随机需求库存 – 路径问题最优策略及其算法①

赵　达[1]，李　军[2]，马丹祥[3]，李妍峰[2]
(1. 海南大学经济与管理学院，海口 570228; 2. 西南交通大学经济管理学院，成都 610031;
3. 河北联合大学建筑工程学院，唐山 063009)

摘要: 随机需求库存 – 路径问题(stochastic demand inventory routing problem, SDIRP) 是典型的 NP 难题,也是实施供应商管理库存策略过程中的关键所在. 文章研究了在直接配送策略、无车辆配送能力约束的 Milk-Run 配送策略以及考虑该约束的 Milk-Run 配送策略下 SDIRP 的最优策略形式. 首先,证明了前两类问题的最优库存策略为(s,S) 形式,并在此基础上,通过引入固定分区策略将第三类问题转化为前两类问题进行研究; 其次,针对前两类问题分析了最优库存策略的性质,给出了策略中各参数的上、下界,并提出了求解这两类问题最优策略的优化算法; 最后,通过数值算例验证了文中算法的有效性,进而讨论了实际中常用的固定配送路径下(s,S) 策略的适用范围.

关键词: 库存 – 路径问题; 随机需求; (s,S) 策略
中图分类号: F253.4　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1007 – 9807(2014) 05 – 0014 – 11

0 引　言

通常意义下库存 – 路径问题(inventory routing problem, IRP) 是指在供应商管理库存(vendor managed inventory, VMI) 策略下,无限(较长) 计划期内,由一个供应商(配送中心) 向多个客户提供补货配送服务,供应商需要确定每天的补货对象、补货数量以及车辆的行驶路径,在满足一定的约束条件(客户库存能力,配送车辆能力等) 时,使系统平均或折扣运行成本(库存持有成本,缺货损失成本,配送成本等) 最小[1],其实质就是研究库存补充和配送之间的协调问题[2]. 完整的 IRP 策略由库存策略和相应的配送策略构成,前者决定了每个决策阶段的补货对象及其补货数量,后者决定了相应的配送路径,二者相互影响. IRP 是经典的 NP-hard 问题,尤其在客户需求不确定情况下,解决难度更大. 同时 IRP 问题还是有效实施 VMI,降低供应链运行成本的关键所在[3-4]. 因此,对于该问题的研究具有很强的理论价值和现实意义.

虽然针对确定需求 IRP 的研究已经十分成熟,但对于随机需求 IRP(stochastic demand inventory routing problem, SDIRP) 的研究却相对较少. 已有研究可以根据计划期的长短分为以一天为周期、滚动周期以及无限周期[5] 3 种类型,其中,Federgruen和 Zipkin[1] 利用启发式的分解算法,把 SDIRP 看作是计划期为一天的库存分配问题与车辆路径问题(vehicle routing problem, VRP) 的组合. Trudeau 和 Dorr[6] 采用滚动周期技术分析了短期决策对后续阶段的影响,将长期的 SDIRP 转化为若干个以周为单位的短周期问题,通过最小化上述变化带来的成本影响得到各客户的最优补货时间,并采用混合整数规划计算出最优配送路径. 此外,Reiman 等[7] 运用排队理论分析了直接配

① 收稿日期: 2011 – 11 – 15; 修订日期: 2012 – 07 – 10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71361006; 71271178; 71001005) ; 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(SWJTU11CX087) ; 中西部高校综合能力提升计划资助项目; 海南大学科研启动基金资助项目(KYQD1303) .
作者简介: 赵　达(1980—) ，男，河北易县人，博士，讲师. Email: zhaoda@ hainu. edu. cn

送、固定路径以及混合路径情形下周期为 T 的 SDIRP. Bertazzi 等[8] 以及 Yu 等[9] 则采用动态规划、混合整数规划以及随机规划等数学规划方法研究两类滚动周期 SDIRP. 最后,赵达等[3] 、Adelman[10] 、Kleywegt 等[11-12] 以及 Minkoff[13] 均将 SDIRP 中的库存问题表示为无限阶段马尔可夫决策过程(Markov decision process, MDP) ,从而通过求解相应的线性规划问题得到优化的库存策略,并结合相应的路径问题算法给出以长期平均或折扣成本最小为目标的 SDIRP 优化策略. 通过上述分析可以看出,对于 SDIRP 的研究方法主要采用了启发式分解算法、数学规划、排队理论、随机过程等理论. 其中,绝大部分的研究[1,6-9] 均是使用随机需求的均值等数字特征,将问题转化为确定需求 IRP 进行分析[5] ,结果不能很好地反映 SDIRP 需求的随机特性. 同时,现有研究主要针对于一天周期或滚动周期的短计划期情形,而运用 MDP 等随机过程理论研究具有无限周期特点的 SDIRP 文献相对较少[3,10-13] . 此外,上述研究更多地关注于设计各类算法以求解不同假设下的 SDIRP,却很少讨论其最优策略的形式,很难对最优策略的性质及其管理意义进行分析,在一定程度上也影响了最优策略的易用性[14] .

本文首先证明了在直接配送策略下 SDIRP 问题的最优平稳策略为(s,S) 形式②,并以此为基础讨论了在不考虑车辆配送能力约束时 Milk-Run 配送策略下 SDIRP 最优策略的存在条件及其性质,进而设计了求解相应的启发式算法. 此外,对于 Milk-Run 配送策略下存在车辆配送能力约束的问题,本文通过引入固定分区策略(fixed partition policy, FPP) 将其转化为前两类问题进行处理. 最后,通过数值仿真将本文设计的算法与文献 [3] 中的算法以及在实际中常用的固定路径配送下(s,S) 策略进行了比较,并分析了该常用策略的适用条件. 与文献 [1,6 - 9] 相比,本文运用了更新过程理论对随机需求进行分析和处理,使得结论在实际的随机环境中适合性更强; 同时与文献 [3,10 - 13] 相比,证明了 SDIRP 的最优策略结构,从而有效地避免了求解 MDP 时状态转移概率矩阵规模过大的难题,并且该结构在各决策阶段均保持不变,实际中可操作性更好,同时也更有利于对最优策略进行分析[15] .

