\sum_{n=N+1}^{\infty}\rho^n\frac{\mu^N t^{N-1}\mathrm{e}^{-\mu t}}{(N-1)!}\right)\mathrm{d}t$$

$$=p_0\frac{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu+\beta_{\mathrm{n}}}\right)^{N+1}}{1-\dfrac{\lambda}{\mu+\beta_{\mathrm{n}}}}+\rho^{N+1}\left(\frac{\mu}{\mu+\beta_{\mathrm{n}}}\right)^N,$$

$$G_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}(N):=\mathrm{E}[S_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}]=\sum_{n=0}^{N}p_0\rho^n+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta_{\mathrm{e}}t}\times\sum_{n=N+1}^{\infty}p_0\rho^n\frac{\mu^{n-N}t^{n-N-1}\mathrm{e}^{-\mu t}}{(n-N-1)!}\mathrm{d}t$$

$$=1-\rho^{N+1}+p_0p^N\frac{\lambda}{\mu+\beta_{\mathrm{e}}-\lambda}$$

顾客的期望等待满意度为两阶段期望满意度的最小值，即

$$\mathrm{E}[S_{\mathrm{T}}]=\min\{\mathrm{E}[S_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}],\mathrm{E}[S_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}]\}$$

3.2　策略 T 下企业的期望额外服务成本

记 C_{T} 为策略 T 下企业为顾客提供额外服务的单位时间平均总成本. 根据 PASTA 性质，有

$$C_{\mathrm{T}}=\lambda C_{\mathrm{e}}\mathrm{E}(T_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}),$$

$$\mathrm{E}[T_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}]=\sum_{n=N+1}^{\infty}p_0\rho^n\frac{n-N}{\mu}=p_0\rho^N\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\frac{n}{\mu}$$

通过化简后有

$$C_{\mathrm{T}}=\lambda C_{\mathrm{e}}\mathrm{E}(T_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}})=C_{\mathrm{e}}\rho\rho^N p_0\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^n=C_{\mathrm{e}}\frac{\rho^{N+2}}{1-\rho}$$

3.3　策略 T 下企业的决策模型与求解

类似地，企业的优化模型如下

$$\max_N \mathrm{E}[S_{\mathrm{T}}]\quad \text{s.t.}\quad C_{\mathrm{T}}\leqslant C_0\tag{P2}$$

记

$$N_0^{\mathrm{T}}=\arg\max\{G_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}(\lfloor R_{\mathrm{T}}\rfloor),G_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(\lceil R_{\mathrm{T}}\rceil)\}$$

可得如下结论.

定理 2　在策略 T 下，当 $C_0\geqslant C_{\mathrm{T}}(N_0^{\mathrm{T}})$ 时，最优策略参数为 $N_{\mathrm{T}}^*=N_0^{\mathrm{T}}$；当 $C_0<C_{\mathrm{T}}(N_0^{\mathrm{T}})$ 时，最优策略参数为 $N_{\mathrm{T}}^*=\min\{n\mid C_{\mathrm{T}}(n)\leqslant C_0\}$.

在策略 T 下，当预算充足时，存在唯一的 N_0^{T} 使得顾客的等待满意度达到最大值. 当 N 太大时，顾客有(无)额外服务的等待时间比较短(长)，会因为漫长的无额外服务的等待而觉得不满意；相反，当 N 太小时，顾客会因为漫长的有额外服务的等待而觉得不满意. 因此，越接近 N_0^{T} 的方案就越好. 然而，N 越小意味着系统中更多顾客会接受到额外服务，即成本越大. 当预算较大时，N_0^{T} 的方案显然可以实施. 当预算较小时，N 只能大于 N_0^{T}. 由于越接近 N_0^{T} 的方案越能提高顾客的满意度，因此 N 应当在预算范围内减少到最接近 N_0^{T} 的位置. 记 S_{T}^* 为优化模型(P2)的最优值，则很容易得到如下性质.

命题 2　当 $C_0<C_{\mathrm{T}}(N_0^{\mathrm{T}})$ 时，N_{T}^* 随着 C_0 的增加而减少，S_{T}^* 随着 C_0 的增加而增加.

在策略 T 下，预算较小时，最佳的策略为最大限度地降低 N. 当预算增加时，更多顾客可以得到额外服务，即 N 降低了，并更接近没有受到预算约束时的最优策略，因此等待满意度得到提升.

