# 航空收益管理价格和座位在线联合控制策略①

倪冠群[1]，徐寅峰[2]，徐玖平[1]
（1. 四川大学工商管理学院，成都 610065; 2. 西安交通大学管理学院，西安 710049）

**摘要:** 针对乘客未来订票信息不可预知的单航班机票价格和舱位控制问题，从在线策略和竞争分析角度，设计了最优的价格和座位在线联合控制策略. 假设乘客到达符合价值 LBH 模式，除此之外不对未来需求进行任何假设，所给策略能够动态地决定机票出售价格，以及该价格下的机票出售数量，该联合策略所获收益与已知未来准确需求信息情况下最优收益的比值总在一定范围之内. 与已有研究相比，所给策略并不依赖 “需求可预测”以及 “风险中性”的假设，同时能够通过合理定价有效辨别出不同乘客的类型，从而放松了参考文献关于乘客类型可以辨析的假设.

**关键词:** 收益管理; 定价; 座位控制; 在线策略与竞争分析
**中图分类号:** F560; F275 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007 – 9807(2014)07 – 0010 – 12

## 0 引 言

收益管理起源于 20 世纪 70 年代的美国航空领域. 航空领域的收益管理是指航空公司通过运用预测和优化等科学手段，对价格和座位进行适时有效管理，使每一航段的每个座位以最好的价格出售，从而实现企业整体收益最大化的管理方法[1]. 收益管理在航空领域得到广泛应用，并取得了不错的效果，后来逐渐推广到酒店、医疗、旅游、铁路运输、汽车租赁、广播等服务行业[2]. 对于航空公司来说，价格制定和座位分配是增加公司收益的两个最为基本的控制手段. 根据文献[3]的描述，深圳航空于 2009 年 7 月推出暑假学生折扣票，而对普通乘客实行灵活定价，航空公司需要同时处理好学生票和普通票的定价. 由于学生订票信息的不可预知性，增加了舱位控制的难度，航空公司不能仅为了提升客座率而盲目接受学生订票，还要考虑折扣票是否增加了公司的整体收益. 这就要求航空公司既要制定合适的折扣程度，同时还要动态控制每个价格对应的舱位数量. 这突出了价格和舱位联合控制的必要性.

然而，从理论角度研究价格和座位联合控制的文献却比较少. 传统的收益管理方法一般假设价格集合固定，每一价格对应不同的舱位等级，航空公司只需要决定每个价格下的座位出售数量. 然而，航空票价差异不仅体现在舱位的不同上. 通常而言，航空机票的价格差异体现在两个层面. 首先，不同等级舱位的票价存在差异，例如头等舱和经济舱的票价差异，这也是多数文献的研究假设; 其次，相同等级舱位的票价也存在差异，例如同为经济舱的不同乘客预订时间不同，往往会导致不同的机票价格，即便是相邻座位也经常出现 “同座不同价”的情况. 很多学者，例如 Belobaba[4] 等研究指出合理的座位分配策略能够有效增加航空公司的收益. 但是，正如 Mc Gill 和 van Ryzin[5] 所指出的那样，不同类型的乘客需求关于价格的敏感性并不相同，这增加了需求函数的复杂程度，同时价格变化必定引起不同类型乘客的不同反应，因此有必要同时考虑价格和座位两个变量.

① 收稿日期: 2012 – 03 – 25; 修订日期: 2012 – 09 – 17.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目（71071123; 60921003）; 长江学者和创新团队发展计划资助项目（IRT1173）.
作者简介: 倪冠群（1982—），男，山东乳山人，博士后. Email: guanqunni@163.com

此外,航空领域的收益管理受到各种因素的影响,包括需求的随机性、票价的波动性、航班的多样性、乘客的选择性、以及是否允许机票预定、取消和超售等等[2]. 然而没有任何一个模型可以考虑所有因素,研究者往往通过简化模型或者启发式算法进行实际管理. 这些理论模型基本上基于以下两个假设[6-8]: 1) 需求是可以预测的; 2) 风险中性的. 随着收益管理在其他领域的应用,更多的特点需要考虑. 另外航空工业本身也是日新月异的,这些都要求现代收益管理引进或者开辟新的理论与方法,从而更好地指导实践.

基于这些原因,文章试图从在线策略与竞争分析的角度,建立价格和座位联合控制模型,并希望找到最优策略.

## 1　文献综述

尽管综合考虑价格和座位的研究很少,但是值得指出的是 Weatherford[9] 曾经提出价格和存量分配联合决策的收益管理模型,并指出由于需求受价格影响,综合模型中价格应成为决策变量. 但由于收益函数的表达式较复杂,该模型未能得出精确解析解. Walczak 和 Brumelle[10] 同时考虑价格和存量决策,建立了半马尔科夫决策模型,他们给出了最优控制策略. Feng 和 Xiao[11] 假设顾客都是同质的,给出了价格和存量同时决策的最优动态控制策略. 最近,Chew 等[12] 考虑乘客的特殊到达规律,例如,在 LBH 模式下建立了一般的离散动态定价模型,并设计了三种启发式算法,得到了较好的近似结果. 国内,李晓花和萧柏春[13] 运用随机过程和最大凹向包络原理建立了单航班价格和舱位统一决策模型,并给出了一个三阶段求解方法. 李豪等[3] 将顾客分为固定的和非固定的,针对固定顾客采取舱位控制策略,而针对非固定顾客则采取动态定价策略,取得了期望意义下的最优控制策略.

收益管理领域的定价策略和报童模型中的产品定价问题有密切联系. 大量文献关注了单周期定价问题[14-17]. 假设需求符合泊松分布,Li[18] 建立了连续定价模型. 同样针对连续定价问题,Gallego 和 van Ryzin[19] 研究了不允许补货情况下的易逝品定价模型,并在需求函数是指数函数的条件下取得最优解. 假设可以一次调价,Feng 和 Gallego[20,21] 研究了调价时机的选择模型,他们分别针对一般需求函数和需求符合马尔科夫过程的情形给出了最优解. Feng 和 Xiao[22,23] 进一步把"一次价格调整"扩展到"可多次调整"的一般问题,同时还考虑了参与者的风险偏好. 在连续定价模型下,Chatwin[24] 考虑了价格只能在一个有限价格集合中选取的问题,并分析了不同价格选取策略与期望收益之间的关系.

收益管理领域的座位分配也称"存量分配". 在该问题中,决策者面对一个乘客到达序列,每个乘客属于不同的价值类型,决策者需要在每个乘客订票时做出是否接受其订票请求的决策,从而实现收益最大化. 这一特殊的收益管理问题得到理论界的广泛研究. Littlewood[25] 最早研究了只有两类乘客且乘客到达按照期望价值先低后高(LBH)模式的情形. Belobaba[4] 扩展了 Littlewood[25] 的模型,为多类型乘客情形设计了启发式算法. 同样基于 LBH 模式,Brumelle 和 McGill[26] 研究了乘客需求独立假设下的动态售票策略,并给出一个随机动态规划算法. Lee 和 Hersh[27],以及 Lautenbacher 和 Stidham[28] 放松了关于 LBH 模式的假设,将多类乘客情形下的动态售票问题描述为马尔科夫决策过程(MDP),并给出了最优的嵌套策略(nested policies).