1　问题描述

1.1　问题的基本描述

考虑采用 VMI 库存管理模式的物流系统: 由 1 个配送中心为 N 个已知地理位置的客户提供某种产品,令 c_{ij} 表示客户 i 到客户 j 的最短距离(i, $j = 0,1,2,\cdots,N$) ; 其中 0 表示配送中心,并假设不考虑配送中心的供应能力限制及其相应的库存成本[1-4,6-14] . 客户每天的需求量为一组稳定的独立同分布的随机变量 u_n($1,2,\cdots,N$) ,其密度函数为 $\varphi_n(\cdot)$,各客户的最大库存容量为 C_n. 供应商在每阶段(天) 客户的需求到达之前,根据其真实的需求及库存信息对其进行配送. 产品从配送中心出发由配送能力为 C_V 的车辆运送到每个需要补货的客户处. 系统优化的目标则是求得最优策略,使得系统长期运行成本最小.

1.2　问题的成本结构

上述物流系统中每阶段的成本包括配送中心对各客户的配送成本、各客户的库存持有成本以及由随机需求而引起的缺货损失成本. 其中假设: 1) 配送成本是车辆行驶距离的线性函数,在本文中直接用车辆行驶距离表示; 2) 客户每天的库存持有成本与客户当天的剩余库存量成正比,如客户 n($1,2,\cdots,N$) 配送前的库存量为 x_n,且当天到达的配送量为 d_n,客户 n 的单位持有成本为 h_n,则其库存持有成本为 $h_n(\max\{y_n - u_n, 0\})$ 其中, $y_n = x_n + d_n$; 3) 假设缺货损失成本的大小与缺货量成正比,如客户 n 的单位缺货损失为 p_n,则其缺货损失成本为 $p_n(\max\{u_n - y_n, 0\})$. 此外,由于该系统处于 VMI 库存管理模式下,并不存在客户的订货成本. 因此,令函数 $G_n(y_n)$ 表示当客户 n 的库存量为 x_n,配送量为 d_n 时,其单阶段的期望库存成本(持有成本与缺货损失成本之和) ,则

$$G_n(y_n) = h_n\int_0^{y_n}(y_n - u_n)\phi_n(u_n)\,\mathrm{d}u_n + p_n\int_{y_n}^{\infty}(u_n - y_n)\varphi_n(u_n)\,\mathrm{d}u_n \tag{1}$$

② 所谓平稳策略是指策略的结构、参数与决策阶段、历史、当前状态无关的一类策略[15] .

其中，为了更贴近实际，假设各客户的基本参数保证无限量订货或者无限量缺货策略是策略集中的绝对劣势策略，则参数 p_n，h_n 的关系为 $0 < h_n < p_n$.

2 SDIRP 的最优策略形式

在 SDIRP 最优策略中，库存策略不但是求解配送策略的输入，也决定着配送策略的形式，同时对系统长期运行成本也有着更为重要的影响. 所以，对于最优库存策略的分析就成为了更好解决 SDIRP 的关键所在. 但是，由于 SDIRP 的复杂性使得确定其库存策略不仅是个无限阶段随机需求库存问题，同时还受到相应配送策略的影响. 因此，本文将 SDIRP 按照配送方式分为直接配送策略下的 SDIRP 以及基于 Milk-Run 配送策略的 SDIRP，并针对不同配送策略下的问题分别讨论了其最优库存策略以及最优策略的形式.

2.1 直接配送策略下 SDIRP 最优策略形式

当系统中客户的需求量与车辆配送能力 C_V 接近时，直接配送策略是十分有效的[16]. 在该配送方式下，由于 SDIRP 中各客户的配送成本退化成一个常量，因此其最优策略形式完全由最优库存策略的形式决定. 同时，由于此时各客户的库存决策相互独立，因此可以将 SDIRP 按照客户不同分为 N 个独立的子问题，而对于每个子问题的最优库存策略可以给出如下引理.

引理 1 在直接配送策略下，SDIRP 任意子问题 n 的最优库存策略与考虑订货成本的无限阶段随机需求库存问题③的最优策略结构一致且其最优库存平稳策略为 (s_n, S_n) 结构.

对上述引理的证明如下：直接配送策略下，SDIRP 各子问题的库存决策过程与考虑订货成本的无限阶段随机需求库存问题在结构上均属于随机需求下的无限阶段决策问题，且目标也同为使得系统的长期平均或折扣成本最小，属于随机动态规划的范畴. 此时，二者的最优策略结构完全取决于每阶段的成本构成.

对于 SDIRP 各子问题而言，其单阶段的成本包括：库存持有成本、缺货损失成本以及配送成本. 与无限阶段随机需求库存问题相比，唯一区别在于后者包括订货成本而前者则是配送成本. 虽然两项成本的实际意义不同，但其数学性质却完全一致，均可以用函数 $K(d_n^t) = K_n^t \delta(d_n^t)$ 来表示，其中 $\delta(\cdot)$ 为决策阶段 t 的配送量 d_n^t 的指示函数，即

$$\delta(d_n^t) = \begin{cases} 1, d_n^t > 0 \\ 0, d_n^t = 0 \end{cases} \tag{2}$$

其中 K_n^t 在 SDIRP 中表示客户 n 在阶段 t 的配送成本，而在无限阶段随机需求库存问题中则表示第 t 次的订货成本. 所以，上述两类问题的结构、目标以及成本构成的数学性质均一致，即二者在数学意义上是等价的. 因此，上述两类问题的最优策略结构完全一致.

同时根据文献[17]，当 K_n^t 为常数 K，且无限阶段随机需求库存问题的单阶段期望库存成本函数④ $G(y)$ 为凸函数并满足不等式

$$\lim_{|y| \to \infty} G(y) > \min_y G(y) + K \tag{3}$$

则该问题的最优策略为 (s, S) 结构，即在任意阶段当客户的库存量小于等于订货点 s 时进行补货，补货量为当前库存量与最高库存水平 S 之间的差值. 因此，只需证明 SDIRP 各子问题满足上述 3 个条件，即可证明引理 1 中的结论.

在直接配送条件下 $K_n^t = c_{0n} + c_{n0}$ 为常数. 同时，在 SDIRP 问题中，不等式(3)在经济意义上保证了不会出现无限量订购或者放任缺货的极端情况，根据上述经济意义以及在 1.2 中关于参数设置的相关假设，不等式(3)成立.

此外，根据式(1)，则

$$G_n''(y_n) = (h_n + p_n)\varphi_n(y_n)$$

其中 $\varphi_n(y_n) \geqslant 0$，$h_n + p_n > 0$，因此 $G_n''(y_n) \geqslant 0$，即各客户其单阶段期望库存成本函数为凸函数，至此引理 1 得证.