命题 3　当 $C_0<C_{\mathrm{H}}(1)=c_e\rho^2$ 时，策略 T 优于策略 H.

从命题 3 可以看出，当预算较小时，策略 H 是不可行的，策略 T 依然可行. 总结两类排队管理策略，实现提高顾客等待满意度的手段有两个：一是提供额外服务；二是平衡好顾客在有额外服务和无额外服务情况下的等待满意度. 具体而言，企业需要根据系统的服务强度，顾客在有无额外服务下对等待时间的敏感程度，以及预算来决定提供多少额外服务.

4　数值算例

本节通过一些数值算例对策略 H 和策略 T 的最优参数以及对应的等待满意度进行对比研究.

本文根据全因子试验方案选取了 9 个典型数值算例做成表 1(控制变量是 λ 和 β_n) . 从表 1 很容易看出，两类排队管理策略都对顾客等待满意度有很大的提升，并且在绝大多数情形下策略 H 优于策略 T; 在各自的最优参数 N 下，策略 H 的成本在绝大多数情形下都小于策略 T 的.

表 1 预算充足时两策略的最优参数以及对应的等待满意度和成本

Table 1 The optimal strategy and its satisfaction and cost without the budget limitation

λ	β_n	S_0	N_0^n	N_0^H	S_H^*	S_T^*	$C_H(N_0^H)$	$C_T(N_0^T)$
3	2	0. 933 3	1	0	0. 972 7	0. 962 5	0. 9	1. 285 7
6	2	0. 8	2	1	0. 915 7	0. 9	5. 67	5. 4
9	2	0. 4	6	3	0. 681 1	0. 653 1	37. 953 3	59. 049
3	5	0. 875	2	0	0. 965 3	0. 962 5	1. 17	1. 285 7
6	5	0. 666 7	3	0	0. 899 5	0. 88	7. 056	9
9	5	0. 25	7	1	0. 641 3	0. 595	42. 258	72. 9
3	10	0. 823 5	2	0	0. 965 3	0. 962 5	1. 17	1. 285 7
6	10	0. 571 4	3	0	0. 899 5	0. 88	7. 056	9
9	10	0. 181 8	8	1	0. 640 4	0. 55	46. 132 2	72. 9

注: $\mu = 10, \beta_e = 1, C_e = 10.$

在日常运作中，企业经常会面临预算约束，并且这一约束直接影响企业的策略选择. 下文将分别从预算 C_0、顾客到达率 λ 以及参数 β_n 对两类策略进行对比分析.

4. 1 预算 C_0 对两种排队策略的影响

首先考虑预算 C_0 对策略 H 和策略 T 的影响，并设定参数为 $\lambda = 6, \mu = 10, \beta_n = 10, \beta_e = 1, C_e = 10.$

据此，很容易计算出 $N_0^H = 3, N_0^T = 0, C_H(N_0^H) = 7.06, C_T(N_0^T) = 9.$

图 3 给出了两类策略最优参数的结构，当 $C_0 \leq 7.06$ 时，N_H^* 是 C_0 的递增函数，当 $C_0 > 7.06$ 时，$N_H^* = 3$; 当 $C_0 \leq 9$ 时，N_T^* 是 C_0 的递减函数，当 $C_0 > 9$ 时，$N_T^* = 0$. 图 4 展示了不同预算下，两策略的顾客等待满意度. 当预算小于 3. 6 时，策略 T 优于策略 H; 当预算大于 3. 6 时，则是策略 H 占优. 总结得到如下观察.