考虑需求信息的不确定性,van Ryzin 和 McGill[29] 较早地研究了多价格单程收益管理问题,他们基于已售机票情况动态更新预售票数量,制定了最优的嵌套策略. 与之类似,Huh 和 Rusmevichientong[30] 从不同角度给出了最优的嵌套策略. 这些研究都基于 LBH 假设,并且他们的目标都是风险中性条件下的最大化期望收益. 结合实际应用背景,更多的文献[31-33] 都不同程度地放松了需求信息完全以及风险中性的假设. Talluri 和 van Ryzin[34] 假设乘客的需求随着票价类型的变化而改变. 尽管他们的模型不需要假设每一乘客类型符合某种概率分布,但是仍然需要明确乘客的选择行为特点以及需求序列的到达特点. McGill 和 van Ryzin[35] 假设需求符合某种具有未知参数的分布的情形,并采用随机优化技术,在动态决策过程中估计未知参数. 尽管这两篇文献从

不同角度研究了信息不完全的收益管理问题，但是仍然是在期望意义下的优化问题.

Ball 和 Queyranne[36] 首先从在线策略和竞争分析的角度研究了单航班收益管理问题，他们设计了一类静态的嵌套保障策略( nested protection-level policies) ，该策略不依赖于需求预测以及风险中性的假设. 同样基于竞争分析，倪冠群和徐寅峰[37] 在 Ball 和 Queyranne[36] 的基础上，设计了一类动态的在线座位控制策略. Lan 等[38] 针对每类乘客需求设置了上下限，从而扩展了 Ball 和 Queyranne[36] 的研究，他们不仅以相对后悔值为目标，同时也考虑了最小化最大绝对后悔值的情况，都给出了最优策略.

由于在现实的决策过程中，航空公司必须同时考虑价格和座位数量两个因素，统一决策价格和座位分配成为增加收益的必要手段. 因此论文在已有研究的基础上，从在线策略和竞争分析的角度出发，建立价格和座位联合控制模型，试图给出最优的控制策略，实现单个航班的收益最大化. 研究结果与以往研究的主要不同在于以下三点:

1) 建立了价格和舱位数量联合控制模型，并从在线策略与竞争分析角度设计了最优的控制策略，所给策略能够动态地决定机票出售价格，以及该价格下的机票出售数量;

2) 与收益管理领域研究价格策略的文献相比，文章并不假设订票需求和价格之间存在某种函数关系，即放松了有关“需求—价格函数”的假设，同时也不设置有限的价格集合，只给出可行价格的上下界，该范围内的任意值都可能成为执行价格;

3) 与文献 Ball 和 Queyranne[36] 、Lan 等[38] 不同的是，文章综合考虑价格和座位两个决策变量. 而两篇文献都假设价格为外生变量，从一定角度讲，这些文献都假设乘客类型可以辨析，即每位乘客订票的时候，航空公司都知道该乘客的实际期望价值，因此不需要做出价格决策，只需要决定是否出售机票的决策. 而这种情况在现实中很难实现，这就要求航空公司通过其他手段来分辨乘客类型. 论文放松了“乘客类型可辨析”的假设，通过合理定价有效辨别出不同乘客的类型.

## 2 问题描述及基本假设

设某航班的座位总数为 $C$，潜在乘客对该航班机票的期望价值 $v \in [v_0, v_m]$. 乘客一个接一个地逐次到达，且乘客的订票规律满足低期望价值先到达的 LBH 模式[25]，除此之外，不对乘客需求进行任何预先假设，包括订票乘客的具体期望价值以及某期望价值下的潜在乘客数量. 在任意时刻，航空公司只知道之前的乘客订票情况，而对未来的订票情况不可预知，因此航空公司只能根据已售机票情况对价格进行适当调整，并控制每个价格下的机票销售数量. 考虑到策略的实际执行过程中，航空公司并不能无限次地调整价格，因此假设价格调整次数上限为 $k$. 那么航空公司要回答下述两个问题: 1) 第 $i$ 个价格应该为多少? 2) 何时将价格由第 $i-1$ 个调整到第 $i$ 个? 从而实现尽可能大的收益.

因为没有关于需求和价格之间关系的假设，也不预先假设乘客订票符合某种分布规律，所以决策者并不能从“期望意义”的角度出发设计最优策略. 因此，与文献[36－38]一样，文章也是基于在线策略和竞争分析，研究航空收益管理领域价格和座位联合控制问题. 在线策略放松了以往模型关于需求可预测和风险中性的假设. 该方法特别适合处理序列决策问题，尤其是面对需求信息是一个接一个逐次到达，决策者需要在每个需求到达时刻就做出决策，而决策一旦做出就不能改变的情形. 竞争分析是研究在线策略的有效方法[39]. 竞争分析假定存在一个离线敌手，该敌手可以预知完全信息，并且可以随意控制需求信息的输入. 在线决策者通过和离线敌手进行零和博弈，设计适当策略. 文献中通常用竞争比[39] 来描述在线策略的竞争性能. 下面解释竞争比的概念. 考虑一个收益最大化问题，定义 $\Omega_A$ 为在线策略 $A$ 所有可能面对的需求序列集合，如果对于 $\forall I \in \Omega_A$，定义 $R_A(I)$ 为在线策略 $A$ 在序列 $I$ 下的收益，同时针对该序列 $I$，定义 $R_{OPT}(I)$ 为信息完全条件下最优离线策略的收益，那么在线策略 $A$ 的竞争比定义为 $c_A = \inf_{I \in \Omega_A} \frac{R_A(I)}{R_{OPT}(I)}$. 如果一个策略的竞争比为 $c$，就说该策略是 $c$ - 竞争的. 如果存在某一策

略 $A^*$，其竞争比 $c_{A^*} = \sup c_A$，那么就称策略 $A^*$ 为该问题的最优在线策略，而称 $c_{A^*}$ 为该问题的竞争比上界[40]. 实质上，策略的竞争比衡量的是在线策略与最优离线策略的差距，竞争比越大越好，因此可以用来评价某在线策略的优劣. 而竞争比上界衡量的是所有在线策略可能达到的最大竞争比，因此除了用来比较某在线策略的优劣外，还可以用来刻画问题本身的特性.