根据引理 1，由于此时各子问题完全独立，因此不难给出直接配送策略下 SDIRP 最优库存平稳策略形式为 $\{(s_1, S_1), (s_2, S_2), \cdots, (s_N, S_N)\}$.

---

③ 考虑订货成本的无限阶段随机需求库存问题是一类经典库存问题，1960 年由 Scarf H 首先提出，之后包括 Zheng[17] 等众多学者对该问题的最优解的结构及其算法进行了研究.

④ 在无限阶段随机需求库存问题研究中，其单阶段期望库存成本函数并不包括订货成本，该项成本被单独考虑[17].

进一步考虑客户最大库存容量约束时,某些本地库存容量相对较小的客户其最优库存策略中的最高库存水平 S_n 可能会大于其最大库存容量 C_n. 此时,可采用近似的 (s_n, C_n) 策略对原策略进行修正,即当客户 n 的库存水平小于等于 s_n 时,将其库存补充到该客户本地最大库存容量 C_n[18]. 通过上述分析可以给出直接配送策略下 SDIRP 问题最优策略如下.

命题 1　直接配送策略下 SDIRP 最优策略的形式为 $\{(s_1, \hat{S}_1), (s_2, \hat{S}_2), \cdots, (s_n, \hat{S}_n), \cdots, (s_N, \hat{S}_N)\}$,其中 $\hat{S}_n = \min\{S_n, C_n\}$. 该策略下,任意阶段的补货对象集合 $\Phi = \{n \mid x_n \leqslant s_n, n = 1, 2, \cdots, N\}$,对于 $\forall n \in \Phi$,其补货数量 $d_n = \hat{S}_n - x_n$.

2.2　Milk-Run 配送策略下 SDIRP 最优策略形式

当系统中客户的需求量相对较小时,直接配送策略的成本会不断升高,而此时 Milk-Run 的配送策略则更为有效. 该配送策略下,多个客户由同一辆车提供补货服务. 实际中,在一些连锁的餐饮、药店、银行等企业,由于客户需求量相对于车辆配送能力 C_V 而言很小,配送中心往往可以使用一辆车完成对当天所有需要补货客户的配送任务. 而对于规模稍大的企业,如连锁超市、网上商城,就需要多辆车才能满足所有客户的需求. 因此,本文对于 Milk-Run 配送策略下的 SDIRP 根据其是否需要考虑车辆配送能力限制进行分类,并分别讨论上述两种情况下 SDIRP 最优策略的形式.

2.2.1　无车辆配送能力约束的 SDIRP 最优策略形式

若不需要考虑车辆配送能力限制,此时配送中心根据每个决策阶段补货对象的不同采用相应的旅行商问题(traveling salesman problem, TSP)最优解作为配送路径对其进行服务. 上述配送方式虽然不会影响单阶段的期望库存成本函数,但会使客户 n 在不同阶段 t 的配送成本 K_n^t 不断变化,从而影响了 SDIRP 最优库存平稳策略的存在性,也增加了问题的求解难度,但依然可以采用引理 1 的证明思路进行分析.

由于此时车辆的配送能力可以满足所有客户的需求,因此 SDIRP 中各客户的库存决策仍然相互独立. 进而根据引理 1 的证明过程可知,此时 SDIRP 各子问题的最优库存策略与可变订货成本的无限阶段随机需求库存问题的最优策略结构一致,该问题中订货成本 K_n^t 随阶段 t 而发生变化. 根据文献[19]、[20]可以给出如下结论.

引理 2　当单阶段期望库存成本函数 $G(y)$ 为凸函数并满足不等式(3),且订货成本满足 $K^t \geqslant \alpha K^{t-1}$ 时,可变订货成本的无限阶段随机需求库存问题在折扣因子为 α 的折扣准则下其最优策略结构为 $\{(s^1, S^1), (s^2, S^2), \cdots, (s^t, S^t), \cdots\}$.

根据引理 2 以及 SDIRP 各子问题最优库存策略与可变订货成本的无限阶段随机需求库存问题最优策略结构的等价关系,可以给出如下命题.

命题 2　在 Milk-Run 配送策略下,不考虑车辆配送能力约束时,SDIRP 任意子问题 n 的配送成本如满足 $K_n^t \geqslant \alpha_n K_n^{t+1}$,则该子问题在折扣因子为 α_n 的折扣准则下其最优库存策略结构为 $\{(s_n^1, S_n^1), (s_n^2, S_n^2), \cdots, (s_n^t, S_n^t), \cdots\}$.

根据命题 2,由于 SDIRP 最优库存策略的结构与各阶段客户的配送成本相关,因此,有必要对该项成本的性质进行分析. 此时,SDIRP 在任意阶段 t 的配送总成本为该阶段需要补货的所有客户构成的 TSP 路径长度,表示为 $TSP(t)$. 则客户 n 在阶段 t 的配送成本 K_n^t 由 $TSP(t)$ 以及对其进行分配的方法决定. 令 $\overline{K}_n, \underline{K}_n$ 分别表示客户 n 在任意阶段 t 的配送成本 K_n^t 的上、下界,由于 $TSP(t)$ 的有界性,即

$$\min\{c_{0n} + c_{n0} \mid n = 1, 2, \cdots, N\} \leqslant TSP(t) \leqslant TSP_N \tag{4}$$

其中 TSP_N 表示由所有 N 个客户构成的 TSP 路径长度,使得 $\overline{K}_n, \underline{K}_n$ 必然存在.

此时,令 $\alpha_n = \underline{K}_n / \overline{K}_n$ 则在任意阶段 t 对于任意客户 n 不等式 $K_n^t \geqslant \alpha_n K_n^{t+1}$ 均成立. 根据命题 2 可知,在不考虑车辆配送能力约束时 SDIRP 各子问题的最优库存策略均为 $\{(s_n^1, S_n^1), (s_n^2, S_n^2), \cdots, (s_n^t, S_n^t), \cdots\}$. 同时,由于各子问题相互独立,因此 SDIRP 在任意阶段 t 的最优库存策略形式为 $\{(s_1^t, S_1^t), (s_2^t, S_2^t), \cdots, (s_n^t, S_n^t), \cdots, (s_N^t, S_N^t)\}$. 同理命题 1 的分析过程,不难给出此时 SDIRP 在阶段 t 的最优策略结构如下.

