

带杠杆效应的无穷纯跳跃 Levy 过程期权定价^{①②}

吴恒煜^{1,2,3}, 朱福敏³, 温金明⁴

(1. 金融安全协同创新中心, 成都 611130; 2. 西南财经大学中国金融研究中心, 成都 611130;
3. 西南财经大学经济信息工程学院, 成都 611130; 4. 加拿大麦吉尔大学数学与统计学院, 蒙特利尔 H3A 2K6)

摘要: 考虑股票收益与波动的负相关关系, 建立了漂移率和波动率随条件变化的时变无穷纯跳跃 Levy 过程. 进一步根据局部鞅测度变换方法, 推导了条件 Levy 过程的风险中性定价模型, 并运用于恒生指数期权进行实证研究. 结果表明: 带杠杆效应的条件 Levy 过程联合刻画了资产价格的时变漂移率、条件方差、非高斯随机新息因子及非对称波动率 4 种状态, 具有广泛的适用性; 相比布朗运动、有限跳扩散及 Variance Gamma 过程, 无穷纯跳跃调和稳态模型更好地捕获了随机因子的尖峰、厚尾等特征; 考虑杠杆效应后, 极大改善了条件 Levy 过程的期权定价能力, 速降调和稳态过程期权综合定价能力依然更稳健.

关键词: 杠杆效应; 条件 Levy 过程; 无穷纯跳跃调和稳态; ARMA-NGARCH 模型; 期权定价
中图分类号: F830 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2014)08-0074-21

0 引言

期权定价理论的研究极为丰富, 但依然有许多问题需要解决. Black-Scholes (BS) 模型^[1] 假设股票价格的随机过程服从几何布朗运动并推导了期权定价模型, 而实证研究则表明该模型存在许多不足^[2-4], 例如股票价格的非连续性、动态波动率以及杠杆效应等等^[5]. 一方面, 资产价格存在跳跃已成为共识, 而引入 Levy 过程的跳跃测度则可建立不同强度的随机跳跃模型^[6-9], 包括有限跳跃的复合泊松过程及无穷跳跃的 VG 模型; 另一方面, 经济环境及市场交易使得短期收益率和波动率随条件而变化^[10-14], 同时, 根据杠杆效应, 股票下跌可能引起更大的市场波动, 因此, 为了刻画短期波动率与收益率的负相关性, 必须建立灵

活的波动率模型^[5-6, 10-11]. 基于上述背景, 本文拓展了以往高斯定价模型的研究框架, 在保留条件方差和期望的同时, 引入跳跃测度和杠杆效应, 建立了一般性的条件 Levy 过程, 并通过局部等价鞅测度推导了风险中性模型进行期权定价的实证研究. 首先, 借助时间序列分析方法构造了马尔科夫状态转换方程解决了非高斯模型的参数估计问题; 其次, 通过广义 ARMA-NGARCH 模型估计了噪音、波动率及期望的 3 维状态空间; 再次, 在比较了几种常见的 Levy 模型对收益率的拟合效果之后, 采用了偏度和峰度拟合最佳的非对称无穷纯跳跃的调和稳态 Levy 过程进行蒙特卡罗模拟方法的期权定价和误差分析; 最后, 根据短期、中期和长期期权的实证分析, 既比较了条件调和稳态过程与条件高斯模型的定价差异, 又指出了杠

① 收稿日期: 2011-11-29; 修订日期: 2012-09-06.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70861003; 70825005; 71171168); 国家社会科学基金重点资助项目(11AZD077); 教育部社会科学基金规划资助项目(13YJA790076; 13YJA790104); 国家留学基金资助项目(201206980001); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(JBK1407164; JBK120505; JBK130214; JBK131107); 中央高校科研业务费专项资金及四川省教育厅创新团队资助项目(JBK130401).

作者简介: 吴恒煜(1970—), 男, 广东雷州人, 教授、博士生导师. Email: wuhengyu@163.com

② 感谢多伦多大学金融系教授 Peter Christoffersen、纽约州立大学应用数学系教授 Svetlozar Rachev 为本文提供的宝贵建议和指导, 感谢 2012CICF 年会的衍生品分会所有专家的宝贵意见和评论.

杆效应对条件 Levy 过程期权定价的影响。

1 文献综述

期权定价研究的是未来选择权的价值。标准期权合约规定: 权利的买方通过支付一笔费用从而拥有在未来某一时刻点或某一时期内可以以约定价格买入或者卖出某项基础资产的权利, 且无需承担义务。支付的费用即为这项合约的价值, 称为期权的价值或权利溢价^③。期权价值受合约执行时的支付流影响。无套利价格是风险中性测度支付流的无风险贴现, 即 BS(Black-Scholes) 模型定价的基本原理^[1]。可见, 建立基础资产相应随机过程是期权定价的关键步骤。

股票价格随机分布的讨论可以追溯到 20 世纪初。Bachelier 首次采用布朗运动建立了股票价格模型, 假设股票价格服从高斯分布, 该模型就是现代期权定价模型的起源^④。Samuelson 根据价格非负特征, 建立了几何布朗运动, 假设资产价格的对数收益率服从布朗运动, 这成为 BS 期权定价理论模型的基础。随后, Black-Scholes 及 Merton 以几何布朗运动作为股票价格模型进行期权定价和套利理论研究, 从而建立了期权定价的经典框架。之后, 学界对资产价格模型的优化工作主要集中在随机动态波动率结构^[2-7] 和非正态性、非连续性特征(如刻画资产价格跳跃等) 两个角度^[8-9]。关于股票价格的跳跃, 许多学者在扩散的基础上加入了复合泊松过程, 建立了有限跳跃—扩散模型。Merton^[8] 和 Kou^[9] 通过有限跳跃的复合泊松过程进行了期权期货等衍生品定价模型的理论 and 实证研究, 发现这类带有限跳跃扩散模型能够捕捉到价格中的大跳跃, 并在期权的定价中表现优于 BS 模型。此外, 收益率中的时变动态波动率的研究则主要包括条件异方差模型和随机波动率过程^[10-14]。欧丽莎等^[15] 通过高频数据的已实现波动率检验了沪深股市的股指及主要个股的有限跳跃, 发现这些跳跃普遍存在于沪深股指和个股中, 表明跳跃在资本市场和衍生品定价中扮演重要角色。虽然有限跳跃—扩散模型成功地捕获了资产

价格的随机突变, 但是这种突变是有限的, 不能刻画资产价格中的小幅度、高频率的跳跃。针对市场中存在这种大量的小跳跃, Bandorff-Nielsen^[16], Madan 等^[17], Carr 和 Wu^[18] 采用无穷小跳跃 Levy 过程建立了无穷活动率模型, 研究结果表明, 无穷活动率模型不仅能够捕捉小跳跃, 甚至可以采用无穷的小跳取代连续扩散过程取得更好的定价效果, 且能够刻画任意时间内的无穷跳跃行为。例如 Barndorff-Nielsen^[16] 建立的 normal inverse Gaussian 模型, Madan 等^[17] 研究了 variance gamma 过程, 此外 Carr 和 Wu^[18] 推广拓展的 CGMY 随机跳跃模型等等, Mandelbrot^[19] 通过商品价格和利率研究, 对高斯分布的假设提出了质疑, 认为价格的随机分布具有帕累托稳态的尖峰、厚尾特征。Fama^[20-21] 在 Mandelbrot 的研究基础上进行深入分析, 并提出了非高斯分布的价格模型。事实上, 这些学者所提出的稳态分布是纯跳跃 Levy 过程, 属于无穷活动率过程。稳态分布作为正态分布条件的放宽, 用于拟合资产收益率分布, 能够捕获尖峰、厚尾和有偏现象。Xu 等^[22] 采用稳态模型对中国股票市场进行实证研究, 表明稳态模型对股指收益率的拟合方面相比高斯模型更具优越性。