本文一律用 $P(V,Q)$ 的形式表示一个特定在线策略，其中 $V = (v_1,\cdots,v_k)$ 表示价格向量，而 $Q = (q_0,\cdots,q_{k-1})$ 表示座位分配向量. 例如，对于一个座位数为180，机票最低定价（期望价值）为 $v_0 = 450$，最高定价为 $v_m = 800$ 的航班而言，当调价次数不超过2次时，如果制定策略 $P(V,Q)$，其中 $V = (600,750)$，以及 $Q = (100,50)$，就表示：航空公司以 $v_0 = 450$ 的价格开始销售机票，如果该价格下，售出机票量达到100，那么价格从 $v_0 = 450$ 提高到 $v_1 = 600$，否则不改变价格，如果以新的价格售出机票量达到50，那么就再次提价为 $v_2 = 750$，并以价格 $v_2 = 750$ 销售剩余的机票（30）. 在后文的"旺季假设"下，该例中所给策略的竞争比为0.56，而最优策略应为 $P^*(V^*,Q^*)$，其中 $V^* = (545,660)$，以及 $Q^* = (133,23)$，其最优竞争比为0.61.

需要补充说明的是，在第3部分，首先研究"旺季"条件下的策略，所谓旺季，就是如果机票价格为 $v_0$，那么至少有 $C$ 个乘客会购买该航班的机票. 简明起见，后文称该假设为"旺季假设". 在第4部分，放松了"旺季假设"，简要分析了一般情况下的策略设计问题.

## 3　"旺季假设"下的最优在线策略及竞争分析

### 3.1　最优策略的可能范围

针对旺季问题，首先从在线策略与竞争分析的角度，给出引理1和引理2（证明见附录），对包含最优策略的策略集合进行限定，从而明确策略制定的范围.

**引理1**　对于"旺季假设"下的机票价格和座位分配在线联合控制问题，初始价格必定等于机票最低期望价值 $v_0$，否则，任何确定性在线策略的竞争比都不会大于0.

**引理2**　对于"旺季假设"下的机票价格和座位分配在线联合控制问题，如果存在最优的在线策略 $P(V,Q)$，其中对于某些 $i < j$，有 $v_i > v_j$，则可以通过对价格向量 $V = (v_1,\cdots,v_k)$ 进行升序调整，获得新的价格向量 $V' = (v_1',\cdots,v_k')$，其中对于 $\forall i < j$，都有 $v_i' \leqslant v_j'$，那么所得新策略 $P'(V',Q)$ 仍然是最优的在线策略.

引理1说明最优在线策略的初始价格必定为 $v_0$，而引理2说明只需要考虑"价格递增"策略. 接下来的两节就在引理1和2所限定的策略集合内寻找最优的在线策略.

### 3.2　至多一次提价时的最优策略

此时 $k = 1$. 如果用 $P_1(V_1,Q_1)$ 表示 $k = 1$ 时的一般策略，那么首先给出一个最优的在线策略，描述如下，最优性如定理1所示.

策略 $P_1(V_1,Q_1)$，具有 $V_1 = (\sqrt{v_0 v_m})$，以及 $Q_1 = \left(\dfrac{C}{2 - \sqrt{v_0/v_m}}\right)$：初始价格为 $v_0$，当以该价格售出机票数量达到 $q_0 = \dfrac{C}{2 - \sqrt{v_0/v_m}}$ 时，则提价为 $v_1 = \sqrt{v_0 v_m}$，并以此价格出售剩余机票.

**定理1**　对于"旺季假设"下的机票价格和座位分配在线联合控制问题，当提价次数上限 $k = 1$ 时，在线策略 $P_1(V_1,Q_1)$，其中 $V_1 = (\sqrt{v_0 v_m})$，以及 $Q_1 = \left(\dfrac{C}{2 - \sqrt{v_0/v_m}}\right)$，具有最优的竞争比 $c = \dfrac{1}{2\sqrt{v_m/v_0} - 1}$.

要证明定理1，需要证明引理3，证明见附录.

**引理3**　令 $u_1 = \dfrac{ax + y(n - x)}{bn}$，以及 $u_2 = \dfrac{ax}{yn}$，其中 $0 \leqslant x \leqslant n$，以及 $0 < a < y \leqslant b$. 如果定义函数 $f = \min\{u_1,u_2\}$，那么有 $\left(x = \dfrac{n}{2 - \sqrt{a/b}}, y = \sqrt{ab}\right) = \arg\max f$.

**定理1证明**　考虑任意乘客订票序列 $I$，设 $R'$ 为在线联合控制策略的收益，设 $R^*$ 为对应离线最优收益.

对于任意在线策略 $P(V,Q)$，其中 $V = (v_1)$，

以及 $Q = (q_0)$，令 $q_1$ 为分配给期望价值为 $v_1$ 的机票数量. 由于“旺季假设”，对于任意的 $q_0 \leqslant C$，都能得到满足. 因此，在线决策者只可能面临两种情况：(1) $q_1 = C - q_0$，以及(2) $q_1 < C - q_0$.

**情况 1** $q_1 = C - q_0$. 此时，在线收益 $R' = v_0q_0 + v_1(C - q_0)$. 基于乘客到达符合 LBH 的假设，离线敌手给出一个“最坏序列”：先出现 $C$ 个期望价值为 $v_1$ 的需求，随后到来 $C$ 个期望价值为 $v_m$ 的需求，离线最优收益为 $R^* = v_mC$，而在线收益 $R'$ 并没有改变. 因此，得到情况 1 时，在线收益与对应离线最优收益的比值为

$$c_1 = \frac{R'}{R^*} = \frac{v_0q_0 + v_1(C - q_0)}{v_mC} \tag{1}$$

**情况 2** $q_1 < C - q_0$. 此时，可能出现两种子情况：(2.1) $q_1 = 0$，以及(2.2) $q_1 > 0$.

**子情况 2.1** $q_1 = 0$. 此时，在线收益为 $R' = v_0q_0$. 同时说明任何乘客的期望价值都小于 $v_1$. 离线敌手给出一个“最坏序列”：只到来 $C$ 个乘客，而这些乘客的期望价值都为$(v_1 - \varepsilon)$，其中 $\varepsilon \to 0^+$，离线最优收益为 $R^* = (v_1 - \varepsilon)C \to v_1C$. 因此，得到子情况 2.1 时，在线收益与对应离线最优收益的比值为

$$c_{21} = \frac{R'}{R^*} \to \frac{v_0q_0}{v_1C} \tag{2}$$

**子情况 2.2** $q_1 > 0$. 此时，在线收益为 $R' = v_0q_0 + v_1q_1$. 同时，由于 $q_1 < C - q_0$，离线敌手给出一个“最坏序列”：首先到来 $C$ 个期望价值为$(v_1 - \varepsilon)$ 的乘客，其中 $\varepsilon \to 0^+$，随后到来 $q_1$ 个期望价值为 $v_m$ 的乘客，离线最优收益为 $R^* = v_mq_1 + (v_1 - \varepsilon)(C - q_1) \to v_1C + (v_m - v_1)q_1$. 因此，得到子情况 2.1 时，在线收益与对应离线最优收益的比值为

$$c_{22} = \frac{R'}{R^*} \to \frac{v_0q_0 + v_1q_1}{v_1C + (v_m - v_1)q_1} \tag{3}$$

首先分析情况 2($q_1 < C - q_0$) 中两个比值 $c_{21}$ 和 $c_{22}$ 之间的关系. 如果各参数满足 $\frac{v_0q_0}{v_1C} \leqslant \frac{v_1q_1}{(v_m - v_1)q_1}$，那么 $c_{21} \leqslant c_{22}$. 否则，$\frac{v_0q_0}{v_1C} > \frac{v_1q_1}{(v_m - v_1)q_1}$，则得到关系 $c_{21} > c_{22}$. 显然地，比值 $c_{22} = \frac{v_0q_0 + v_1q_1}{v_1C + (v_m - v_1)q_1}$ 随着 $q_1$ 的增大而单调递减. 因此，当子情况 2.2 时，离线敌手会设计一个序列，使得 $q_1$ 尽量达到该情况下的上限值($C - q_0$)，从而使比值 $c_{22}$ 达到最小值. 如果离线敌手这样选择的话，则刚好使得 $c_{22} \to \frac{v_0q_0 + v_1(C - q_0)}{v_mC} = c_1$.