命题 3　采用 Milk-Run 配送策略时,无车辆

配送能力约束的 SDIRP 在任意阶段 t 时的最优库存策略形式为$\{(s_1^t,\hat{S}_1^t),(s_2^t,\hat{S}_2^t),\cdots,(s_n^t,\hat{S}_n^t),\cdots,(s_N^t,\hat{S}_N^t)\}$，其中，$\hat{S}_n^t = \min\{S_n^t,C_n\}$. 该策略下，阶段 t 的补货对象集合 $\varphi^t = \{n \mid x_n^t \leqslant s_n^t, n = 1,2,\cdots,N\}$，其中，$x_n^t$ 表示客户 n 在阶段 t 开始时的库存水平. 对于 $\forall n \in \Phi^t$，其该阶段的补货数量 $d_n^t = \hat{S}_n^t - x_n^t$；配送路径为访问集合 Φ^t 中所有客户的 TSP 路径.

2.2.2 考虑车辆配送能力约束的 SDIRP 最优策略形式

虽然现实中很多企业满足 2.2.1 中车辆配送能力无限制的假设，但更多情况下车辆的配送能力在 SDIRP 中仍不可忽视. 此时，SDIRP 最优配送策略的求解则转化为另一类 NP-hard 问题 VRP[21,22]. 同时，各客户的库存策略也通过影响彼此的配送路径而相互作用. 因此，在 Milk-Run 配送策略下有车辆配送能力约束的 SDIRP 最优策略的稳定形式并不存在[23]. 为了更好的分析这一问题，本文引入了一个在解决确定需求 IRP 时常用的策略，即固定分区策略[23]，并在该策略的基础上讨论此时 SDIRP 的最优策略形式.

在 FPP 下客户被划分为若干个服务分区，不同分区中的客户相互独立的接受配送中心的服务，而同一分区中所有客户则由一辆车提供配送服务，且分区内采用固定路径配送，即当区域中有客户需要补货时，则车辆采用 TSP 路径对该区域内所有客户同时进行配送服务[23]. 但在企业的实际运作中对客户进行分区后更多采用的是动态配送路径，即每个决策阶段只访问需要补货的客户. 此时，有车辆配送能力约束的 SDIRP 最优策略则由 L 个独立的无车辆能力约束 SDIRP 最优策略组成，其中 L 为客户分区的总数. 同时，针对任意分区 R，其最优策略均可根据命题 3 给出.

如按照标准的 FPP 假设安排补货，则可以将每个分区作为一个虚拟客户. 令 $|R|$ 表示分区 R 中客户的数量，则该虚拟客户 R 所面对的需求为随机变量 $u_R = \sum_{i \in R} u_i$，其库存水平 $x_R = \sum_{i \in R} x_i$，单位库存持有成本 $h_R = \sum_{i \in R} h_i / |R|$，单位缺货损失成本 $p_R = \sum_{i \in R} p_i / |R|$. 同时，配送中心到虚拟客户 R 的配送距离为 $TSP_{|R|}$. 通过上述参数设定即将 FPP 下的 SDIRP 转化为直接配送策略下的 SDIRP. 根据命题 1 可知，虚拟客户 R 的最优平稳策略为$(s_R,\hat{S}_R)$ 形式，其中 $\hat{S}_R = \min\{S_R, \sum_{i \in R} C_i, C_V\}$；如 $x_R \leqslant s_R$，则对其的补货量 $d_R = \hat{S}_R - x_R$. 此时，对于分区 R 中任意客户 i 的补货量 $d_i \geqslant 0$ 可通过求解如下的规划问题得到

$$\min \sum_{i \in R} G_i(x_i + d_i) \tag{5}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in R} d_i = d_R \tag{6}$$

上述规划问题常被用来描述考虑资金约束的多产品报童问题(multi-product newsboy problem with budget constraint)[24]，其相关结论及求解方法已相对成熟，此处不再赘述.

通过上述分析，在引入 FFP 后考虑车辆配送能力约束的 SDIRP 可以被转化为无车辆配送能力约束的 SDIRP 或直接配送策略下的 SDIRP 这两类问题加以解决. 因此，本文重点针对上述两类问题的求解算法进行研究.

3 求解 SDIRP 问题的算法

根据命题 1、3 不难发现，确定 SDIRP 最优策略的关键在于确定最优库存策略. 同时根据命题 1，求解直接配送策略下的 SDIRP 最优库存策略，其实质就是求解各客户(s,S) 的库存策略. 而对于上述问题的算法已经比较成熟，其中文献[17]中的算法更被视为解决该问题的标准算法. 因此本文重点对该算法进行改进，以求解无车辆配送能力约束时 SDIRP 的最优库存策略(为了行文方便，在本节中所提到的 SDIRP 如无特殊说明均为此类问题).

根据命题 2 中 SDIRP 最优库存策略的形式以及存在条件，不难发现客户配送成本的上、下界对 SDIRP 最优库存策略的存在性及其性质有着关键的影响. 因此，分析配送成本对于 SDIRP 最优库存策略的影响是有必要的.

3.1　配送成本对于 SDIRP 最优库存策略的影响

根据 SDIRP 各子问题最优库存策略与考虑订货成本的无限阶段随机需求库存问题最优策略结构的等价关系,本文首先对订货成本对后者最优策略中各参数的影响进行分析,并给出如下引理(证明详见附录 I):

引理 3　假设无限阶段随机需求库存问题中订货成本为 K 时的最优策略为(s,S) 则,当订货成本变为 K',且 $K' \geqslant (\leqslant) K$ 时该问题的最优策略为(s',S'),则 $s' \leqslant (\geqslant) s, S' \geqslant (\leqslant) S$.

根据引理 2、引理 3、命题 2,以及 SDIRP 各子问题之间相互的独立性,不难给出如下命题.

命题 4　SDIRP 中任意客户 n 在阶段 t 的最优库存策略为(s_n^t, S_n^t) $(t = 1,2,\cdots)$. 同时,令 $\bar{s}_n, \bar{S}_n$, $\underline{s}_n, \underline{S}_n$ 分别表示此最优策略中所有订货点和最高库存水平的上、下界,令$(s_n^{\bar{K}_n}, S_n^{\bar{K}_n})$,$(s_n^{\underline{K}_n}, s_n^{\underline{K}_n})$ 分别表示各阶段的配送成本均为 $\bar{K}_n$ 和 $\underline{K}_n$ 时所对应的最优库存平稳策略,则 $\bar{s}_n = s_n^{\underline{K}_n}, \underline{s}_n = s_n^{\bar{K}_n}, \bar{S}_n = S_n^{\bar{K}_n}$, $\underline{S}_n = S_n^{\underline{K}_n}$.