近年来, Rachev 等^[23], Menn 和 Rachev^[24], Kim 等^[25], Rosinski^[26] 等发现, 金融资产收益率尾部分布常常介于正态分布和稳态分布之间, 这类“稳态”过程“过度”刻画了随机分布的厚尾程度。Kim 等^[27-28] 设立了相应的调和函数, 对稳态分布进行修正从而得到了优美的调和稳态模型 (tempered stable)。其中 Variance Gamma 和 CGMY (Car, Geman, Madan, and Yor) 属于调和稳态过程的特殊情形。如今学者对 TS 模型有许多扩展研究, 随机过程更加灵活和多样化, 他们统称为广义调和稳态过程 (GTS), 包括 Modified TS, Rapidly decreasing TS, Kim-Rachev TS, Normal TS 等, 详细的阐述参见 Kim 等^[28]。CGMY 过程被称为除 BS 模型之外革命性的跨越, 事实上它是调和稳态中最为基础的模型之一。对此, Carr 和 Wu^[14, 18, 29] 多次详细阐述了时变 Levy 过程模型定价的方法。

③ 香港交易所网站—衍生品说明书 <http://www.hkex.com.hk/eng/prod/drprod/DMPProducts.htm>。

④ Samuelson(1965), Management Review 6(2): 41-49。

除了价格的跳跃,资产的预期收益率和波动率也伴随着市场的变化而变化.在有效的资本市场中,股票的价格包含了投资者对公司远期价值的预期信息.股票的预期价格与资产价值的杠杆率因受到公司的财务经营结构、宏观经济环境以及市场波动这些条件的影响,而随着经济周期的变化、资本市场的活跃程度以及宏观政策的变化而更新^[29].由于短期波动的集聚性和记忆性,以及收益率的自回归和移动平均特点,Nelson^[11], Hansen 和 Lunde^[12]描述了金融资产收益率时间序列分析的研究框架,通过 ARMA-GARCH 模型估计并检验收益率的滞后和异方差效应.值得注意的是,他们建立的模型可以转化为离散时间的条件布朗运动模型^[30].Duan^[4]在高斯噪声假设下进行局部风险中性鞅的测度变换,研究了 GARCH 模型的期权定价存在的基本问题,并用以解释期权的“隐含波动率微笑”之谜. ARMA-GARCH 模型的噪声是独立平稳序列,而以往的理论模型则假设它服从零均值、单位标准差的高斯“白噪声”.在实证研究中,这样的白噪声仍然存在厚尾、有偏的非高斯、不连续性等特征^[5]. Kim 等^[25 27-28]构建的无限可分 Levy 过程下的 GARCH 模型,既能融合金融资产回报的厚尾、尖峰和有偏性质,又能捕获波动率集聚现象,同时也是本文模型的特殊情形. Kim 等^[27]构建了调和稳态分布下的 ARMA-GARCH 收益率时间序列模型,论证了这种模型对金融市场收益率有着良好的拟合能力.然而,他们没有讨论 ARMA-GARCH 模型经济学原理,缺乏时间序列分析的相关论证,更重要的是,由于没有考虑杠杆效应的条件 Levy 模型的期权定价,模型缺乏较好的稳健性和准确性,特别是波动率自身存在的非对称性对期权定价结果有重要的影响^[5].

本文所做工作如下:首先,在 Kim 等^[27]的调和稳态模型的基础上,将股票价格模型推广到时变波动率和漂移率的条件 Levy 过程,同时加入 Christoffersen 等^[5]期权定价模型中考虑的波动率与收益率负相关的杠杆效应,推导了条件 Levy 过程局部等价鞅测度下的风险中性模型;其次,引入时间序列分析框架研究条件 Levy 过程,构建时变漂移率、波动率和随机噪声 3 维状态空间方程,通过两步估计方法解决了这类离散非高斯模型的计

量与检验问题;最后,采用马尔科夫链蒙特卡罗模拟方法进行了期权定价的实证研究,在实证中比较了两类调和稳态 Levy 过程和高斯模型的期权定价结果,对比了引入杠杆效应的定价差异,讨论了不同期限的期权定价的稳健性,提出了进一步的研究思路.

2 理论模型

建立条件 Levy 过程之前,先简单介绍 Levy 过程的基本框架,在此基础上引入调和稳态模型,并分析调和稳态的 Levy 测度、特征函数及分布特点.

2.1 Levy 过程

在连续布朗运动假设下,资产价格对数收益率包括两部分,一是确定性的线性漂移率 $(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt$,二是服从正态分布的随机扩散增量 σdW_t .引入跳跃测度 $\nu(dx)$ 表示跳跃幅度 dx 在单位时间内的到达率(跳跃次数),从而得到一个 Levy 过程,并定义为 X_t ,用以表示不连续的跳跃总和. $\mu, \sigma, \nu(dx)$ 称为 Levy 测度的特征 3 项,分别表示漂移率、扩散率和跳跃率.由此可见,布朗运动是 Levy 过程的特殊情形.在特征 3 项给定的条件下, X_t 的特征函数形式是确定的.根据 Levy-Khinechine 公式,特征函数与特征 3 项的关系为

$$\begin{aligned} \phi_{X_t}(u) &= E[\exp(iuX_t)] = \exp(-t\psi(u)) \\ &= \exp\left\{-t\left[t - iu\mu + \frac{\sigma^2 u^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iux) - 1 - iux_{|x|\leq 1}) \nu(dx)\right]\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

假设 Levy 过程的特征 3 项服从条件变化,即 $\mu_t, \sigma_t, \nu_t(dx)$,且 $Cov[\varepsilon_t, (\mu_t, \sigma_t) | F_{t-1}] = 0$,那么意味着 t 时刻出现的随机新息与 $t-1$ 时刻的预期收益率和波动率不相关(投资预期与未来的随机因子相互独立),那么条件 Levy 过程 $X(t)$ 的条件特征函数为

$$\begin{aligned} \phi_{X(t)}(u) | F_{t-1} &= E\{\exp[iuX(t)] | F_{t-1}\} \\ &= \exp\left(t\left\{iu\mu_t - \frac{\sigma_t^2 u^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iux) - 1 - iux_{|x|\leq 1}) \nu_t(dx)\right\}\right) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\exp(iux) - 1 - iux_{|x| \leq 1}] v_s(dx) \} \quad (2)$$

现引入无穷纯跳跃的调和稳态 Levy 过程, 其连续扩散率为 0. 依据稳态过程的定义, 从某一随机变量 X 中抽取独立同分布样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 若存在正实数常数 C_n, D_n , 使得随机变量满足以下条件, 则称变量 X 服从稳态分布

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n \quad (3)$$

其中 $\stackrel{d}{=}$ 表示分布等价, 当常数 $C_n = n^{1/\alpha}$ 时, X 即为 α 稳态分布. 特别地, 当 $\alpha = 2$ 时, X 服从正态分布. 若 $0 < \alpha < 2$ 时, 称之为非高斯 α 稳态分布, 它的密度函数没有具体的封闭形式, 不妨从 Levy 过程角度了解随机过程的跳跃特征. α 稳态过程的纯跳跃 Levy 测度为

$$v_s(dx) = (C_+ / x^{1+\alpha} 1_{x>0} + C_- / |x|^{1+\alpha} 1_{x<0}) dx \quad (4)$$

dx 表示跳跃的幅度, C_+, C_- 分别控制正跳和负跳强度, 对跳跃测度积分表示所有跳跃到达率总和.

因 $\int_{\mathbb{R}} v(dx) = \infty$, 稳态过程是无穷活动率过程.