这说明，当提价次数不超过一次时，对于任意在线策略，只可能面临两类“最坏序列”，分别产生两个可能极差比值：$c_1 = \frac{v_0q_0 + v_1(C - q_0)}{v_mC}$ 或者 $c_2 = \frac{v_0q_0}{v_1C}$. 因此，作为在线决策者，只要权衡这两个比值，从而做出关于 $q_0$ 和 $v_1$ 的联合控制策略.

由于在线策略的目标是最大化竞争比，结合引理 3，定理 1 得证.

### 3.3 可多次提价时的最优策略

本节针对航空公司提价上限 $k > 1$ 的情况，给出价格和座位在线联合控制策略.

首先给出一个最优的在线策略，描述如下，最优性如定理 2 所示.

策略 $P_k(V_k, Q_k)$，具有 $V_k = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$，以及 $Q_k = (q_0, q_1, \cdots, q_{k-1})$：其中 $q_0 = \frac{C}{1 + k - k\left(\frac{v_0}{v_m}\right)^{1/(k+1)}}$，而对于 $1 \leqslant i \leqslant k - 1$，有 $q_i = \frac{C}{k + \left[1 - \left(\frac{v_0}{v_m}\right)^{1/(k+1)}\right]^{-1}}$ 时，以及对于 $1 \leqslant i \leqslant k$，有 $v_i = v_0^{(k+1-i)/(k+1)} v_m^{i/(k+1)}$.

**定理 2** 对于“旺季假设”下的机票价格和座位分配在线联合控制问题，当提价次数上限 $k > 1$ 时，在线策略 $P_k(V_k, Q_k)$，具有最优的竞争比 $c = \frac{1}{(1 + k)\left(\frac{v_m}{v_0}\right)^{1/(k+1)} - k}$.

要证明定理 2，需要证明引理 4，证明见附录.

**引理 4** 令 $u_1 = \frac{ax_0}{y_1n}$，$u_2 = \frac{ax_0 + y_1x_1}{y_2n}$，一般地，对于 $2 \leqslant i \leqslant k$，有 $u_i = \frac{ax_0 + \sum_{j=1}^{i-1} y_jx_j}{y_in}$ 以及 $u_{k+1} =$

$\dfrac{ax_0+\sum_{j=1}^{k-1}y_jx_j+y_k(n-\sum_{j=0}^{k-1}x_j)}{bn}$，其中 $0\leqslant x_i\leqslant n$，$\sum_{j=0}^{k-1}x_j\leqslant n$ 以及 $0<a<y_1<\cdots<y_k\leqslant b$. 如果定义函数 $f=\min\{u_1,\cdots,u_k,u_{k+1}\}$，那么有 $\left(x_0=\dfrac{n}{1+k-k\left(\frac{a}{b}\right)^{1/(k+1)}},x_i=\dfrac{n}{k+\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{1/(k+1)}\right]^{-1}},y_i=a^{(k+1-i)/(k+1)}b^{i/(k+1)}\right)=\arg\max f$.

**定理2证明**　考虑任意订票序列 $I$，设 $R'$ 为在线联合控制策略的收益，设 $R^*$ 为对应离线最优收益.

对于任意在线策略 $P_k(V_k,Q_k)$，其中 $V_k=(v_1,\cdots,v_k)$，以及 $Q_k=(q_0,\cdots,q_{k-1})$，令 $p_i$ 为实际出售给期望价值为 $v_i$ 的机票数量. 由于"旺季假设"，对于任意的 $q_0\leqslant C$，都能得到满足，即总有 $p_0=q_0$ 成立. 因此，以价格 $v_0$ 售出 $q_0$ 单位机票时，在线决策者只可能面临两种情况：1) $p_1<q_1$，以及2) $p_1=q_1$.

**情况1**　$p_1<q_1$. 此时，可能出现两个子情况：(1.1) $p_1=0$，以及(1.2) $0<p_1<q_1$.

**子情况1.1**　$p_1=0$. 此时，在线收益 $R'=v_0q_0$. 基于LBH的假设，表明所有乘客的期望价值均小于 $v_1$. 因此，离线敌手给出一个"最坏序列"：只到来 $C$ 个期望价值为 $(v_1-\varepsilon)$ 的需求，其中 $\varepsilon\to0^+$，离线最优收益为 $R^*=(v_1-\varepsilon)C\to v_1C$，而在线收益 $R'$ 并没有改变. 因此，得到子情况1.1时，在线收益与对应离线最优收益的比值为

$$c_{11}=\frac{R'}{R^*}=\frac{v_0q_0}{v_1C}\tag{4}$$

**子情况1.2**　$0<p_1<q_1$. 此时，在线收益为 $R'=v_0q_0+v_1p_1$. 由于 $p_1<q_1$，离线敌手给出一个"最坏序列"：先到来 $C$ 个乘客，而这些乘客的期望价值都为 $(v_1-\varepsilon)$，其中 $\varepsilon\to0^+$，随后到来 $p_1$ 个期望价值为 $v_m$ 的乘客，离线最优收益为 $R^*=v_mp_1+(v_1-\varepsilon)(C-p_1)\to v_1C+(v_m-v_1)p_1$. 因此，得到子情况1.2时，在线收益与对应离线最优收益的比值为

$$c_{12}=\frac{R'}{R^*}=\frac{v_0q_0+v_1p_1}{v_1C+(v_m-v_1)p_1}\tag{5}$$

考虑比值 $c_{12}$ 与 $p_1$ 的关系. 如果比值 $c_{12}$ 随着 $p_1$ 单调递增，那么离线敌手将会选择某一最坏序列，使得 $c_{12}\to\dfrac{v_0q_0}{v_1C}=c_{11}$. 否则比值 $c_{12}$ 随着 $p_1$ 单调递减，离线敌手将会选择某一序列，使得 $p_1$ 达到其上限值 $q_1$，从而使得比值 $c_{12}$ 尽可能小，而该情形下，从在线策略与竞争分析的角度而言，子情况1.2等价于下面的情况2.