3.2　SDIRP 的求解算法

根据命题 4 中给出的任意客户 n 最优库存策略中订货点 s_n^t 的上、下界 $\bar{s}_n$、$\underline{s}_n$,同时考虑不同决策阶段 t 中配送成本对于 $\bar{s}_n, \underline{s}_n$ 的影响,可以确定在任意阶段 t 需要补货的客户集合,将求解 SDIRP 不稳定的最优库存策略转化为求解各阶段的稳定库存策略,从而得到 SDIRP 的最优策略. 根据上述算法思想,设计如下的启发式算法 1:

步骤 0　令集合 $\Phi^t = \{1,2,\cdots,N\}$;

步骤 1　按照给定的配送成本分配方式求得任意客户 $n \in \Phi^t$ 的配送成本上界 $\bar{K}_n$;

步骤 2　利用文献[7]中的算法,计算各客户在配送成本稳定为 $\bar{K}_n$ 时所对应的最优库存平稳策略$(s_n^{\bar{K}_n}, S_n^{\bar{K}_n})$;

步骤 3　更新补货对象集合

$$\Phi^t = \{n \mid x_n^t \leqslant s_n^{\bar{K}_n}, n = 1,2,\cdots,N\}$$

步骤 4　针对集合 Φ^t 中的客户计算 TSP 路径,并根据配送成本分配方式计算各客户 n 在阶段 t 的配送成本 K_n^t;

步骤 5　根据 K_n^t,利用文献[7]的算法,计算各客户对应的最优库存平稳策略$(s_n^{K_n^t}, S_n^{K_n^t})$,同时考虑客户的最大库存容量约束,得到阶段 t 的最优库存策略为$\{(s_n^{K_n^t}, \hat{S}_n^{K_n^t})\}$.

步骤 6　根据步骤 4 和 5 中的库存和配送策略生成该阶段 SDIPRP 的优化策略.

上述算法 1 根据客户配送成本的上界 $\bar{K}_n$,即命题 4 中给出的订货点的下界 $\underline{s}_n$ 得到补货集合 Φ^t. 该集合包括了所有可能需要补货的目标客户,且其构成元素并不受该阶段中配送路径及其成本变化的影响. 因此,该算法并不能很好地反映出 SDIRP 中配送策略与库存策略间的相互影响. 此时,可以考虑通过客户配送成本的下界 $\underline{K}_n$,即命题 4 中给出的订货点的上界 $\bar{s}_n$ 对算法 1 进行改进,并设计启发式算法 2 如下:

步骤 0　令集合 $\Phi^t = \{1,2,\cdots,N\}$;

步骤 1　按照一定的配送成本分配方式,求得各任意客户 $n \in \Phi^t$ 的配送成本下界 $\underline{K}_n$;

步骤 2　利用文献[7]中的算法,计算各客户在配送成本稳定为 $\underline{K}_n$ 时所对应的最优库存平稳策略$(s_n^{\underline{K}_n}, S_n^{\underline{K}_n})$;

步骤 3　令集合

$$\Phi^t = \{n \mid x_n^t \leqslant s_n^{\underline{K}_n},\ n = 1,2,\cdots,N\};$$

步骤 4　根据集合 Φ^t 以及配送成本分配方式对 $\forall n \in \Phi^t$ 的客户 n 的配送成本下界 $\underline{K}_n$ 进行更新;

步骤 5　重复步骤 2—5,直至集合 Φ^t 不再改变;

步骤 6　针对集合 Φ^t 中的客户计算 TSP 路径,并根据配送成本分配方式计算各客户在阶段 t 的配送成本 K_n^t;

步骤 7　根据 K_n^t,利用文献[7]的算法,计算各客户对应的最优库存稳定策略$(s_n^{K_n^t}, S_n^{K_n^t})$,如果客户 $i \in \Phi^t$ 在阶段 t 时的库存水平 $x_i^t > s_i^{K_i^t}$,则令 $\Phi^t := \Phi^t - \{i\}$;

步骤 8　重复步骤 6 和 7,直至集合 Φ^t 不再改变;

步骤 9　根据最后一次迭代中步骤 7 计算得到的各客户对应的最优库存平稳策略,考虑客户的最大库存容量约束,给出阶段 t 的最优库存策略为$\{(s_n^{K_n^t}, \hat{S}_n^{K_n^t})\}$. 同时,根据最后一次迭代中步骤 6 计算得到的配送策略即可生成该阶段 SDIPR 的优化策略.

在上述算法 2 中阶段 t 的补货对象集合 Φ^t 由各客户的订货点上界 $\bar{s}_n$ 与该阶段配送路径的结构共同决定，不但对算法 1 是种改进也更符合 SDIRP 的问题特性.

4 数值仿真

由于在 SDIRP 现有文献中客户需求的概率分布假设均比较简单，且本文算法中客户需求量对于车辆配送能力而言相对较小，根据文献[25]中的相关结论，此时客户的需求假设服从 Poisson 分布更为合理. 因此，本文随机生成了 10 个需求服从 Poisson 分布的客户需求信息以及每个客户的地理位置信息（见表 1、表 2），其中，为了更贴近实际假设各客户间的距离满足三角不等式且非对称.

表 1 客户基础信息

Table 1 Basic information of customers

客户	需求均值 u	单位持有成本 h	单位缺货损失 p	最大库存容量 C
1	3	3	23	20
2	6	4	28	20
3	5	3	26	20
4	6	5	30	20
5	5	4	31	20
6	4	6	32	20
7	9	2	22	20
8	7	3	24	20
9	5	5	25	20
10	4	4	29	20

表 2 客户地理位置信息

Table 2 Location information of customers

起点＼终点		D. C. 0	客户									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D. C. 0		–	20	25	24	28	27	22	23	20	21	26
客户	1	24	–	15	20	24	38	10	28	35	16	23
	2	21	16	–	14	18	20	39	17	23	16	18
	3	20	23	9	–	16	18	24	17	26	11	16
	4	27	18	16	30	–	37	40	32	26	17	34
	5	23	28	22	27	18	–	30	15	19	16	28
	6	26	24	27	39	24	26	–	13	27	29	30
	7	27	19	30	31	21	20	34	–	17	29	24
	8	28	34	17	12	33	14	26	21	–	21	27
	9	18	18	13	18	12	30	18	32	26	–	30
	10	29	11	24	24	26	27	27	25	35	25	–

4.1 配送成本分配方式对算法的影响

算法 1、2 都需要在给定配送成本分配方式后才能有效运行. 然而，当 TSP 的规模大于 5 时，对于其成本的分配已不存在公认的方法[26]. 因此，本文考虑两种分配方式，即平均分配方式和基于任务的分配方式（具体的分配方式及各客户配送成本上、下界的表达式详见附录 II）. 通过文中各算法计算不考虑车辆配送能力约束的 SDIRP 优化策略并进行模拟，得到系统运行 1 年后的日平均成本，结果如表 3 所示.