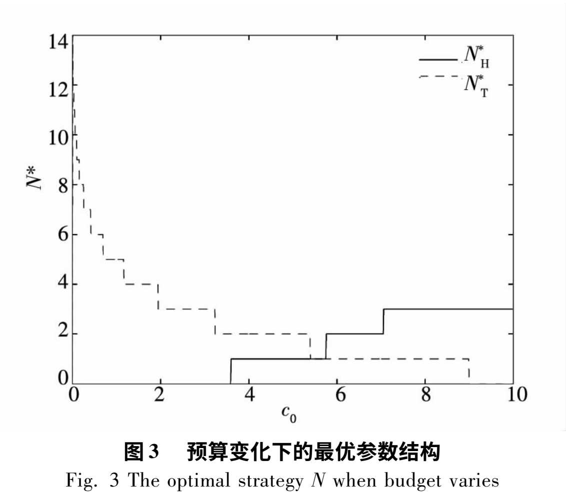

图 3 预算变化下的最优参数结构

Fig. 3 The optimal strategy N when budget varies

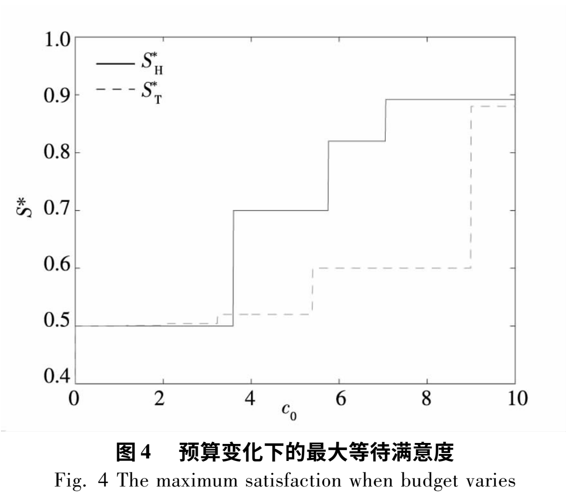

图 4 预算变化下的最大等待满意度

Fig. 4 The maximum satisfaction when budget varies

观察 1 当企业的预算较小时，策略 T 优于策略 H; 当企业的预算较大时，策略 H 优于策略 T.

4. 2 顾客到达率 λ 对两种排队策略的影响

取 $\mu = 10, \beta_n = 20, \beta_e = 1, C_e = 10, C_0 = 3.$

5，$\lambda \in [0,9]$，得到图 5 和 6.

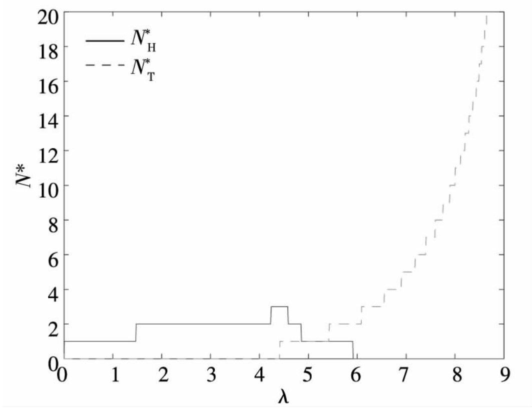

图 5　顾客到达率 λ 对最优参数的影响

Fig. 5 The impact of λ on the optimal strategy

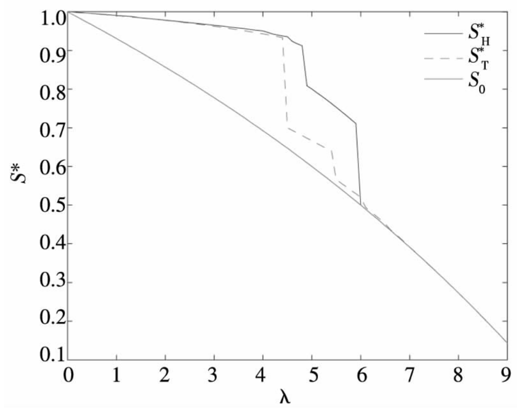

图 6　顾客到达率 λ 对等待满意度的影响

Fig. 6 The impact of λ on the satisfaction

图 5 给出了顾客到达率 λ 对两策略的最优参数的影响. 当预算足够(到达率较低)时，随着顾客到达率的增加(即服务强度的增加)，系统中得到额外服务的顾客数量在增加(N_H^* 增加，N_T^* 不变). 当预算不足(到达率较高)时，随着顾客到达率的增加(即服务强度的增加)，在系统中接受额外服务的顾客数量在减少(N_H^* 下降，N_T^* 增加). 图 6 展示了顾客到达率 λ 对等待满意的影响. 图中最低的线(S_0)是系统不提供额外服务时顾客的等待满意度. 当 $\lambda < 6$ 时，策略 H 优于策略 T，而且两策略均优于不提供额外服务. 当 $6 \leqslant \lambda < 7$ 时，策略 T 优于策略 H，且两策略均优于不提供额外服务. 而当 $\lambda > 7$，策略 H 和 T 与不提供额外服务情形的效果是一样的. 因此，当预算足够大时，策略 H 总是优于策略 T，而策略 T 总是优于不提供额外服务；当预算不足且服务强度非常大时，两种策略对提高顾客等待满意度基本没有作用.