**情况2**　$p_1=q_1$. 该情况下，在线决策者只可能面临两种情况：(2.1) $p_2<q_2$，以及(2.2) $p_2=q_2$.

**情况2.1**　$p_2<q_2$. 此时，可能出现两个子情况：(2.1.1) $p_2=0$，以及(2.1.2) $0<p_2<q_2$.

**子情况2.1.1**　$p_2=0$. 此时，在线收益 $R'=v_0q_0+v_1q_1$. 基于LBH假设，表明所有乘客的期望价值均小于 $v_2$. 因此，离线敌手给出一个"最坏序列"：只到来 $C$ 个期望价值为 $(v_2-\varepsilon)$ 的需求，其中 $\varepsilon\to0^+$，离线最优收益为 $R^*=(v_2-\varepsilon)C\to v_2C$，而在线收益 $R'$ 并没有改变. 因此，得到子情况2.1.1时，在线收益与对应离线最优收益的比值为

$$c_{211}=\frac{R'}{R^*}=\frac{v_0q_0+v_1q_1}{v_2C}\tag{6}$$

**子情况2.1.2**　$0<p_2<q_2$. 此时，在线收益为 $R'=v_0q_0+v_1q_1+v_2p_2$. 由于 $p_2<q_2$，离线敌手给出一个"最坏序列"：先到来 $C$ 个乘客，而这些乘客的期望价值都为 $(v_2-\varepsilon)$，其中 $\varepsilon\to0^+$，随后到来 $p_2$ 个期望价值为 $v_m$ 的乘客，离线最优收益为 $R^*=v_mp_2+(v_2-\varepsilon)(C-p_2)\to v_2C+(v_m-v_2)p_2$. 因此，得到子情况2.1.2时，在线收益与对应离线最优收益的比值为

$$c_{212}=\frac{R'}{R^*}=\frac{v_0q_0+v_1q_1+v_2p_2}{v_2C+(v_m-v_2)p_2}\tag{7}$$

与情况1.2的分析类似，基于 $c_{212}$ 和 $p_2$ 的关系可知，比值 $c_{212}$ 的值要么趋近于 $c_{211}$，要么等价于下面的情况2.2.

**情况2.2**　$p_2=q_2$. 该情况下，在线决策者只可能面临两种情况：(2.2.1) $p_3<q_3$，以及(2.2.2) $p_3=q_3$.

**情况2.2.1**　$p_3<q_3$. 此时，可能出现两个子情况：2.2.1.1) $p_3=0$；以及2.2.1.2) $0<p_3<q_3$.

类似于上面的分析，可以得到情况2.2.1.1

以及情况 2.2.1.2 的比值分别为 $c_{2211}=\frac{v_0q_0+v_1q_1+v_2p_2}{v_3C}$ 和 $c_{2212}=\frac{v_0q_0+v_1q_1+v_2q_2+v_3p_3}{v_3C+(v_m-v_3)p_3}$. 而且，比值 $c_{2212}$ 要么趋近于 $c_{2211}$，要么等价于情况 $p_3=q_3$. 进一步，可以分析出，在线决策者只会面对 $(k+1)$ 类"最坏情形"，分别对应一个收益比值的极小值. 其中，当 $1\leqslant i\leqslant k$ 时，极小比值为 $c_i=\frac{\sum_{j=0}^{i-1}v_jq_j}{v_iC}$，而对于 $\forall i\leqslant k-1$，都有 $p_i=q_i$，且 $p_k>0$，则出现第 $(k+1)$ 个极小值 $c_{k+1}=\frac{\sum_{j=0}^{k-1}v_jq_j+v_k(C-\sum_{j=0}^{k-1}q_j)}{v_mC}$.

由于在线策略的目标是最大化最小收益比值，结合引理 4，定理 2 得证.

从所给策略的竞争比可以发现，竞争比的值随着提价次数上限 $k$ 单调递增，而随着比值 $v_m/v_0$ 单调递减. 这给本文一定的现实指导. 当最大价格折扣 $v_0/v_m$ 固定时，决策者可以通过增加提价次数，从而获得较好的竞争性能.

### 3.4 数值算例

竞争分析通过竞争比清楚揭示了"最坏需求序列"时，在线策略与对应最优离线策略的差距. 从一定角度来讲，竞争比刻画了收益最大化问题本身可能达到的"收益下界"，而实际需求序列并不总是理论分析中的"最坏序列"，因此在实践中，在线策略往往都会得到更好的效果，即比竞争比大的收益比值. 为了清楚地理解这一点，给出具体的数值算例如下.

**算例 1** 沿用前面给出的算例，设某航班座位总数为 180，机票最低期望价格 $v_0=450$，最高价格 $v_m=800$. 假设订票乘客的价值到达序列为 (450，500，550，650，700，800)，满足 LBH 模式，表 1 给出了不同需求序列条件下的最优离线收益、在线收益以及在线收益与对应离线收益的比值. 其中，$R^*$ 表示最优离线收益，$R_i$ 和 $c_i$ 分别表示调价次数为 $i(=1,2,3)$ 的最优在线收益和此时的收益比值. 序列 $j$ 表示第 $j$ 个实际需求情况，每个序列代表一次事件，以序列 1 为例，表示依次到达 208 个期望价值为 450 的需求、180 个期望价值为 500 的需求、183 个期望价值为 650 的需求、200 个期望价值为 700 的需求、200 个期望价值为 800 的需求. 该事件发生时，最优离线策略为定价 800，出售全部座位，其收益为 144 000. 而提价上限为 1 时的最优在线策略为 $V=(600)$，以及 $Q=(144)$，即首先以 450 的价格出售 144 个座位，然后以 600 的价格出售剩余的 36 个座位，其收益为 86 400. 而当提价次数不超过 2 次时的最优在线策略为 $V=(545,660)$，以及 $Q=(133,23)$，其收益为 88 225. 而当提价次数不超过 3 次时的最优在线策略为 $V=(520,600,693)$，以及 $Q=(129,17,17)$，其收益为 88 871. 三个策略的收益与最优离线收益的比值分别为 0.59，0.61 以及 0.62. 根据前面的分析可以算出，此时的收益比值恰好等于各自策略的竞争比，也就是说序列 1 对于三个策略而言，都是"最坏序列". 其他序列的计算过程类似，都是根据前面的竞争分析而来.