根据式 (1), α 稳态特征函数为

$$\phi(u; \alpha, \sigma, \beta, \mu) = \begin{cases} \exp\{iu\mu - |\sigma u|^\alpha (1 - i\beta(\text{sign}(u)))\} \times \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1 \\ \exp\{iu\mu - \sigma |u| [1 + i\beta(\text{sign}(u)) \ln(|u|) \frac{\pi}{2}]\}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\text{sign}(u)$ 是符号函数, 有

$$\begin{cases} u > 0, \text{sign}(u) = 1 \\ u = 0, \text{sign}(u) = 0 \\ u < 0, \text{sign}(u) = -1 \end{cases} \quad (6)$$

参数满足

$\alpha \in (0, 2), \sigma \in (0, +\infty), \beta \in [-1, 1], \mu \in \mathbb{R}$ 对应地体现了稳态分布的厚尾指数、形状扁平度、偏度及位置. 此外, 尾部的极限概率有以下关系

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha P(X > x) = C_+ \frac{1 + \beta}{2} \sigma^\alpha \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha P(X < -x) = C_- \frac{1 - \beta}{2} \sigma^\alpha \end{cases} \quad (7)$$

上式表明, 稳态分布的尾部极限概率与正态分布

的指数趋势不同, 且有

$$C_\alpha = \begin{cases} \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (8)$$

通常, α 稳态过程比布朗运动更能够描绘金融市场随机过程的非连续性和非高斯特征, 但由于尾部概率下降速度有限, 稳态过程呈现过度的厚尾. 而调和稳态是一类平滑截尾的稳态分布, 它是由 α 稳态的 Levy 测度乘以不同的调和函数获得, 使得跳跃测度得到控制, 用以刻画处于高斯及稳态之间的尾部分布. 在下一小节将具体介绍调和稳态模型, 这里只给出其他两类常见 Levy 过程: 有限跳跃—扩散模型 (MJ) 及无穷活动率的差异伽马过程 (VG) 的特征函数, 同时将给出这些模型的对比.

$$\begin{aligned} \phi_{MJ}(u; \mu, \sigma, \lambda, \mu_J, \sigma_J) &\equiv E[\exp(iuX)] \\ &= \exp[-t\psi_{X_t}(u)] \\ &= \exp\left[\left(iu\mu - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right)t + \lambda \left(\exp\left(iu\mu_J - \frac{u^2\sigma_J^2}{2}\right) - 1\right)t\right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \phi_{VG}(u; C, G, M) &\equiv E[\exp(iuX)] \\ &= \exp\{t\text{Cln}(GM) - t\text{Cln}(GM + iMu - iGu + u^2)\} \end{aligned} \quad (10)$$

几何布朗运动 (BS)、跳跃扩散模型 (MJ)、差异伽马过程 (VG) 属于 Levy 过程 3 类不同模型, 分别表示无跳跃、有限跳跃及无穷跳跃过程. 下面介绍无穷非对称的纯跳跃模型——调和稳态过程 (TS).

2.2 调和稳态过程

调和稳态由 α 稳态过程的 Levy 测度乘以不同的调和函数而来. 若 $v_s(dx)$ 表示 α 稳态的跳跃测度, $q(x)$ 表示调和函数, 那么调和稳态的 Levy 测度表达式

$$v_{TS}(dx) = v_s(dx) q(x) \quad (11)$$

调和稳态在不同的调和函数下得到不同的 Levy 测度, 包括经典调和稳态 (CTS)、修正调和稳态 (MTS)、正态调和稳态 (NTS)、速降调和稳态 (RDTS) 及 Kim-Rachev 调和稳态 (KRTS) 过程. 因篇幅有限, 文中选择 CTS 和 RDTS 两类, 它们是

基础的指数调和方式,便于分析跳跃集中程度.它们对应的 Levy 测度分别为

$$v_{CTS}(dx) = (C_+ \exp(-\lambda_+ x) / x^{1+\alpha} 1_{x>0} + C_- \exp(\lambda_- x) / |x|^{1+\alpha} 1_{x<0}) dx \tag{12}$$

$$v_{RDTS}(dx) = (C_+ \exp(-\lambda_+ x^2/2) / x^{1+\alpha} 1_{x>0} + C_- \exp(-\lambda_- x^2/2) / |x|^{1+\alpha} 1_{x<0}) dx \tag{13}$$

$C_+, C_-, \lambda_+, \lambda_-, \alpha$ 为调和稳态过程的参数. RDTS 随着 x 的绝对值增加, 跳跃发生的频度降低得比 CTS 快, 即速降. 如果 RDTS 对噪音拟合得更好, 说明跳跃存在速降现象, 大部分跳跃集中在均值周边.

调和稳态同样属于 Levy 过程, 结合了 α 稳态和正态趋势, 它的尾部分布介于正态分布和 α 稳态分布之间, 在金融市场和统计学中拥有优良的建模效果. 对于稳态分布来说, 调和稳态分布 (TS) 可以存在有限的方差, 有着 α 稳态的局部特点.

另外, 模型参数需满足 $C_+, C_-, \lambda_+, \lambda_- > 0$ 且尾部参数 $\alpha \in (0, 2]$. $\lambda_+ \neq \lambda_-$ 表示上涨与下跌有着不同的跳跃程度. λ_+, λ_- 还反映密度曲线两边的陡峭程度 (也称递减程度), λ 越小密度曲线下降越平缓, 因此可以捕获有偏性. 而 C_+, C_- 决定密度曲线的尖锐程度, C 越小顶部越尖, 能刻画尖峰特征.

为了估计调和稳态分布的离散密度, 本文对特征函数进行了快速逆傅里叶变换. 事实上, 采用 Levy 过程的特征函数的矩估计, 相比傅里叶变换更加简便快捷 (但精确度不高), 在此, 仅通过矩估计得到参数估计的初始值, 然后进行傅里叶变换的数值极大似然估计. CTS 及 RDTS 的特征函数分别为

$$\phi_{CTS}(u) = \exp\{ \Gamma(-\alpha) C_+ [(\lambda_+ - iu)^\alpha - \lambda_+^\alpha] + \Gamma(-\alpha) C_- [(\lambda_- + iu)^\alpha - \lambda_-^\alpha] \} \tag{14}$$

$$\phi_{RDTS}(u) = \exp\{ C_+ G(iu; \alpha, \lambda_+) + C_- G(-iu; \alpha, \lambda_-) \} \tag{15}$$

其中

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt,$$

$$G(x; \alpha, \lambda) = 2^{\frac{\alpha+2}{2}} \lambda^\alpha \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \times \left[M\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2\lambda^2}\right) - 1 \right] + 2^{\frac{\alpha+1}{2}} \lambda^{\alpha-1} x \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \times \left[M\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2\lambda^2}\right) - 1 \right]$$

式中 $M(\cdot)$ 为合流超几何函数 (confluent hypergeometric function). 通过以上特征函数表达式可简单计算随机分布的各阶矩条件.

通常, 调和稳态 Levy 过程随机数生成的方法有时变布朗运动法、有限复合泊松法及基本序列表达式^[25]. 根据 Rosinski^[26] 的研究结论, 基本序列表达式比较容易操作^⑤. 此时随机数序列表达式为

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^\infty \left[\left(\frac{\alpha \gamma_j}{T \parallel \sigma \parallel} \right)^{-1/\alpha} \wedge e_j u_j^{1/\alpha} |v_j|^{-1} \right] \times \frac{|v_j|}{v_j} - \psi(-i) \tag{16}$$

$$e_j \sim \exp(1), \gamma_j \sim \sum_{i=1}^j e_i, \mu_j \sim U(0, 1), v_j \sim F(-\lambda_-, \lambda_+, P, 1-P)$$

式中 \exp, U, F 分别为指数分布、均匀分布及二项分布; $\psi(-i)$ 是特征函数表达的均值, 用以修正随机变量的线性趋势.

表 1 列出了这种模拟方法得到的随机数的统计特征. 5 种 Levy 白噪声分布进行模拟结果表明, 调和稳态及速降调和稳态的峰值和偏值最为准确.

表 1 随机数模拟的统计结果

Table 1 Statistic results of simulation

	均值	方差	偏度	峰度
BS	-0.00	1.00	0.00	3.01
MJ	-0.00	1.00	-0.02	3.42
VG	-0.00	0.99	-0.21	4.40
CTS	-0.02	1.01	-0.24	4.50
RDTS	-0.01	0.99	-0.25	5.04

注: BS, MJ, VG, CTS, RDTS 模型的噪声分别为高斯分布、复合泊松分布、差异伽马分布、调和稳态分布以及速降调和稳态分布, 其中, 理论分布的统计性质 (基准分布) 为: 均值 = 0, 方差 = 1, 偏度 = -0.25, 峰度 = 5. 模拟随机数 $N = 10\ 000$.