观察 2　当企业的预算较大并且系统的服务强度较小时，策略 H 优于策略 T；当预算较小并且系统的服务强度非常大时，两种策略对提高顾客等待满意度基本不起作用.

4.3　参数 β_n 对两种排队策略的影响

取 $\lambda = 7$，$\mu = 10$，$\beta_e = 1$，$C_e = 10$，$C_0 = 99$，$\beta_n \in [1,10]$. 则很容易得到 $C_0 > \max\{C_H(N_0^H), C_T(N_0^T)\}$ 即企业的预算充足.

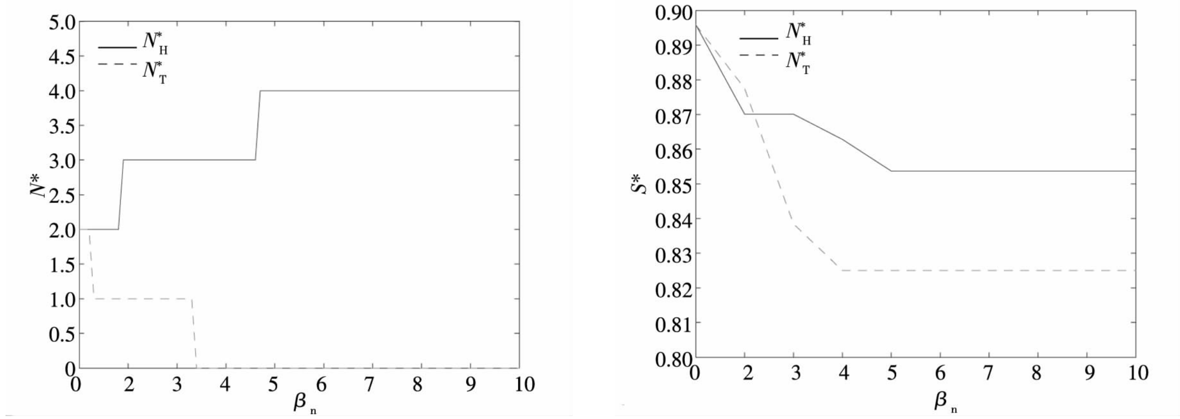

图 7　β_n 对策略 H 和策略 T 的影响

Fig. 7 The impact of β_n on strategy H and T

图 7 给出了两种策略与 β_n 的关系. 从左图可以看出，随着 β_n 的增大，在两种策略下，得到额外服务的顾客的最大数量都将增大(N_H^* 增加，N_T^* 减少). 右图则给出了两种策略的比较结果：当 $\beta_n \leqslant 2.27$ 时，策略 T 优于策略 H，而 $\beta_n > 2.27$ 时，策略 H 优于策略 T. 即，当有无额外服务对顾

客等待时间敏感程度的影响(β_n/β_e)很大时，策略 H 优于策略 T.

观察 3　当企业预算充足时，若有无额外服务对顾客等待时间敏感程度的影响很大，策略 H 优于策略 T.

实际上，通过大量数值算例发现，当企业预算充足时，策略 H 优于策略 T 的情形的比例高达 98.2%. 进一步分析发现，当预算充足时，策略 T 优于策略 H 的情形仅出现在额外服务对 β 的影响很小并且系统的服务强度很大的情况下. 换句话说，当预算充足时，只要系统的服务强度不大，或者有无额外服务对顾客等待时间敏感程度的影响很大，策略 H 总是优于策略 T.

5　结束语

本文考虑两类排队管理策略(队头/队尾额外服务策略)，研究了在 M/M/1 服务系统中，如何通过提供额外服务来提高顾客的等待满意度的问题. 通过假定顾客等待满意度与等待时间成指数函数关系，给出了在额外服务预算下，两类策略的最优策略参数. 数值算例表明：当预算足够大时，若系统的服务强度不大或者有无额外服务对顾客等待时间敏感程度的影响很大，策略 H 总是优于策略 T，且策略 T 优于不提供额外服务；当预算特别不充足，且服务强度不是太大时，策略 T 优于策略 H，且策略 H 优于不提供额外服务. 若预算比较少且服务强度比较大，则两类策略对提高顾客等待满意度基本不起作用. 本文还给出了这样一个管理启示：无论采取何种排队管理策略，无论预算是否充足，企业都不应该为所有等待的顾客提供额外服务. 在实践中，服务系统往往是多个服务台，本文将这一扩展放入未来的研究.