表 1 算例 1 及相关结果

Table 1 Results of numerical example 1

| 序列 | 不同期望价值及对应需求量 | | | | | | 收益值 | | | | 收益比 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 450 | 500 | 550 | 650 | 700 | 800 | $R^*$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
| 1 | 208 | 180 | 183 | 198 | 200 | 200 | 144 000 | 86 400 | 88 225 | 88 871 | **0.59** | **0.61** | **0.62** |
| 2 | 400 | 300 | 200 | 0 | 5 | 7 | 118 300 | 72 000 | 80 305 | 74 090 | 0.61 | 0.68 | 0.63 |
| 3 | 18 | 12 | 5 | 100 | 50 | 60 | 128 500 | 86 400 | 88 225 | 88 871 | 0.67 | 0.69 | 0.69 |
| 4 | 71 | 64 | 124 | 99 | 52 | 15 | 120 450 | 86 400 | 88 225 | 88 871 | 0.72 | 0.73 | 0.74 |
| 5 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 109 500 | 86 400 | 88 225 | 88 871 | 0.79 | 0.80 | 0.81 |
| 6 | 88 | 25 | 29 | 17 | 30 | 33 | 107 600 | 86 400 | 88 225 | 88 871 | 0.80 | 0.82 | 0.83 |
| 7 | 368 | 0 | 25 | 2 | 6 | 1 | 85 750 | 70 200 | 77 005 | 72 290 | 0.82 | 0.90 | 0.84 |
| 8 | 60 | 74 | 24 | 9 | 5 | 15 | 95 400 | 82 200 | 85 585 | 85 406 | 0.86 | 0.90 | 0.90 |
| 9 | 200 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 81 000 | 64 800 | 59 850 | 58 050 | 0.80 | 0.74 | 0.72 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 200 | 144 000 | 86 400 | 88 225 | 88 871 | **0.59** | **0.61** | **0.62** |

算例的结果除了说明“在实践中，在线策略往往都会得到更好的效果”外，还有一些有价值的启示.

首先，最坏序列可能属于不同类型(例如序列 1 和序列 10 都是最坏序列)，这导致达到竞争比时的具体措施不同，尽管收益结果相同. 例如，当序列 1 发生时，是由于在线策略接受过多的低价值订票，排斥了后续的高价值订票，从而减少收益; 而当序列 10 发生时，是由于在线策略降低了高价值乘客的票价，从而减少收益. 区别对待不同情况，能够帮助实践管理者制定具有针对性的改进措施.

其次，在绝大多数情况下，可调价次数越多，越能改善在线策略的竞争性能，即能有效增大收益比值，但是当某些极端情况出现时，例如只有较低价值的订票时(序列 9)，反而是调价次数少的收益比值大，这是因为在线策略为了预留机票给后面可能到达的高价值乘客，调价次数越多，这种预留功能越强，然而当没有高价值乘客时，这种预留功能并不能发挥作用，反而调价次数少的(预留功能差的)能够获得较大的收益比值.

## 4　一般问题的竞争分析

针对没有“旺季假设”的一般情况，作者发现航空公司在线决策的竞争性能取决于乘客对机票期望价值的具体数值. 下面以至多一次调价($k \leqslant 1$)为例具体研究一般问题的在线策略与竞争分析.

首先根据引理 1 可知，一般问题的任何在线策略的初始价格也必定等于 $v_0$，否则在线策略的竞争比依然不会大于 0.

由于没有“旺季假设”，所以无论在线策略决定以价格 $v_0$ 出售多少机票数量，不妨设该数量为 $n$，都会出现一种“极端情形”: 订票的乘客的期望价值都等于 $v_m$，而且乘客数量 $q \leqslant n$. 那么在线策略的收益为 $R' = qv_0$，而离线最优收益为 $R^* = qv_m$，因此在线收益与离线最优收益的比值为 $v_0/v_m$，也就是最大折扣(最小价格与最大价格之比).

为了避免上述“极端情形”出现时导致较差的竞争性能，在线决策者倾向于制定“较小”的 $n$ 值，那么离线敌手就会设计另一个“极端情形”: 订票的乘客数至少为 $C$，而且乘客的期望价值都等于 $v_0$，很显然，此时的在线收益为 $R' = nv_0$，离线最优收益为 $R^* = Cv_0$，因此在线收益与离线最优收益的比值为 $n/C$.

考虑到上述两种极端情形，在线决策者需要衡量两种情形下的竞争比($v_0/v_m$ 和 $n/C$). 根据竞争分析的思路，令 $v_0/v_m = n/C$，得到一般问题的(可能)最优在线策略针对初始价格 $v_0$ 的座位分配数量 $n$ 应该等于 $Cv_0/v_m$.

结合第 3.2 节以及定理 1 的分析，在“旺季假设”下，最优在线策略的竞争比为 $c = \dfrac{1}{2\sqrt{v_m/v_0} - 1}$，由于 $v_m/v_0 > 1$，显然存在 $v_0/v_m < c = \dfrac{1}{2\sqrt{v_m/v_0} - 1}$ 的关系. 从另一个角度来看，无论 $n$ 等于多少，只要满足 $n \geqslant Cv_0/v_m$，任何在线策略的竞争比都不会小于 $v_0/v_m$. 这样的结果并不是在线策略的“理想情况”，因为无论如何选择策略，都不会使得竞争比大于 $v_0/v_m$，如此一来，航空公司只要任意选择策略，只要满足初始价格的订票数量 $n \geqslant Cv_0/v_m$，那么就会实现竞争比不小于 $v_0/v_m$. 一句话，从在线策略与竞争分析角度，航空公司只能控制初始定价以及初始订票数量，而且竞争比只能为 $v_0/v_m$，这并不能给实践者更好的指导，这正是作者重点研究“旺季问题”的原因，同时也说明“一般情形”下的在线策略与竞争分析还有待进一步的研究.

## 5　结束语

在线策略和竞争分析是应对不确定需求信息的有效理念和手段. 从该角度出发，文章主要分析了单航班机票价格和座位分配联合控制问题. 针对乘客数量足够多的“旺季问题”，所给策略能够动态地调整机票出售价格以及每一价格下的机票出售数量，该策略具有最优的竞争性能，而针对一般问题，在线策略的竞争性能并不理想，说明问题

本身的复杂性很大.

尽管"旺季假设"弱化了在线策略的一般适用性,但是"旺季假设"本身却在现实中比较常见,而且航空公司面对订票乘客较多的情况更加需要做出必要的价格和座位控制策略,而在"淡季",即不满足"旺季假设"的情况下,航空公司往往提供较大折扣的机票,吸引订票数量,这也是现实中航空公司的常用做法. 一方面,较大折扣能够吸引大量"经济型"乘客的订票,从而满足"旺季假设",那么本文所给策略就能有效处理; 另一方面,折扣程度的增加也会导致所给策略的竞争比减小,这就要求在线策略进一步考虑降价对订票量增加的效果,也就是考虑乘客对价格的敏感性,这些都是需要进一步研究的内容. 有时候在机票销售"淡季",需要订票的乘客往往属于"商务型"乘客,因此航空公司根据这一特点,也会减少机票折扣. 所以,究竟是通过机票打折来提高淡季客座率,还是只接受商务型订票来增加淡季收益,需要根据实际的市场需求才能做出合理的策略选择. 也就是说本文所建立的模型尽管符合一定的实际现象,但是仍然属于理论探讨,需要综合考虑的因素还有很多,希望能够起到抛砖引玉的作用.