⑤ 限于篇幅, 详细内容可参考文献 [25 - 27], 也可参见作者 2011 中国管理学年会的相关会议论文.

2.3 条件 Levy 过程及风险中性模型

考虑到模型的信息中存在跳跃因子, 并且期望和方差是时变的, 为了建立漂移率和波动率随条件变化的 Levy 过程, 使模型既能动态捕获短期收益率和波动率, 又能包含非高斯随机因子, 并体现杠杆效应, 在历史滤波的基础上构建 ARMA-NGARCH 模型. 假设收益率的期望和波动率随条件变化, 那么模型就可以进行时间序列分析, 从而研究对数收益率的条件期望和条件波动率. 在已知价格序列 S_t 的基础上, 离散形式的条件 Levy 模型如下

$$\begin{cases} y_t = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = c + \sum_{i=1}^m a_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^n b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \\ h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\varepsilon_{t-i} - \gamma h_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^2 \\ \varepsilon_t = z_t h_t, E[\varepsilon_t | y_{t-1}] = 0, E[\varepsilon_t^2 | y_{t-1}] = h_t^2 \end{cases} \quad (17)$$

式中 y_t 为对数收益率时间序列, 是观测变量; m, n, p, q 表示自回归移动平均及条件异方差的滞后时阶 (即记忆期); $a_i, b_i, c, \alpha_0, \alpha_i, \beta_i$ 为相应的影响系数; h_t 为条件波动率, 此时服从自回归条件异方差过程; γ 称为杠杆系数, 当 $\gamma > 0$ 表明负的跳跃引起更大的波动率水平. 如果假设随机扰动项 ε_t

服从 Levy 分布, 那么模型 (17) 即为广义条件 Levy 过程. 在时间序列分析的基础上, ε_t 的漂移率为零, 且可以拆分为扩散和跳跃项, 其中跳跃的半鞅性质需通过线性均值进行修正. 当模型的扰动项中不存在跳跃时, 为 Engle-Ng 的 N-GARCH 模型^[34]. 另外 $\alpha_0 > 0, \sum (1 + \gamma^2) \alpha_i + \sum \beta_i \leq 1$, 使得方差保持平稳性. 通过传统的条件最小二乘估计方法即可建立包括条件均值、条件波动率和新息因子在内的 3 维状态空间, 通过时间序列分析可以估计并检验相应参数. 对于白噪声 (广义) 序列 z_t , 有 $E(z_t) = 0, E(z_t^2) = 1$. 如果假设白噪声服从标准正态分布, 这个模型是 N-GARCH 模型; 如果假设杠杆系数为零, 即得到 Duan 的 GARCH 模型, 如果在非参数的研究框架下, 即为历史滤波 GARCH 模型. 由此可见, 模型 (17) 具有非常好的灵活性, 是离散条件模型的一般化.

回到传统研究范式, 时间序列分析可以检验收益率的自回归与异方差效应, 同时估计 ARMA-GARCH 模型系数. 高斯模型假设残差服从正态分布, 本文分析了上证综指、深证成指、沪深 300 及标普 500 指数的收益率序列, 估计了 ARMA-GARCH 及杠杆效应参数, 并且列出了模型噪声的 4 项统计性质. 结果列于表 2.

表 2 ARMA-GARCH 模型参数估计结果

Table 2 Parameter estimation results of the ARMA-GARCH models (t-value)

参数 / 市场	SZZZ	SZCZ	H&S300	S&P500
a	-0.782 7(-5.688 5)	-0.7365(-5.7398)	0.9854(55.3270)	0.0368(5.1909)
b	0.811 4(6.258 0)	0.7766(6.4720)	-0.9782(-44.2149)	-0.0331(4.6684)
c	-0.000 1(-0.198 0)	-0.0003(-0.7804)	4.5e-6(0.6265)	0.0003(3.1192)
Alpha 0	2.04 × 10 ⁻⁶ (7.724 5)	3.5 × 10 ⁻⁶ (6.321 9)	2.8 × 10 ⁻⁶ (2.964 5)	2.4 × 10 ⁻⁶ (18.927)
Alpha 1	0.069 4(9.057 2)	0.064 4(10.128)	0.045 6(5.621 5)	0.009 5(2.006)
Beta	0.888(126.56)	0.903 0(140.40)	0.945 2(137.59)	0.906 2(254.45)
Delta	0.052 9(5.723 9)	0.040 8(4.759 1)	0.005 6(0.602 3)	0.127 8(22.967)
噪声均值	0.004 1	0.009 6	-0.000 4	-0.004 6
噪声标准差	1.001 5	1.000 3	0.999 3	0.999 8
噪声偏度	-0.171 8	-0.143 9	-0.394 1	-0.397 5
噪声峰度	5.330 0	4.933 2	4.759 5	8.632 7
JBtest(H/P)	(1 0.001)	(1 0.001)	(1 0.001)	(1 0.000)

注: SZZZ, SZCZ, H&S300, S&P500 表示上证综指、深证成指、沪深 300 及标普 500, a, b, c, alpha0, alpha1, beta, delta 对应 ARMA-GARCH 参数, delta 是杠杆效应参数, 各参数后的括弧内为 t 值. 表中列出了噪声的均值、方差、偏度及峰度, JBtest 为正态分布的 Jacob 检验, 原假设 $H = 0$ 服从正态分布, P 值为接受原假设的概率, 显著性水平取 5%.

表2的结果表明,以上4类股票指数普遍存在非高斯噪声特征,这些噪声都存在尖峰左偏特点,杠杆效应的系数也存在显著性(仅沪深300微弱,样本最少)。由此可见,建立高斯GARCH模型是不合适的。在假设价格为几何布朗运动、莫顿跳扩散模型、差异伽马和调和稳态过程的基础上,图1a,1b,1c,1d分别绘制了上证指数、深证指数、沪深300指数及标准普尔500指数的噪声对应的几种核密度曲线,这些是Levy过程的几种常见分布,分别为标准正态分布(normal,下称CBS)、跳

扩散分布(CMJ)、标准 variance gamma 分布(CVG)以及标准调和稳态分布(CTS),对应4类条件Levy过程。图1表明调和稳态分布相比其他3类更具有优越性。结合表1的模拟结果,具体表现在: CBS无法刻画左偏和尖峰,CMJ尖峰不足, CVG偏度不够,而CTS可以准确地捕捉厚尾、尖峰和左偏。表1及图1各分图表明,Levy过程在收益率拟合上具有优越性。本文比较了国内外股指收益率的拟合,都有相同的结论,表明其普适性。在收益率拟合上,调和稳态具有最佳效果。

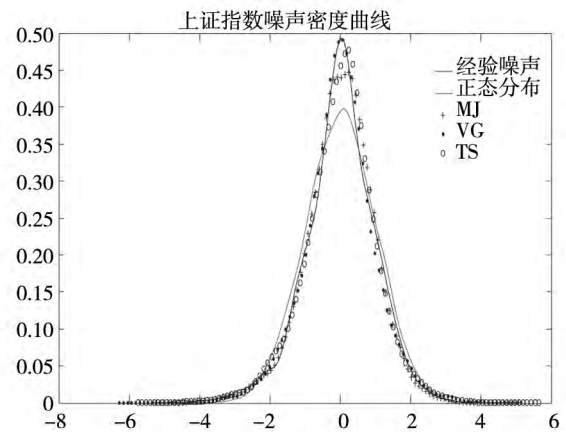
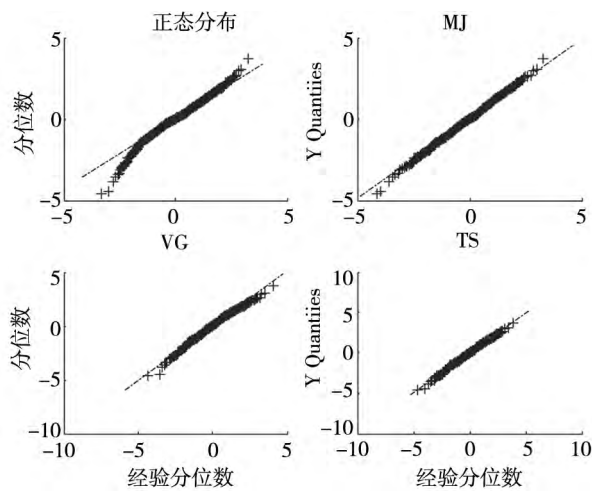