参 考 文 献:

[1] Fitzsimmons A, Fitzsimmons J. Service Management Operations, Strategy, Information Technology (5th Edition) [M]. 北京：机械工业出版社，2007.

[2] Bielen F, Demoulin N. Waiting time influence on the satisfaction-loyalty relationship in services [J]. Managing Service Quality, 2007, 17(2): 174 – 193.

[3] Tom G, Lucey S. Waiting time delays and customer satisfaction in supermarkets [J]. Journal of Services Marketing, 1995, 9(5): 20 – 29.

[4] 张新安，田　澎. 顾客满意与顾客忠诚之间关系的实证研究 [J]. 管理科学学报，2007, 10(4): 62 – 72.
Zhang Xinan, Tian Peng. Does consumer satisfaction really matter? An examination of its impact on consumer loyalty [J]. Journal of Management Sciences in China, 2007, 10(4): 62 – 72. (in Chinese)

[5] 杜建刚，范秀成. 服务失败中群体消费者心理互动过程研究 [J]. 管理科学学报，2011, 14(12): 60 – 70.
Du Jiangang, Fan Xiucheng. Research on group consumer's psychological interaction process under service failure setting [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(12): 60 – 70. (in Chinese)

[6] Chatterjee S. Wait for Service and Customer Specific Service Outcomes: A Meta-Analysis [R]. IIM Bangalore Research Paper N0401, 2013.

[7] 常亚平，刘兴菊，阎　俊，等. 虚拟社区知识共享之于消费者购买意向的研究 [J]. 管理科学学报，2011, 14(4): 86 – 96.
Chang Yaping, Liu Xingju, Yan Jun, et al. Research on knowledge sharing in virtual communities on consumer purchase intention [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(4): 86 – 96. (in Chinese)

[8] 伊亚敏. 服务消费中顾客公平感知公平性统计分析 [J]. 现代财经，2009, (7): 56 – 62.
Yi Yamin. Statistical analysis of perceived fairness of consumers in services [J]. Modern Finance & Economics, 2009, (7): 56 – 62. (in Chinese)

[9] 冯芷艳，郭迅华，曾大军，等. 大数据背景下商务管理研究若干前沿课题［J］. 管理科学学报，2013，16(1)：1－9.
Feng Zhiyan，Guo Xunhua，Zeng Dajun，et al. On the research frontiers of business management in the context of big data［J］. Journal of Management Sciences in China，2013，16(1)：1－9.（in Chinese）

[10] 厉　譞，苏　强. 时间效用在门诊排队管理中的应用［J］. 工业工程与管理，2007，(6)：26－29.
Li Xuan，Su Qiang. Application of time utility in out-patient queuing system［J］. Industrial Engineering and Management，2007，(6)：26－29.（in Chinese）

[11] Norman D. Sociable Design［M］. http://www.jnd.org/dn.mss/sociable_design_intr.html，(7 January 2011).

[12] Bailey N，Areni C S. When a few minutes sound like a lifetime: Does atmospheric music expand or contract perceived time?［J］. Journal of Retailing，2006，82(3)：189－202.

[13] Ledbetter J L，Mohamed-Ameen A，Oglesby J M，et al. Your wait time from this point will be: Practices for designing amusement park queues［J］. Ergonomics in Design: The Quarterly of Human Factors Applications，2013，21(2)：22－28.

[14] 宋卫斌，苏　秦. 虚拟顾客服务系统排队模型［J］. 管理科学学报，2001，4(3)：52－64.
Song Weibin，Su Qin. Queuing model in virtual service support system［J］. Journal of Management Sciences in China，2001，4(3)：52－64.（in Chinese）

[15] 邓永录. 随机模型及其应用［M］. 北京: 高等教育出版社，1992.
Deng Yonglu. Stochastic Models and Applications［M］. Beijing: Higher Education Press，1992.（in Chinese）

[16] Kallo N，Koltai T. Increasing Customer Satisfaction in Queuing Systems with Rapid Modelling［M］// Reiner G. Rapid Modelling and Quick Response，Londen: Springer-Verlag，2010: 119－130.