## 参 考 文 献:


[1] 罗 利, 萧柏春. 收入管理理论的研究现状及发展前景[J]. 管理科学学报, 2004, 7(5): 75-83.
Luo Li, Xiao Baichun. Revenue management: State of the art and future prospects[J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(5): 75-83. (in Chinese)

[2] 官振中, 任建标. 不确定性需求下的易逝性高科技产品定价策略研究[J]. 系统工程学报, 2011, 26(1): 113-120.
Guan Zhenzhong, Ren Jianbiao. Optimal pricing policy research for perishable hi-tech products with uncertain demand[J]. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(1): 113-120. (in Chinese)

[3] 李 豪, 熊中楷, 屈卫东, 等. 基于乘客分类的航空客运作为控制和动态定价综合模型[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(6): 1062-1070.
Li Hao, Xiong Zhongkai, Qu Weidong, et al. Optimal seating control and dynamic pricing for airline tickets with passenger segment[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2011, 31(6): 1062-1070. (in Chinese)

[4] Belobaba P P. Application of a probabilistic decision model to airline seat inventory control[J]. Operations Research, 1989, 37(2): 183-197.

[5] McGill J I, van Ryzin G J. Revenue management: Research overview and prospects[J]. Transportation Science, 1999, 33(2): 233-256.

[6] Talluri K, vanRyzin G. The Theory and Practice of Revenue Management[M]. New York: Springer, 2005.

[7] Boyd E A, Bilegan I. Revenue management and e-commerce[J]. Management Science, 2003, 49(10): 1363-1386.

[8] MeGill J, van Ryzin G. Revenue management: Research overview and prospects[J]. Transportation Science, 1999, 33(2): 233-256.

[9] Weatherford L R. Using prices more realistically as decision variables in perishable asset revenue management problems[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 1997, 1(3): 277-304.

[10] Walczak D, Brumelle S. Semi-Markov information model for revenue management and dynamic pricig[J]. OR Spectrum, 2005, 29(1): 61-83.

[11] Feng Y, Xiao B. Integration of pricing and capacity allocation for perishable products[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 168(1): 17-34.

[12] Chew E P, Lee C, Liu R. Joint inventory allocation and pricing decisions for perishable products[J]. International Journal of Production Economics, 2009, 120(1): 139-150.

[13] 李晓花, 萧柏春. 航空公司收入管理价格与舱位控制的统一分析[J]. 管理科学学报, 2004, 7(6): 63-69.
Li Xiaohua, Xiao Baichun. Comprehensive analysis of pricing and seat inventory control in airline revenue management[J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(6): 63-69. (in Chinese)

[14] Whitin T M. Inventory control and price theory [J]. Management Science, 1955, 2(1): 61 – 68.

[15] Mills B L. Uncertainty and price theory [J]. Quality Journal of Economics, 1959, 73(1): 116 – 130.

[16] Teng J T, Ouyan L Y, Chen L H. A comparison between two pricing and lot-sizing models with partial backlogging and deteriorated items [J]. International Journal of Production Economics, 2007, 105(1): 190 – 203.

[17] Abad P L. Optimal price and order size under partial backordering incorporating shortage, backorder and lost sale costs [J]. International Journal of Production Economics, 2008, 114(1): 179 – 186.

[18] Li L. A stochastic theory of the firm [J]. Mathematics of Operations Research, 1988, 13(3): 447 – 466.

[19] Gallego G, van Ryzin G J. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons [J]. Management Science, 1994, 40(8): 999 – 1020.

[20] Feng Y, Gallego G. Optimal stopping times for end of season sales and optimal stopping times for promotional fares [J]. Management Science, 1995, 41(8): 1371 – 1391.

[21] Feng Y, Gallego G. Perishable asset revenue management with Markovian time dependent demand intensities [J]. Management Science, 2000, 46(7): 941 – 956.

[22] Feng Y, Xiao B. Maximizing revenues of perishable assets with a risk analysis [J]. Operations Research, 1999, 47(2): 337 – 341.

[23] Feng Y, Xiao B. Optimal policies of yield management with multiple predetermined prices [J]. Operations Research, 2000, 48(2): 332 – 343.

[24] Chatwin R E. Optimal dynamic pricing of perishable products with stochastic demand and a finite set of prices [J]. European Journal of Operational Research, 2000, 125(1): 149 – 174.

[25] Littlewood K. Forecasting and control of passenger bookings [C] // AGIFORS Sympos. Proc., Vol. 12. American Airlines, New York, 1972: 95 – 117.

[26] Brumelle S, McGill J I. Airline seat allocation with multiple nested fare classes [J]. Operations Research, 1993, 41(1): 127 – 137.

[27] Lee T C, Hersh M. A model for dynamic airline seat inventory control with multiple seat bookings [J]. Transportation Science, 1993, 27(3): 252 – 265.

[28] Lautenbacher C J, Stidham S J. The underlying Markov decision process in the single-leg airline yield management problem [J]. Transportation Science, 1999, 33(2): 136 – 146.

[29] van Ryzin G J, McGill J I. Revenue management without forecasting or optimization: An adaptive algorithm for determining airline seat protection levels [J]. Management Science, 2000, 46(6): 760 – 775.

[30] Huh T, Rusmevichientong P. An adaptive algorithm for multiple-fare-class capacity control problems [C]. Presented at the 6th Annual INFORMS Revenue Management Conference, June 5 – 6, 2006, Columbia University.

[31] Farias V, van Roy B. Dynamic pricing with a prior on market response [C]. The 6th Annual INFORMS Revenue Management Conference, Columbia University, 2006, June 5 – 6,

[32] Rusmevichientong P, Van Roy B, Glynn P W. A non-parametric approach to multiproduct pricing [J]. Operations Research, 2006, 54(1): 82 – 98.

[33] Lim A E B, Shanthikumar J G. Relative entropy, exponential utility, and robust dynamic pricing [J]. Operations Research, 2007, 55(2): 198 – 214.

[34] Talluri K, van Ryzin G J. Revenue management under a general discrete choice model of consumer behavior [J]. Management Science, 2004, 50(1): 15 – 33.

[35] McGill J I, van Ryzin G J. Revenue management: Research overview and prospects [J]. Transportation Science, 1999, 33(2): 233 – 256.

[36] Ball M O, Queyranne M. Toward robust revenue management: Competitive analysis of online booking [J]. Operations Research, 2009, 57(4): 950 – 963.

[37] 倪冠群，徐寅峰. 在线收益管理的动态售票策略及竞争分析 [J]. 系统工程理论与实践，2011，31(12): 2308

-2315.
Ni Guanqun, Xu Yinfeng. Competitive analysis of dynamic online booking policies in revenue management [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2011, 31(12): 2308-2315. (in Chinese)

[38] Lan Y, Gao H, Ball M O, et al. Revenue management with limited demand information [J]. Management Science, 2008, 54(9): 1594-1609.