图1a 上证综指数数据的噪音分布QQ图和密度曲线

Fig. 1a QQ plot and PDF curves of noise from SZZZ

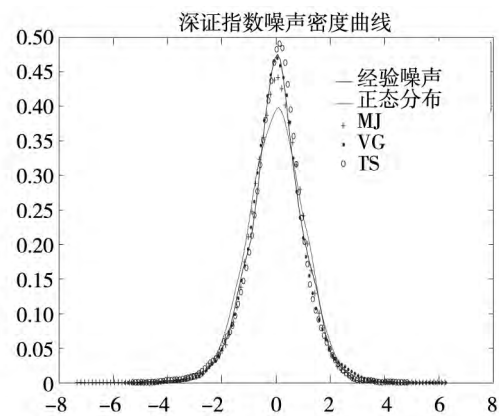
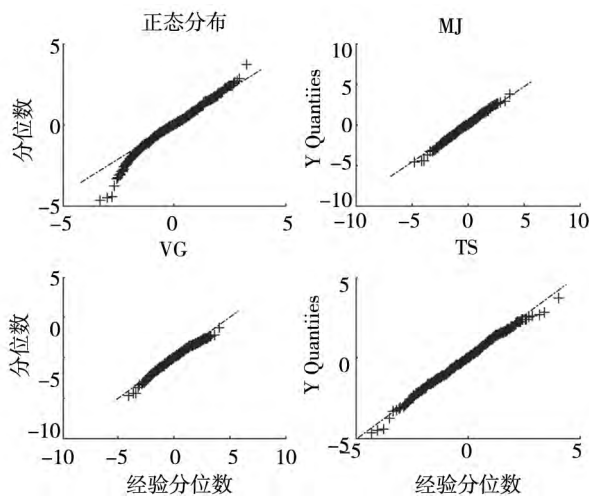


图1b 深证成指数据的噪音分布QQ图和密度曲线

Fig. 1b QQ plot and PDF curve of noise from SZCZ

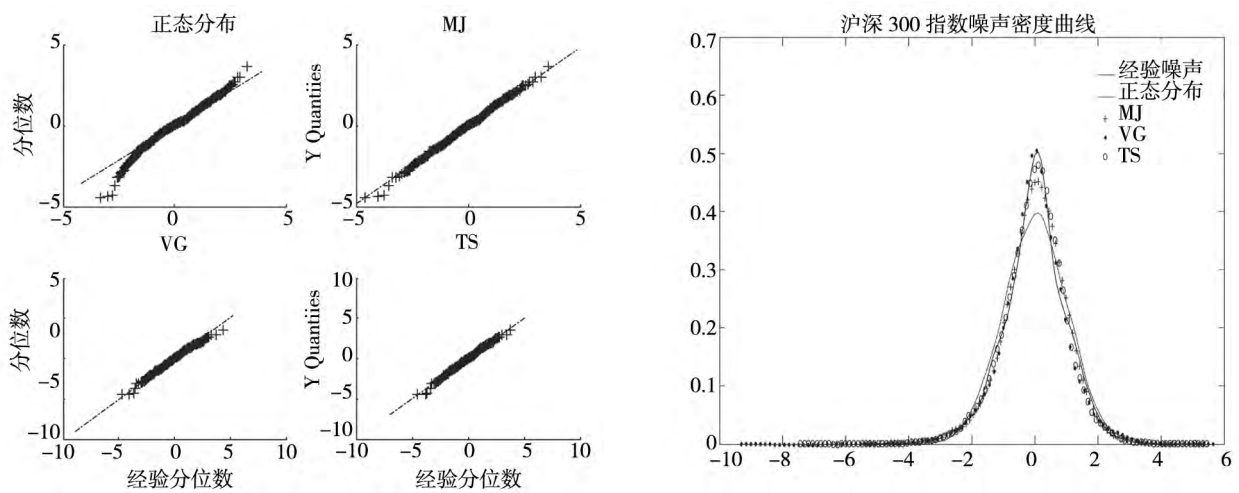


图 1c 沪深 300 指数数据的噪声分布 QQ 图和密度曲线

Fig. 1c QQ plot and PDF curve of noise from H&S300

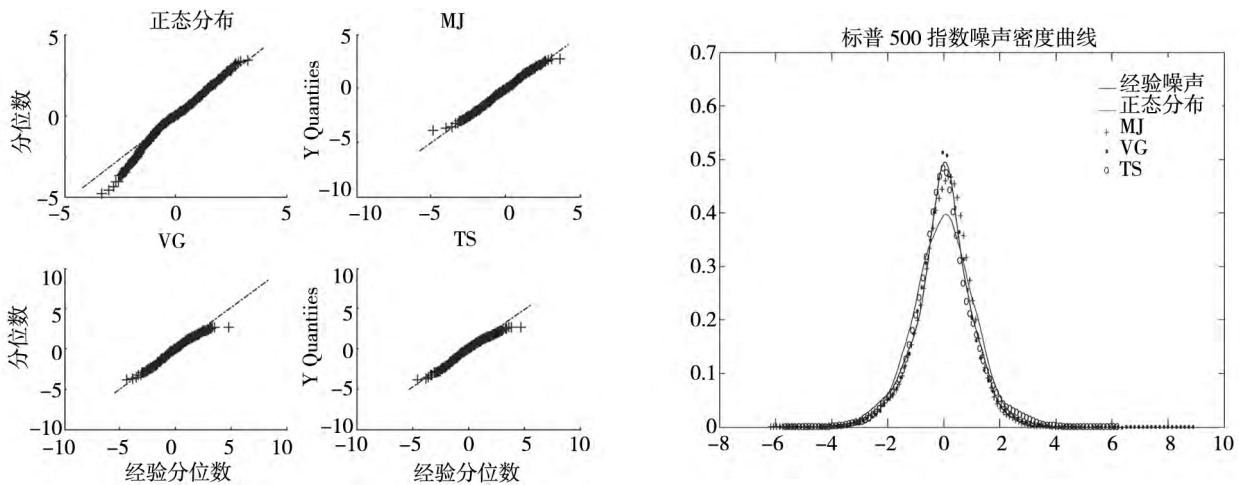


图 1d 标普 500 指数数据的噪声分布 QQ 图和密度曲线

Fig. 1d QQ plot and PDF curve of noise from S&P500

特别地, 因为通过 ARMA-GARCH 模型得到的是收益率的期望和波动率的条件状态方程, 并不是对数收益率的线性漂移率. 上述模型对于研究 Levy 过程的漂移率还存在缺陷, 可通过联立指数 Levy 过程解决这个问题.