[17] Wolff R W. Modeling and the Theory of Queue［M］. NJ: Prentice-Hall，Englewood Cliffs，1989.

Two kinds of queuing management policy for improving customer satisfaction with waiting

ZHOU Wen-hui[1]，*HUANG Wei-xiang*[1]，*WU Yong-zhong*[1]，*LI He-long*[2]

1. School of Business Administration，South China University of Technology，Guangzhou 510640，China;
2. School of Economics and Commerce，South China University of Technology，Guangzhou 510640，China

Abstract: According to the psychology of waiting lines，a good queuing management policy can largely improve the customer satisfaction with waiting. Inspired by that，this paper compares two kinds of queuing management policies alternatively applied by a capital-constrained service system to improve customer satisfaction with waiting: One is to offer extra service to the customers ranked less than N in queue (policy H)，and the other is to offer extra service to the customers ranked over N (policy T). In this paper，we model the service system as an M/M/1 queuing system and give the optimal design for each kind of policy. Our numerical examples show that the performances of these two kinds of policies vary significantly under different budgets and different service loads. When the budget is large，if the service load is low or the extra service makes a large difference to customer feeling of delay，policy H dominates policy T. When the budget is small and the service load is low，policy T dominates policy H. Finally，when the budget is small and the extra service makes a small difference，the effects of both policies are not significant.

Key words: psychology of waiting lines; queuing management; customer satisfaction with waiting; queuing system

附录:

证明定理 1 **和命题** 1 **需要的引理** 1 — 3.

引理1 **方程** $G_n^H(\cdot) = G_e^H(\cdot)$ **存在唯一根，记为** R_H.

证明 **计算如下积分**

$$\int_0^\infty t^i e^{-\mu t} dt = \frac{i!}{\mu^{i+1}}$$

则当 $N \geqslant 0$ **时，有**

$$\begin{aligned} E[S_n^H] &= \sum_{n=0}^N p_0\rho^n + \sum_{n=N+1}^\infty p_0\rho^n \frac{\mu^{n-N}}{(n-N-1)!} \times \\ &\quad \left[\int_0^\infty t^{n-N-1} e^{-(\mu+\beta)t} dt\right] \\ &= p_o \sum_{n=0}^N \rho^n + p_0\rho^N \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda^n}{(\mu+\beta_n)^n} \\ &= 1 - \rho^{N+1} + p_0\rho^N \frac{\lambda}{\mu+\beta_n-\lambda} \end{aligned} \tag{A1}$$

因为

$$G_n^H(N+1) - G_n^H(N) = (1-\rho)\rho^N\left[\rho - \frac{\lambda(1-\rho)}{\mu+\beta_n-\lambda}\right] > (1-\rho)\rho^N\left[\rho - \frac{\lambda(1-\rho)}{\mu-\lambda}\right] = 0$$

所以 $E[S_s^n]$ **是** N **的严格递增函数. 此外，当** $N > 0$ **时**

$$\begin{aligned} E[S_e^H] &= p_0 + \sum_{n=1}^N p_0\rho^n \frac{\mu^n}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\mu+\beta)t} dt + \\ &\quad \sum_{n=N+1}^\infty p_0\rho^n \frac{\mu^N}{(N-1)!}\int_0^\infty t^{N-1} e^{-(\mu+\beta)t} dt \\ &= p_0 + \sum_{n=1}^N \frac{p_0\lambda^n}{(\mu+\beta_e)^n} + \sum_{n=N+1}^\infty \frac{p_0\rho^n\mu^N}{(\mu+\beta_e)^N} \\ &= p_0 \frac{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu+\beta_e}\right)^{N+1}}{1-\dfrac{\lambda}{\mu+\beta_e}} + \rho^{N+1}\left(\frac{\mu}{\mu+\beta_e}\right)^N \end{aligned} \tag{A2}$$

因为

$$G_e^H(N+1) - G_e^H(N) = \left(\frac{\lambda}{\mu+\beta_e}\right)^N\left(\frac{\lambda}{\mu+\beta_e} - \rho\right) < 0$$