[39] Borodin A, El-Yaniv R. Online Computation and Competitive Analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

[40] 倪冠群，徐寅峰，郑斐峰. 网上一口价在线拍卖的定价策略设计 [J]. 管理科学学报，2011，14(3): 1-9.
Ni Guanqun, Xu Yinfeng, Zheng Feifeng. Pricing strategy for online "buy it now" auction [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(3): 1-9. (in Chinese)

# Competitive analysis of revenue management: Online joint pricing and booking strategies

*NI Guan-qun*[1], *XU Yin-feng*[2], *XU Jiu-ping*[1]

1. Business School, Sichuan University, Chengdu 610065, China;
2. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

**Abstract:** Taking into consideration the unpredictable booking information, we consider the joint ticket pricing and booking problem in the airline industry from the perspective of online algorithms and competitive analysis. Assuming that the process of the passengers meets the low-before-high manner and that the expected value of passengers falls in a closed interval, we propose one optimal online joint policy for each case. Different from previous approaches in this field, the proposed online policies eliminate both the demand forecast and risk-neutrality assumption. The proposed policies can dynamically adjust price and allocate the tickets according to the set of bookings previously offered at any point in time. The ratio between the revenue of online joint strategy and the revenue of optimal offline strategy with perfect demand information is always in a certain range. Compared with the existing research, the joint online strategies can identify the types of passengers effectively which relaxes the assumption of knowing the type of passengers.

**Key words:** revenue management; pricing; seat inventory allocation; online strategy and competitive analysis

**附录:**

**引理 1 证明** 如果某一策略 $P$ 的初始价格不等于机票最低期望价值 $v_0$，不妨设初始价格为 $v_0'$. 由于所有乘客的期望价值都满足 $v \in [v_0, v_m]$，考虑下面的极端例子：乘客数量超过 $C$，且期望价值都等于 $v_0' - \varepsilon$，其中 $\varepsilon \to 0^+$. 因此该策略 $P$ 的收益为 0，而离线最优收益为 $C(v_0' - \varepsilon)$，根据竞争比[39] 的概念可知，初始价格不等于 $v_0$ 的任何策略的竞争比都不会大于 0.

引理 1 得证.

**引理 2 证明** 对于最优策略 $P(V, Q)$，不失一般性，假设 $v_i > v_{i+1}$，其中 $i \geq 1$. 令 $p_i (\leq C)$ 为接受的价格等于 $v_i$ 的乘客数(已售出机票数). 如果 $p_i > 0$，那么令 $v_{i+1} = v_i$，由于满足 LBH 的特点，调整后的收益并没有改变. 如果 $p_i = 0$，那么同样由于 LBH 的特点，说明市场上不存在期望价值等于或者高于 $v_i$ 的乘客. 因此，令 $v_i = v_{i+1}$，而调整后的收益仍然不变. 基于这些分析，可以证明引理 2 在一般情况下(对于 $\forall i < j$，有 $v_i > v_j$) 的正确性.

引理 2 得证.

**引理 3 证明** 根据 $u_1$ 和 $u_2$ 的定义式，直接可以得到 $u_1 = \dfrac{u_2 y(1 - y/a) + y}{b}$，以及 $\dfrac{\partial u_1}{\partial u_2} = \dfrac{y(1 - y/a)}{b} < 0$. 因此，$u_1$ 和

$u_2$ 是反向相关的,也就是说,$u_1 = u_2$ 是函数 $f = \min\{u_1, u_2\}$ 取得最大值的必要条件.

于是,令 $u_1 = u_2 = u$,得到 $x = \dfrac{y^2 n}{ab + y^2 - ay}$,$u = \dfrac{ay}{ab + y^2 - ay}$,以及 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \dfrac{a(ab - y^2)}{(ab + y^2 - ay)^2}$. 又因为 $0 < a < y \leqslant b$,所以当 $y = \sqrt{ab}$ 时,$u$ 取得最大值,等价于当 $x = \dfrac{n}{2 - \sqrt{a/b}}$,以及 $y = \sqrt{ab}$ 时,函数 $f = \min\{u_1, u_2\}$ 取得最大值,最大值为 $u = \dfrac{1}{2\sqrt{b/a} - 1}$.

引理 3 得证.

**引理 4 证明**　方便起见,令 $y_0 = a$,以及 $y_{k+1} = b$. 根据 $u_i$ 的定义式,直接可以得到 $x_0 = \dfrac{ny_1u_1}{y_0}$,而对于 $1 \leqslant i \leqslant k - 1$,有 $x_i = \dfrac{n(y_{i+1}u_{i+1} - y_iu_i)}{y_i}$,以及 $u_{k+1} = \dfrac{y_ku_k + y_k\left(1 - \dfrac{y_1u_1}{y_0} - \sum_{i=1}^{k-1}\dfrac{y_{i+1}u_{k+1} - y_iu_i}{y_i}\right)}{b}$,和 $\dfrac{\partial u_{k+1}}{\partial u_i} = \left(1 - \dfrac{y_i}{y_{i-1}}\right)\dfrac{y_k}{b} < 0$. 因此,$u_{k+1}$ 和任意 $u_i$ 都是反向相关的,也就是说,对于任意 $1 \leqslant i \leqslant k$,都有 $u_{k+1} = u_i$ 是函数 $f = \min\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}\}$ 取得最大值的必要条件.

于是,令 $u_{k+1} = u_i = u$,得到 $x_0 = \dfrac{ny_1u}{y_0}$,而对于 $1 \leqslant i \leqslant k - 1$,有 $x_i = \dfrac{n(y_{i+1} - y_i)u}{y_i}$,以及 $u = \dfrac{y_k}{b + y_k\left[\sum_{i=0}^{k-1}(y_{i+1}/y_i) - k\right]}$.

因此,对于 $1 \leqslant i \leqslant k - 1$,有 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y_i} = \dfrac{y_k^2\left(\dfrac{y_{i+1}}{y_i^2} - \dfrac{1}{y_{i-1}}\right)}{\left\{b + y_k\left[\sum_{i=0}^{k-1}(y_{i+1}/y_i) - k\right]\right\}^2}$,以及 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y_k} = \dfrac{b - \dfrac{y_k^2}{y_{k-1}}}{\left\{b + y_k\left[\sum_{i=0}^{k-1}(y_{i+1}/y_i) - k\right]\right\}^2}$.

又因为 $0 < a < y_1 < \cdots < y_k \leqslant b$,所以当 $y_i^2 = y_{i-1}y_{i+1}$ 时,$u$ 取得最大值,等价于当 $y_i = a^{(k+1-i)/(k+1)}b^{i/(k+1)}$ 时,$f = \min\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}\}$ 取得最大值为 $u = \dfrac{1}{(1+k)\left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/(k+1)} - k}$. 而此时,可以计算出 $x_0 = \dfrac{ny_1u}{a}$,而对于 $1 \leqslant i \leqslant k - 1$,有 $x_i = \left[1 - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/(k+1)}\right]x_0$. 进一步,令 $u_1 = u_{k+1}$,可以得到 $x_0 = \dfrac{n}{1 + k - k\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/(k+1)}}$,以及对于 $1 \leqslant i \leqslant k - 1$,有 $x_i = \dfrac{n}{k + \left[1 - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/(k+1)}\right]^{-1}}$.

引理 4 得证.