根据表 3 不难发现虽然配送成本的分配方式对算法 1、2 的优化效果均存在一定影响，但在本例中两种算法系统平均成本变化均在 1% 左右影响并不显著，说明文中算法对于分配方式具有较好的鲁棒性；同时，在优化效果更好的算法 2 中，通过基于任务的分配方式得到的平均成本均略低，因此，在后续的算例中均以此方法作为配送成本的分配方式进行讨论.

表 3 不同配送成本分配方式对算法的影响

Table 3 Effect of different delivery cost allocation methods on algorithms

算法	1	2
平均分配方式	350.635 6	338.665 8
基于任务的分配方式	352.375 3	336.194 5

4.2　算法比较

为了体现文中算法的优化效果，将算法1、2与文献[3]中基于MDP的启发式算法以及在实际中较为常用的固定路径配送方式下的(s_n, S_n)策略进行比较. 固定路径配送方式下的(s_n, S_n)策略即系统中所有用户均各自采用(s_n, S_n)策略进行库存管理，当其中任意客户需要补货时，则采用固定的TSP路径对所有客户进行补货. 此时，由于每次配送的路径固定，客户各自的配送成本均为常数，因此在固定路径配送时各客户的最优库存策略(s_n, S_n)可以使用文献[17]中的算法直接计算.

根据表1、2中的数据，分别采用上述各类算法得到相应的优化策略并进行模拟，得到系统运行1年后的日平均成本，结果如表4所示.

表4　SDIRP成本在不同算法下的比较

Table 4 Compare SDIRP cost under different algorithms

策略	(s_n, S_n)	MDP[3]	算法1	算法2
平均运行成本	381.120 6	362.030 1	352.375 3	336.194 5

通过表4不难看出，根据文中算法得到的动态配送路径下的优化策略与根据文献[3]中算法得到的策略相比，系统平均运行成本节约了2.7%—7.2%；与固定配送路径下的(s_n, S_n)策略相比，系统平均运行成本节约了7.5%—11.7%. 说明文中的算法对于SDIRP的优化效果比较明显. 其中，对于考虑了配送路径变化对补货对象影响的算法2其优化效果更为显著，也进一步支持了文中的分析.

通过算法1、2得到的优化策略虽然其每阶段的策略形式不变，但参数在不断变化，并不属于平稳策略类，在实际使用中仍有一定的管理难度. 因此，本文对属于平稳策略的固定配送路径下(s_n, S_n)策略的使用条件进行了分析.

根据更新理论，采用固定配送路径下的(s_n, S_n)策略时，客户1、3、5、7、10的期望补货间隔约为2天，而其余客户的期望补货间隔约为1天. 在此基础上逐步增加具有相同期望补货间隔的客户比例，同时比较相应的(s_n, S_n)策略与算法2得到的最优策略在系统平均运行成本上的变化，得到结果如表5所示.

表5　期望补货间隔相同客户比例对算法的影响

Table 5 Effect of proportion of customers having same replenishment interval expectation on algorithms

补货间隔相同比例(%)	50	60	70	80	90	100
改动客户	—	客户1	客户3	客户5	客户7	客户10
改动参数u	—	6	8	10	12	8
(s_n, S_n)成本①	381.120 6	382.602 7	380.641 1	374.717 8	366.421 9	364.137 0
算法2成本②	336.194 5	338.564 4	353.780 8	356.032 9	360.786 3	363.883 6
②相对①的节约比例(%)	11.79	11.51	7.06	4.98	1.54	0.07

通过表5中的数据对比不难发现，随着期望补货间隔相同客户数的逐渐增加，动态配送路径下每次配送的目标客户逐渐增加，致使配送成本增加；另一方面，固定配送路径下过量补货的无效库存逐渐减少，致使库存成本减少. 因此，两种算法给出的最优策略优化效果逐渐接近. 在上例中，当期望补货间隔相同的客户比例达到80%时二者的平均成本差距仅为4.98%，此时，则可以认为属于平稳策略类的固定配送路径下的(s_n, S_n)策略对于求解不考虑车辆配送能力约束的SDIRP是相对有效的.

5　结束语

本文对于不同配送策略下的SDIRP进行了研究. 首先，证明了直接配送策略下SDIRP的最优平稳策略形式如命题1所示. 其次，证明了在Milk-Run配送策略下无车辆配送能力约束SDIRP在折扣因子$\alpha_n = \underline{K}_n/\overline{K}_n$的条件下，其任意阶段$t$的最优库存策略形式为$\{(s_1^t, \hat{S}_1^t), (s_2^t, \hat{S}_2^t), \cdots, (s_N^t, \hat{S}_N^t)\}$，并给出了其中各参数的上、下界. 在此基础上，设计了两种启发式算法求解该类SDIRP的最

优策略. 最后，通过具体的数值算例，将文中算法与以往文献中的 MDP 算法以及固定配送路径下(s_n，S_n) 策略进行了比较，结果显示通过前者得到的客户平均运行成本较后两者更优，其中算法2 的优化效果更为显著. 进而以算法 2 为基准，给出了固定配送路径下(s_n，S_n) 策略作为解决 SDIRP 有效策略的条件.

上述结论均是在不考虑车辆配送能力的前提下得到的. 虽然在 2.2.2 中通过引入 FPP 将有配送能力约束 SDIRP 转化为无配送能力约束或直接配送策略下的问题，但也仅研究了上述几类问题的等价关系. 而对于 FPP 策略下有配送能力约束 SDIRP 最优策略的具体形式、相应算法以及分区算法对于最优策略质量的影响等内容将是作者进一步研究的主要方向.

参 考 文 献:

[1] Federgruen A，Zipkin P. A combined vehicle routing and inventory allocation problem [J]. Operations Research，1984，32 (5)：1019 – 1036.