所以 $E[S_e^H]$ **是** N **的严格递减函数. 因为** $N = 0$ **时，**$t_e^H = 0$，$E[S_e^H] = 1$. **对于式**(A2)，**当** $N = 0$ **时，**$E[S_e^H] = 1$. **所以对于一切** $N \geqslant 0$，**式**(A1)、(A2) **皆成立. 因为当** $N = 0$ **时**

$$E[S_e^H] = 1 > \rho > S_0 = E[S_n^H]$$

当 $N = \infty$ **时**

$$E[S_e^H] = p_0 \frac{\mu+\beta_e}{\mu+\beta_e-\lambda} < \rho < 1 = E[S_n^H]$$

故方程 $G_n^H(\cdot) = G_e^H(\cdot)$ **存在唯一根.** **证毕.**

引理2 **当** $n < R_H$ **时，**$E[S_H]$ **是** n **的严格递增函数；当** $n > R_H$ **时，**$E[S_H]$ **是** n **的严格递减函数，且** N_o^H **能使** $E[S_H]$ **取得最大值.**

证明 **当** $n < R_H$ **时，**$E[S_e^H] > E[S_n^H]$，$E[S_H] = \min\{E[S_n^H], E[S_e^H]\} = E[S_n^H]$ **是** n **的严格递增函数；当** $n > R_H$ **时，**$E[S_e^H] < E[S_n^H]$，$E[S_H] = \min\{E[S_n^H], E[S_e^H]\} = E[S_n^H]$ **是** n **的严格递减函数. 因此，在** R_H **处，**$E[S_H] = G_n^H(R_H) = G_e^H(R_H)$，**取得最大值. 考虑到整数约束，因为**$\lfloor R_H \rfloor \leqslant R_H$，**所以**

$$\begin{aligned} E[S_H] &= \min\{G_n^H(\lfloor R_H \rfloor), G_e^H(\lfloor R_H \rfloor)\} \\ &= G_n^H(\lfloor R_H \rfloor) \end{aligned}$$

因为$\lceil R_H \rceil \geqslant R_H$，**所以**

$$\begin{aligned} E[S_H] &= \min\{G_n^H(\lceil R_H \rceil), G_e^H(\lceil R_H \rceil)\} \\ &= G_e^H(\lceil R_H \rceil) \end{aligned}$$

于是有

$$\max E[S_H] = \max\{G_n^H(\lfloor R_H \rfloor), G_e^H(\lceil R_H \rceil)\}$$

根据定义，N_0^H **使** $E[S_H]$ **取得最大值.** **证毕.**

引理3 C_H **分别是** ρ **和** N **的严格递增函数.**

证明 **将** C_H **看成** ρ **和** N **的函数，根据式**(A2)，**有**

$$C_H(\rho, N) = C_e \frac{\rho^2(1-\rho^N)}{1-\rho} = C_e\rho\sum_{n=1}^N \rho^n$$

给定 $0 \leqslant \rho_1 < \rho_2 < 1$，**则**

$$C_H(\rho_2, N) = C_e\rho_2\sum_{n=1}^N \rho_2^n > C_e\rho_1\sum_{n=1}^N \rho_1^n = C_H(\rho_1, N)$$

对于任意的 $N \geqslant 0$，**有**

$$C_H(\rho, N+1) - C_H(\rho, N) = C_e\rho^{N+2} > 0$$

证毕.

定理1的证明 **根据引理** 2，N_0^H **是优化模型**(P1) **的松弛问题的最优解. 当** $C_0 \geqslant C_H(N_0^H)$ **时，松弛问题的最优解满足约束，即**(P1) **退化为其松弛问题，故** $N_H^* = N_0^H$. **记**

$$N_H = \max\{n \mid C_H(n) \leqslant C_0\}$$

当 $C_0 < C_H(N_0^H)$ **时，由引理** 3 **有，**$n \leqslant N_H < N_0^H$. **根据引理** 2，**当** $n \leqslant N_H < N_0^H$ **时，**$E[S_H]$ **是** n **的严格递增函数. 因此在** $N_H < N_0^H$ **的条件下，顾客等待的满意度的最大值在** N_H **处取得. 即**

$$N_H^* = \max\{n \mid C_H(n) \leqslant C_o\}$$

证毕.