根据指数 Levy 过程的价格与收益率模型, 有

$$\begin{cases} S_t = S_{t-1} \exp[\mu_t - \varphi(h_t) + h_t z_t] \\ y_t = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \mu_t - \varphi(h_t) + h_t z_t \end{cases} \quad (18)$$

式中 μ_t 是线性漂移率, 其中

$$\begin{aligned} \varphi_{z_t}(h_t | F_{t-1}) &= \log(\phi(-ih_t)) \\ &= \log E[\exp(h_t z_t) | F_{t-1}] \end{aligned}$$

称为特征指数或对数 Laplace 形式, 这里构成指数

的均值修正因子, 从而使收益率的线性漂移率保持为 μ_t . 同样, 在杠杆效应基础上, 条件波动率服从 NGARCH 模型, 即

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{t-i}^2 (z_{t-i} - \gamma)^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \quad (19)$$

结合式 (17)、(18) 消掉滞后的收益率, 得到新息、漂移率的状态方程为

$$\begin{cases} \varepsilon_t = h_t z_t = h_t \text{Levy}(x; v(x)) \\ \mu_t = \sum_{i=1}^p a_i [\mu_{t-i} + \varepsilon_{t-i} - \varphi(h_{t-i})] + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{t-j} + c + \varphi(h_t) \end{cases} \quad (20)$$

式(19)、(20)给出了波动率、漂移率及广义 Levy 新息的状态空间模型. 线性漂移率的时变性便于研究条件风险溢价、条件风险市场价格,也是建立局部风险中性鞅测度的前提. 在无套利定价理论前提下,风险中性鞅测度下资产价格的预期为无风险收益率 r_t 为每日无风险收益, $Q(A)$ 表示关于 A 事件的条件风险中性鞅测度,有 $E^Q(S_t | S_{t-1}) = S_{t-1}e^{r_t}$, 资产价格风险中性模型即为

$$S_t^Q = S_{t-1} \exp(r_t + \sigma_t \zeta_t^Q - \varphi^Q(\sigma_t)) \quad (21)$$

ζ_t^Q 表示关于 Q 测度与真实测度下的 z_t 是等价的,同理 $\varphi^Q(\sigma_t) = \log E^Q(e^{\sigma_t \zeta_t^Q})$, 满足 $E^Q(\zeta_t^Q) = 0$, $E^Q[(\zeta_t^Q)^2] = 1$ 根据 Radon-Nikodym 导数,测度等价的条件为

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{F_{t-1}} = \frac{e^{-\theta_t x}}{E[e^{-\theta_t x} | F_{t-1}]} = \frac{e^{-\theta_t x}}{e^{\varphi_x(-\theta_t)}} \quad (22)$$

风险中性测度当且仅当满足 Esscher 等式

$$\mu_t + \varphi_x(h_t - \theta_t) - \varphi_x(h_t) = r_t + \varphi_x(-\theta_t) \quad (23)$$

关于式(23)的解析式,可以通过泰勒展开. 完全市场上,资产价格的随机过程服从几何布朗运动,有 $\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{h_t}$,恰好为风险的市场价格,其局部风险中性鞅测度也是唯一的. 而存在无穷纯跳跃 Levy 过程的市场则是不完全市场,式(23)中 $\varphi_x(h_t - \theta_t)$ 泰勒公式展开项中存在高阶不为零,有无穷多个套利鞅测度. 根据市场的风险价格

表达式为 $\lambda_t = \frac{\mu_t - r_t}{h_t}$,若将式(18)进行变换,有

$$y_t = \mu_t - \varphi(h_t) + h_t z_t = r_t + \lambda_t h_t - \varphi(h_t) + h_t z_t$$

$$= r_t - \varphi^Q(h_t) + \left[\frac{\lambda_t h_t - \varphi(h_t) + \varphi^Q(h_t)}{h_t} + z_t \right] h_t \quad (24)$$

于是,风险中性测度等价条件为

$$\begin{cases} \zeta_t = \frac{[\lambda_t h_t - \varphi(h_t) + \varphi^Q(h_t)]}{h_t} + z_t, \\ \zeta_t^Q \stackrel{d}{=} z_t \end{cases} \quad (25)$$

通过 Radon-Nikodym 导数 $\theta(x) = \frac{dQ(x)}{dP(x)}$ 完成观测测度 P 的 ζ_t 到风险中性测度 Q 的等价变

换. 另外,以 Levy 测度表示转换因子,有 $\theta(x) = e^{-\lambda_t x}$,由此可见,满足式(25)的解是时变的. 根据历史滤波模型的假设,市场的独立、综合信息构成了模型的噪声,时间序列分析中假设未来的随机信息与历史信息的结构一致,即 $\varphi(h_t) = \varphi^Q(h_t)$,那么

$$\zeta_t = \frac{\mu_t - r_t}{h_t} + z_t = \lambda_t + z_t \quad (26)$$

λ_t 称为风险的市场价格,式(26)是式(25)的特解,同时满足式(22)和式(23),由此推导出广义 Levy 过程的风险中性模型的一类解. 这种假设对应的经济含义是股票市场的外部随机信息是独立同分布的,通俗地讲,即历史会重演. 此时,波动率满足

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{t-i}^2 (\zeta_{t-i}^Q - \gamma - \lambda_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \quad (27)$$

其中 $\lambda_{t-i} = \frac{\mu_{t-i} - r_{t-i}}{h_{t-i}}$,Duan^[4]的高斯 GARCH,以及 Engle(2008)历史滤波 GARCH 的风险中性模型都是这类模型的特例. 为了进一步验证本文提出模型的优越性,下文选择了无穷纯跳跃的调和稳态 Levy 过程进行期权定价的实证研究.

3 实证研究^⑥

根据 2.3 节的密度曲线拟合与噪声模拟分析,条件 Levy 过程具有普适性,其中调和稳态过程最佳. 因为中国大陆暂无股指期货,选择了恒生指数及其标准范式期权(欧式)作为研究对象,香港是世界几大金融中心之一,资本开放自由流动,有效的资本市场特征保证了模型检验结论具有可靠性. 依据状态空间方程通过蒙特卡罗模拟方法进行定价,并讨论模型的稳健性. 对 1994 - 07 - 12 ~ 2012 - 06 - 30 的恒生指数日收盘价的对数收益率,进行时间序列分析捕获独立白噪声随机扰动,同时估计参数和状态. 图 2 绘制了股指价

⑥ 指数与期权价格来自香港交易所网站数据库.

格、随机新息、收益率及波动率的曲线。图中显示，波动率拱起的两个阶段都伴随着股价大跌。收益率序列存在两个非常明显的集聚时期，表明时间序列存在条件异方差。另外，独立同分布的噪声序列中存在不少明显的奇异值，主要体现下跌方向，噪声曲线可能存在左偏现象，这是高斯假设无法解释的。

3.1 恒生指数价格模型的参数估计

根据式(17) (20)，对收益率进行了时间序列分析(共 4 434 个样本)，包括对数收益率序列、对数收益率平方序列、均值扰动残差序列及异方差处理后的白噪声序列。在此基础上，确定模型的自相关与异方差系数。本文还列出了相应均值、方差、标准差、偏度和峰度，自相关(ACF)、偏自相关(PACF)检验结果，以及收益率及平方的自相关 Q 检验值，异方差效应检验(ARCH)结果等，见表 3。

表中结果显示，收益率平方序列存在明显的

自相关，其他序列的自相关并不显著，收益率存在显著的异方差效应。检验数值说明，恒生指数的收益率序列几乎不存在自相关，但存在显著的异方差。异方差处理后的噪音序列则为单位标准差的独立同分布。检验结果表明噪声是非高斯的。基于以上分析，进一步本文将建立条件期望和波动率的 Levy 过程。

由于条件最小二乘的估计与高斯密度的极大似然估计结果是一致的，在式(19)、(20)的状态转换方程基础上，采用两步法估计参数，第一步通过高斯密度极大似然估计(准极大似然法)估计条件期望和方差模型，得到历史滤波噪音，第二步假设噪声服从 Levy 过程，通过特征函数估计 Levy 过程的参数，其中新息的对数似然函数为

$$l_i(\varepsilon^{(i)}; \theta) = -\frac{(y_i - c - \sum a_i y_{i-1} - \sum b_j \varepsilon_{j-1}^{(i)})^2}{2\sigma_i^2} + \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}, i = 2; \dots; N \quad (28)$$