[2] Qu W，James H B，Iyogun P. An integrated inventory-transportation system with modified periodic policy for multiple products [J]. European Journal of Operational Research，1999，115 (2)：254 – 269.

[3] 赵 达，李 军，马丹祥. 求解随机需求库存 – 路径问题的一种算法 [J]. 系统工程，2006，24 (5)：23 – 28.
Zhao Da，Li Jun，Ma Danxiang. An algorithm for stochastic demand inventory routing problem [J]. Systems Engineering，2006，24 (5)：23 – 28. (in Chinese)

[4] 蔡建湖，周根贵，黄卫来. VMI 下的两级供应链库存决策模型研究 [J]. 管理科学学报，2008，11(4)：104 – 111.
Cai Jianhu，Zhou Gengui，Huang Weilai. Study on two-echelon supply chain inventory decision model under VMI [J]. Journal of Management Sciences in China，2008，11(4)：104 – 111. (in Chinese)

[5] 赵 达，李 军，李妍峰，等. 随机需求库存 – 路径问题：研究现状及展望 [J]. 系统工程，2007，25 (8)：38 – 44.
Zhao Da，Li Jun，Li Yanfeng，et al. Inventory routing problem with stochastic demand：Research status and prospect [J]. Systems Engineering，2007，25 (8)：38 – 44. (in Chinese)

[6] Trudeau P，Dror M. Stochastic inventory routing：Route design with stockouts and route failures [J]. Annals of Operations Research，1992，26(3)：171 – 175.

[7] Reiman M I，Rubio R，Wein L M. Heavy traffic analysis of the dynamic stochastic inventory-routing problem [J]. Transportation Science，1999，33(4)：361 – 380.

[8] Bertazzi L，Bosco A，Guerriero F，et al. A stochastic inventory routing problem with stock-out [J]. Transportation Research Part C：Emerging Technologies，2013，27(2)：89 – 107.

[9] Yu Y G，Chu C B，Chen H X，et al. Large scale stochastic inventory routing problems with split delivery and service level constraints [J]. Annals of Operational Research，2012，197(1)：135 – 158.

[10] Adelman D. A price-directed approach to stochastic inventory/Routing [J]. Operation Research，2004，52(4)：499 – 514.

[11] Kleywegt A J，Nori V S，Savelsbergh M W P. The stochastic inventory routing problem with direct deliveries [J]. Transportation Science，2002，36(1)：94 – 118.

[12] Kleywegt A J，Nori V S，Savelsbergh M W P. Dynamic programming approximations for a stochastic inventory routing problem [J]. Transportation Science，2004，38(1)：42 – 70.

[13] Minkoff A S. A Markov decision model and decomposition heuristic for dynamic vehicle dispatching [J]. Operation Research，1993，41(1)：77 – 90.

[14] Li J X，Chen H X，Chu F. Performance evaluation of distribution strategies for the inventory routing problem [J]. European Journal of Operational Research，2010，202 (2)：412 – 419.

[15] 刘 克. 实用马尔可夫决策过程 [M]. 北京：清华大学出版社，2004：9 – 11.
Liu Ke. Applied Markov Decision Processes [M]. Beijing：Tsinghua University Press，2004：9 – 11. (in Chinese)

[16] Gallego G，Simchi-Levi D. On the effectiveness of direct shipping strategy for the one-warehouse multi-retailer R-systems

[J]. Management Science, 1990, 36 (2): 240 - 243.

[17] Zheng Y S, Federgruen A. Finding optimal (s,S) policies is about as simple as evaluating a single policy [J]. Operations Research, 1991, 39 (4): 654 - 665.

[18] Chen S X, Lambrecht M. X-Y band and modified (s, S) policy [J]. Operations Research, 1996, 44 (6): 1013 - 1019.

[19] Federgruen A, Zipkin P. An inventory model with limited production capacity and uncertain demands I: The average-cost criterion [J]. Mathematics of Operations Research, 1986, 11 (2): 193 - 207.

[20] Veinott A. On the optimality of (s, S) inventory policies new conditions and a new proof [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1966, 14 (5): 1067 - 1083.

[21] 王旭坪, 阮俊虎, 张　凯, 等. 有模糊时间窗的车辆调度组合干扰管理研究 [J]. 管理科学学报, 2011, 14(6): 2 - 15.
Wang Xuping, Ruan Junhu, Zhang Kai, et al. Study on combinational disruption management for vehicle routing problem with fuzzy time windows [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(6): 2 - 15. (in Chinese)

[22] 李妍峰, 李　军, 高自友. 大规模邻域搜索算法求解时变车辆调度问题 [J]. 管理科学学报, 2012, 15(1): 23 - 32.
Li Yanfeng, Li Jun, Gao Ziyou. Very large scale neighborhood search algorithm for solving time dependent vehicle routing problem [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(1): 23 - 32. (in Chinese)

[23] Anily S, Federgruen A. One warehouse multiple retailer systems with vehicle routing costs [J]. Management Science, 1990, 36 (1): 92 - 114.

[24] Lau H, Lau A H. The newsstand problem: A capacitated multiple-product single-period inventory problem [J]. European Journal of Operational Research, 1996, 94 (1): 29 - 42.

[25] Axsater S. 库存控制 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 3 - 77.
Axsater S. Inventory Control [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007: 3 - 77. (in Chinese)

[26] Curiel I. Cooperative Games Theory and Applications [M]. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 1997: 116 - 117.

Optimal strategy of stochastic demand inventory routing problem and algorithms

ZHAO Da[1], *LI Jun*[2], *MA Dan-xiang*[3], *LI Yan-feng*[2]

1. School of Economics and Management, Hainan University, Haikou 570228, China;
2. School of Economics and Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;
3. College of Civil and Architectural Engineering, Hebei United University, Tangshan 063009, China

Abstract: The Stochastic Demand Inventory Routing Problem (SDIRP) is a typical NP-hard problem and is also the key to implementing Vendor Managed Inventory (VMI) strategy. This paper analyses the optimal strategies to SDIRP under direct delivery policy, Milk-Run delivery policy without vehicle capacity constraint, and Milk-Run delivery policy with vehicle capacity constraint, respectively. It is proved that (s,S) policy is the optimal inventory policy for the first two kinds of SDIRP. The third kind of SDIRP can be solved after being transformed into the first two kinds of SDIRP via Fixed Partition Policy (FPP). Then, the properties of the optimal strategies to SDIRP are analyzed, and the lower and upper bound of the parameters for the optimal strategy are given. An algorithm is proposed to solve the first two kinds of SDIRP. Finally, this paper presents a numerical example to analyze the efficiency of the algorithm and discusses the practical application of (s,S) policy under the fixed route delivery policy.