命题1的证明 **由引理** 3 **可知** C_H **是** N **的递增函数，同样地，**N **是** C_H **的递增函数. 由定理** 1，**当** $C_0 < C_H(N_0^H)$ **时**

$$N_H^* = \max\{n \mid C_H(n) \leqslant C_0\}$$

而 $\max\{n \mid C_H(n) \leqslant C_0\}$ **随着** C_0 **增加而增加，则** N_H^* **随着** C_0 **的增加而增加，且** $N_n^* < N_0^H$. **根据引理** 2，**当** $N < N_0^H$ **时，**$E[S_H]$ **是** N **的递增函数. 因此，当** $C_0 < C_H(N_0^H)$ **时，**N_H^* **随着** C_0 **的增加而增加，**S_H^* **随着** C_0 **的增加而增加.**

类似地，定理 2 **和命题** 2 **的证明需要如下引理** 4 − 6，

(**下转第** 33 **页**)

"5.12" earthquake; Qinghai "4.14" earthquake; Tibet "3.14" incident; and Xinjiang "7.5" incident. The results indicate: 1, both natural disasters and social violence event have significant negative impacts on stock prices of the listed companies where the events took place, among which "3.14" incident had the most significant effects in the short run while "5.12" earthquake had the most significant effects in the long run; 2, the impacts of two earthquakes on the prices lasted for 19 days and 8 days respectively and those of the two social violence event lasted for 7 days and 6 days—respectively natural disasters have longer impacts on stock prices than social violence event do; 3, the two earthquakes brought about 30% value losses to the stock market, Tibet "3.14" incident brought about 15% losses while the "7.5" incident brought no value losses; 4, shocks on stock prices had contagious effects. The prices of the affected stocks and their matching stocks went up and down synchronously and investors tended to chase the trends by selling low and buying high. Besides, some other interesting results are drawn from our empirical study e.g. when similar events took place for the second time, the investors showed their learning ability; and no matter in natural disasters or social violence event, nationalism was observed in stock markets where both incidents were not welcomed by investors.

Key words: natural disaster; stock price shock; contagious effect; learning ability

(上接第 10 页)

其证明类似引理 1 – 3,故略去.

引理 4　方程 $G_n^T(\cdot) = G_e^T(\cdot)$ 存在唯一根,记为 R_T.

引理 5　当 $n < R_T$ 时,$E[S_T]$ 是 n 的严格递增函数;当 $n > R_T$ 时,$E[S_T]$ 是 n 的严格递减函数,且 N_0^T 能使 $E[S_T]$ 取得最大值.

引理 6　C_T 是 ρ 的严格递增函数,是 N 的严格递减函数.

定理 2 的证明　根据引理 5,N_0^T 是优化模型(P2) 的无约束松弛问题的最优解. 当 $C_0 \geqslant C_T(N_0^T)$ 时,松弛问题的最优解满足约束,即(P2) 退化为其松弛问题,故 $N_T^* = N_0^T$; 记 $N_T = \min\{n \mid C_T(n) \leqslant C_0\}$. 当 $C_0 < C_T(N_0^T)$ 时,由引理 6 有,$n \geqslant N_T > N_0^T$. 根据引理 5,当 $n \geqslant N_T > N_0^T$ 时,$E[S_T]$ 是 n 的严格递减函数. 因此在 $N_T > N_0^T$ 的条件下,顾客等待的满意度的最大值在 N_T 处取得. 即

$$N_T^* = \min\{n \mid C_T(n) \leqslant C_0\}$$

证毕.

命题 2 的证明　由引理 6 可知 C_T 是 N 的递减函数,同样的,N 是 C_T 的递减函数. 根据定理 2,当 $C_0 < C_T(N_0^T)$ 时

$$N_T^* = \min\{n \mid C_T(n) \leqslant C_0\}$$

注意到 $\min\{n \mid C_T(n) \leqslant C_0\}$ 随 C_0 增加而减少,则 N_T^* 随着 C_0 的增加而减少,且 $N_T^* > N_0^T$. 根据引理 5,当 $N > N_0^T$ 时,$E[S_T]$ 是 N 的递减函数. 因此,当 $C_0 < C_T(N_0^T)$ 时,N_T^* 随着 C_0 的增加而减少,S_T^* 随着 C_0 的增加而增加.　证毕.

命题 3 的证明　对于策略 H,当 $C_0 < C_H(1)$ 时,由于预算的限制,企业实际上不能提供额外服务; 对于策略 T,只要将 N 设置得足够大,比如 $N > \dfrac{\ln(p_0 c_0 / c_e)}{\ln \rho} - 2$,为顾客提供额外服务总是可行的($C_T(N) < C_0$). 此时,策略 T 优于策略 H.　证毕.