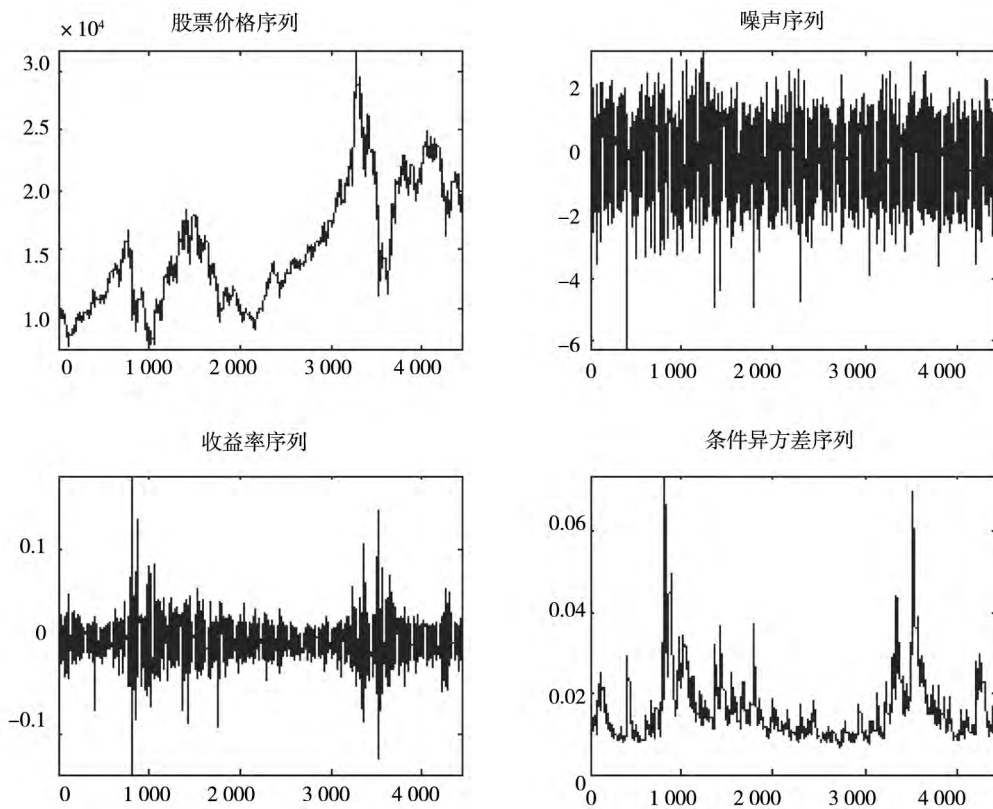


图 2 恒生指数价格路径、噪音序列、收益率路径及波动率路径

Fig. 2 Paths of price, noise, returns and volatility on HSI

表3 恒生指数对数收益率时间序列分析
Table 3 Time series analysis of HSI' return rate

时间序列	y_t	y_t^2	ε_t	z_t
均值	0.000 2	0.000 3	- 0.000	0.008 3
方差	0.000 3	0.000 001	0.000 3	1.001 9
标准差	0.001 7	0.001 0	0.017	1.003 8
偏度	0.092 9	14.03	0.092 8	- 0.186 4
峰度	12.241	290.4	12.24	4.225 7
自相关(ACF)	Lag	Lag***	Lag	0
偏自相关(PACF)	Lag	Lag***	Lag	0
Q(10)	17.9	687***	18.3*	1.62
Q ² (10)	687***	398***	684***	8.8
ARCH	268.2***	266.2***	267.4***	9.0

注: *, **, *** 分别对应 10%、5%、1% 显著性水平 $y_t, y_t^2, \varepsilon_t, z_t$ 分别为收益率序列、收益率平方序列、残差序列及噪声序列。收益率和残差序列都存在显著的异方差效应, 噪声序列平稳独立, 存在弱非高斯特征, 收益率序列几乎不存在自回归效应。(10 阶自相关检验的临界值 = 18.3)。

N 为观测的样本数量, 设定初始状态变量

$$\sigma_0 = \sqrt{\text{Var}(y)} \quad \varepsilon_0 = 0$$

ARMA-NGARCH 的参数 $\hat{\theta}$ 满足下列关系式

$$\hat{\theta} = \arg \min \sum_{i=1}^n [-l_i(\theta)]$$

第二步, 估计 Levy 过程的参数, 首先利用累积矩母指数进行矩估计, 得到参数的初始值, 因

$$C_n(X) = \frac{[\log(\phi(u))]^{(n)}}{i^n} \Big|_{u=0} \quad (29)$$

根据原点矩 $E(X^n) = \frac{\phi^{(n)}(0)}{i^n}$, 前四阶累积

指数与统计性质满足关系式

$$\begin{cases} C_1(X) = E(X) \\ C_2(X) = E(X - \bar{X})^2 \\ C_3(X) = E(X - \bar{X})^3 \\ C_4(X) = E(X^4) - 3(C_2(X))^2 \end{cases} \quad (30)$$

在使用最小二乘法得到 Levy 过程的参数后, 作为初始值进行 Levy 分布的极大似然估计, 因为 Levy 过程大多数没有封闭的密度函数形式, 这里采用特征函数的快速傅里叶变换方法。为了检验参数估计效果, 使用被估计的参数并模拟了 CTS, RDTS 模型的随机分布, 相比照经验分布进行了非参数统计检验和拟合优度分析。

(非参数检验包括秩和检验、Kolmogorov-Smirnov 双样本检验及 Ansari-Bradley 变异度非参数检验, 分别检验总体与样本的秩和、分布函数与标准离差的假设检验, 参见表 4)。

表 4 列出了条件布朗运动、条件调和稳态、条

件速降调和稳态 3 种 Levy 过程的相应参数, 也列出了历史滤波模型(FHS, 表示在历史滤波方法下进行的参数估计)的 ARMA-NGARCH 参数。右上角列出了 3 种模型各自模拟的噪声及其 4 项统计性质, 两类调和稳态分布都能够捕获噪声的左偏和尖峰等非高斯特征。同时, 3 种模型都可以刻画零均值和单位方差的白噪声特征。另外, 根据调和稳态的跳跃参数 $\lambda_+ > \lambda_-$, 表明正向的跳跃达到率随着幅度的增大而衰减更快, 从而出现左偏的特点。以上结果表明, 在历史收益率方面, 调和稳态过程拟合度优于条件布朗运动。在此基础上, 对上述两类模型进一步开展期权定价的实证研究工作, 并比较模型在定价误差方面的表现。

3.2 期权定价的蒙特卡罗模拟

根据 BS 期权定价公式, 假设随机过程为几何布朗运动, 即随机微分方程满足

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r - q) dt + \sigma dW(t) \quad (31)$$

式中, $S(t)$ 表示资产价格; r 是无风险收益率; q 为连续股息或分红率; $W(t)$ 是维纳过程; 若以 K 表示期权合约约定的执行价格, S 表示基础资产的价格, 一份以此为基础的看涨欧式期权的价值 $C = e^{-rt} E^Q [(S(t) - K)^+]$, 看跌期权的价值 $P = e^{-rt} E^Q [(K - S(t))^+]$, 几何布朗运动下有

$$\begin{cases} C = Se^{-qt} N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \\ P = Ke^{-rt} N(-d_2) - Se^{-qt} N(-d_1) \\ d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} = d_2 + \sigma\sqrt{t} \end{cases} \quad (32)$$

表 4 恒生指数条件 Levy 过程的模型参数与检验
Table 4 Parameters and test for conditional levy models of HSI

模型	历史滤波	矩条件	高斯模型	经典调和稳态	速降调和稳态
a	0.595 5	均值	0.00	-0.00	0.00
b	-0.623 1	方差	1.01	0.99	1.01
c	2.39×10^{-4}	标准差	1.00	1.00	1.00
α_0	2.82×10^{-6}				
偏度	-0.001	-0.13	-0.18	$\alpha 1$	0.07
峰度	3.02	4.29	4.14		
β_1	0.89	-	-	-	-
γ	0.62	-	-	-	-
C	-		-	1.574 7	0.857 2
λ_+	-		-	2.007 2	1.384 7
λ_-	-		-	1.807 3	1.245 3
α	-		-	0.385 7	0.001 6
KS	-		0.002 4***	0.288 0	0.500 9
AB	-		0.000 0***	0.708 5	0.189 3
RS	-		0.827 6	0.845 3	0.743 3
2.5%	-2.103		-1.96	-2.202 3	-2.205 0
N	1.709 0		0.337 5	1.220 7	1.532 4