Key words: inventory routing problem; stochastic demand; (s,S) policy

附录Ⅰ:

证明　令订货成本为 K 时最优策略 (s,S) 所对应的平均成本函数为 $C_K(s,S)$，则根据更新理论可得

$$C_K(s,S)=\frac{K+\sum_{j=0}^{y-s-1}m(j)G(y-j)}{M(S-s)} \tag{Ⅰ-1}$$

其中，更新方程 $M(\cdot)$、$m(\cdot)$ 的表达式为

$$M(j)=M(j-1)+m(j-1),\ j=1,2,\cdots \tag{Ⅰ-2a}$$

$$M(0)=0,\ m(0)=(1-p_0)^{-1} \tag{Ⅰ-2b}$$

$$M(j)=\sum_{l=0}^{j}p_l m(j-l),\ j=1,2,\cdots \tag{Ⅰ-2c}$$

其中，$p_l=\Pr(u_n=l)$.

同理，令订货成本变为 K' 时的平均成本函数为 $C_{K'}(\cdot,\cdot)$，则此时策略 (s,S) 对应的平均成本函数表达式为

$$C_{K'}(s,S)=\frac{K'+\sum_{j=0}^{y-s-1}m(j)G(y-j)}{M(S-s)} \tag{Ⅰ-3}$$

当 $K'\leqslant K$，根据式(Ⅰ-1)和(Ⅰ-3)不难得到 $C_{K'}(s,S)\leqslant C_K(s,S)$；同时，根据文献[17]引理3则 $C_{K'}(s,S')\leqslant C_{K'}(s,S)$，因此，可以得到 $C_{K'}(s,S')\leqslant C_{K'}(s,S')\leqslant C_K(s,S)$.

当 $K'\geqslant K$，同理根据式(Ⅰ-1)和(Ⅰ-3)可以得到 $C_{K'}(s',S')\geqslant C_K(s,S)$；同时 (s',S') 为最优策略，则 $C_{K'}(s,S')\geqslant C_{K'}(s',S')$，因此，可以得到 $C_{K'}(s,S')\geqslant C_{K'}(s',S')\geqslant C_K(s,S)$.

综上所述，当 $K'\geqslant(\leqslant)K$ 时

$$C_{K'}(s,S')\geqslant(\leqslant)C_K(s,S) \tag{Ⅰ-4}$$

根据文献[17]推论1，$s=\max\{y<y_1^*\mid C_K(y,S)\leqslant G(y)\}$，其中 y_1^* 为函数 $G(\cdot)$ 最小的极小值点；同理可得 $s'=\max\{y<y_1^*\mid C_{K'}(y,S')\leqslant G(y)\}$. 因此，根据式(Ⅰ-4)可得 $s'\leqslant(\geqslant)s$.

此外，当 $K'\geqslant(\leqslant)K$ 时，$C_{K'}(s',S')\geqslant(\leqslant)C_K(s,S)$；根据文献[17]引理2b，$S$，$S'$ 的上界分别为 $\overline{S}=\max\{y\geqslant y_2^*\mid G(y)\leqslant C_K(s,S)\}$ 和 $\overline{S'}=\max\{y\geqslant y_2^*\mid G(y)\leqslant C_{K'}(s',S')\}$，其中 y_2^* 为函数 $G(\cdot)$ 最大的极小值点. 因此，$\overline{S'}\geqslant(\leqslant)\overline{S}$.

根据文献[17]中设计的算法，由于 $\overline{S'}\geqslant(\leqslant)\overline{S}$，使得在其他条件不变的前提下，对于 S' 的搜索范围要大于(小于)等于对于 S 的搜索范围，因此，可得在 $K'\geqslant(\leqslant)K$ 时，$S'\geqslant(\leqslant)S$ 成立，　　证毕.

同时，由于文献[17]中的引理、推论均适用于折扣准则，因此引理3在采用折扣准则时依然成立.

附录Ⅱ:

考虑一条由 m 个客户组成的配送线路，其最优TSP路径为 $\{0,1,2,3,\cdots,i,\cdots,m,0\}$，其中0表示配送中心. 令 c_{ii+1} 表示客户 i 到客户 $i+1$ 的配送成本，则最优的配送总成本为

$$TSP_m=\sum_{i=0}^{m-1}c_{ii+1}+c_{m_0} \tag{Ⅱ-1}$$

当采用平均方式对配送成本进行分配时，线路上各客户的配送成本均为 TSP_m/m. 根据平均分配方式，如线路上只有1个客户时其配送成本最高，而与所有客户一起配送时其成本最低. 因此，客户 i 在平均成本分配方式下其配送成本上界 $\overline{K}_i$ 以及下界 $\underline{K}_i$ 的表达式分别为

$$\overline{K}_i=c_{0i}+c_{i0} \tag{Ⅱ-2}$$

$$\underline{K}_i=\frac{TSP_m}{m} \tag{Ⅱ-3}$$

此外，当采用基于任务方式对配送成本进行分配时，在式(Ⅱ-1)第1项中，配送成本 c_{ii+1} 可以认为是配送车辆为了完成服务客户 $i+1$ 的任务而付出的成本，因此可以将 $\sum_{i=0}^{m-1}c_{ii+1}$ 中每一项对应分配给客户 $i+1$；而车辆到达所有客户后均需要通过路径 $m-0$ 返回配送中心，因此，将 c_{m0} 平均地分配给 m 个客户. 综上所述，可以得到基于任务的分配方式分配给客户 i 的配送成本 K_i 为

$$K_i=c_{i-1i}+\frac{c_{m_0}}{m} \tag{Ⅱ-4}$$

根据式(Ⅱ-4)可以得到客户 i 在基于任务的成本分配方式下其配送成本上界 $\overline{K}_i$ 以及下界 $\underline{K}_i$ 的表达式分别为

$$\overline{K}_i=\max\{c_{i-1i}\}+\max\{c_{j0}\} \tag{Ⅱ-5}$$

$$\underline{K}_i=\min\{c_{i-1i}\}+\frac{\min\{c_{j0}\}}{m} \tag{Ⅱ-6}$$