注: KS, AB, RS 对应的原假设: $H = 0$, 样本服从同一分布. 表中所列 P 值表示可接受程度. 括号内对应为参数值的标准差 (线性模型参数). 2.5% 对应 0.025 概率下的分位数. N 表示 1 年发生 3 个标准差单位的极端事件频率. 表中可以看出 ARMA(1, 1) 参数并不显著, GARCH 参数显著, 存在异方差效应. (样本 $N = 4434$, 噪声分布: 均值 = -0.002 4, 方差 = 1.000 1, 偏度 = -0.201 4, 峰度 = 4.171 2)

式中 $N(\cdot)$ 是标准正态分布的累积密度. 除了公式的数值计算, 还可通过蒙特卡罗模拟风险中性价格路径从而计算衍生品的价值. 以 Δt 表示步长, 几何布朗运动的模拟路径满足

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \xi\right] \quad (33)$$

式中 ξ 是服从标准正态分布的随机数. 于是, 关于执行价格 K 的期权价值 C 可以通过 n 条路径的终期价格计算, 即

$$C_T(\Delta t, K) = e^{-r\Delta t} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(S_T(i) - K, 0) \quad (34)$$

$$P_T(\Delta t, K) = e^{-r\Delta t} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max(K - S_T(i), 0) \quad (35)$$

根据无套利平价定律, 考虑建立以下组合:

- 1) 看涨期权的多头与执行价格相应的数量资产的空头;
- 2) 一份看跌期权的空头与一份基础资产

的多头. 第 1 类组合通过买入看涨期权并借入一笔远期资本进行交割, 第 2 类组合通过卖出一份持有资产的看跌期权进行对冲, 两者应该满足即期价值相等, 否则存在无风险套利, 即

$$C + Ke^{-rt} = S_0 + P \quad (36)$$

通过式 (34) 和 (35) 进行期权价值估算后, 依据式 (36) 可以进行无套利平价检验, 从而比较模型期权定价的稳健性. 如果风险中性模型定价准确, 通过代入看涨期权价值计算看跌期权价值. 反之, 代入看跌期权计算看涨期权的价值, 两者的误差越小, 则模型的定价越稳健.

t 表示交易日天数, 作为马尔科夫链的步数. 条件 Levy 过程的马尔科夫链蒙特卡罗模拟 (MCMC) 表示为离散随机过程

$$S(t) = S_0 \exp\left(\sum_{i=1}^t r_i + \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i \xi_i^Q - \sum_{i=1}^t \varphi^Q(\tilde{\sigma}_i)\right) \quad (37)$$

其中风险中性波动率过程满足式 (27). 若采用 MCMC 方法, 马尔科夫状态包括带杠杆系数的条

件波动率 $\{\tilde{\sigma}_i\}$, 随机信息因子 $\{\zeta_i\}$, 预期的连续收益率 $\{\mu_i\}$, 风险中性修正因子 $\{\lambda_i\}$. 模型的参数集 $\{a, b, c, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma, \mathcal{L}, \lambda_+, \lambda_-, \alpha\}$ 已知, 步骤如下.

1) 动态收集并更新已知价格信息, 作为模型的新条件;

2) 对标的的收益率进行时间序列分析, 动态更新参数, 预测条件波动率和条件期望;

3) 对历史滤波进行特征化, 分析噪音分布的统计特征, 通过特征函数法估计标准分布的参数 (两类调和稳态);

4) 输入参数, 初始化变量 $\{S_0, \mu_0, r_0, \sigma_0, \lambda_0, z_0\}$, 以进行迭代模拟.

5) 通过公式(16) - (17) 计算风险中性条件下的状态变量, 建立局部风险中性鞅测度, 使价格预期为无风险收益的线性漂移率并计算相应的风险市场价格, 满足式(26);

6) 根据带杠杆效应的 GARCH 模型预测远期风险中性的随机波动率序列 $\{\tilde{\sigma}_i\}$, 即等式(27);

7) 计算该波动率下的对数拉普拉斯变换值 $\varphi_{\zeta_i}(\tilde{\sigma}_i)$, 构建风险中性资产定价模型, 满足等式(21);

8) 模拟生成标准分布的随机数 z_i , 构建风险中性测度下的纯跳跃随机因子 $\{\zeta_i\}$;

9) 将波动率、跳跃和漂移率作为三维状态, 代入式(17) 得到收益率序列和价格, 模拟资产价格路径.

10) 重复以上过程产生 N 条路径, 计算到期支付现金流, 得到金融衍生品预期终期价值, 进行风险中性贴现.

采用损失函数用以比较定价误差, 分析蒙特卡罗模拟的期权定价结果, 本文引用以下几种定量表达式

$$AAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |C_mark(i) - C_model(i)| \tag{38}$$

$$APE = \frac{\sum_{i=1}^N |C_mark(i) - C_model(i)|}{\sum_{i=1}^N C_mark(i)} \tag{39}$$

$$ARPE = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^N \left[\frac{|C_mark(i) - C_model(i)|}{C_mark(i)} \right] \tag{40}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [C_mark(i) - C_model(i)]^2} \tag{41}$$

$$RMRE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|C_mark(i) - C_model(i)|}{S_0} \tag{42}$$

式中 C_mark 、 C_model 分别表示市场价格和模型价格; 式(38) 为平均绝对误差 (average absolute error); 式(39) 为平均相对误差, 用以比较模型与实际样本平均值的误差水平; 式(40) 为平均相对百分比误差, 比较每一个市场价格的相对误差平均值; 式(41) 为均值平方根误差; 式(42) 是模型与实际误差相对于基础价格的百分比.

3.3 恒生指数期权的实证分析

恒生指数单日内交割价格的类型最多达 81 种, 到期期限有 1 个月、2 个月、3 个月短期和中期的中期期权, 超过 1 年的长期期权一般以半年为单位, 最长为 3 年. 短期交割价以 200 间隔为单位, 以半年内的短期期权品种较为丰富, 执行价在 85% 至 115% 的即期价格区间且时间短于 3 个月的期权交易较为活跃. 长期期权的交割价格选择空间非常有限 (1 000 为单位), 1 年以上的长期期权交易几乎为零, 因此文中将半年以内的期权作为研究对象, 并将期权分为 4 类: 1 周内交割的期权定义为瞬期期权; 1 个月到期的为短期期权; 3 个月到期的为中期期权; 6 个月到期的期权交易活跃程度大大下降, 定义为长期期权. 将 4 种期权的看涨、看跌分别进行定价, 比较看涨、看跌期权定价的差异, 同时采用式(36) 考察无套利平价的稳健性. 最后在表 6 列出了存在杠杆效应和假设无杠杆效应模型的期权定价的结果, 比较了带杠杆效应的调和稳态模型关于期权的定价能力. 表

5 列出了瞬期期权(2011 年 11 月 23 日所在周)^⑦ 的实证结果,瞬期期权的执行价处于即期价格的 90% - 110% 交易量最大最活跃,在表中列出了相应的误差值,表 5 的结果表明,速降调和稳态比起高斯分布的模型更加稳健,图 3 画出了部分期权定价的数据,图 4 画出了相应看涨期权的隐含波动率,调和稳

态的隐含波动率的曲面比较陡,速降调和稳态相对比较稳健,隐含波动率体现了投资者对未来风险中性波动率的预期,隐含波动率越精确,期权价值的估值越精确,从图中来看,相比速降调和稳态,经典调和稳态在价外期权上表现不佳,而高斯模型在瞬期期权上低估了基础资产的活跃程度。

表 5 模型的定价误差(RMSE, APE, AAE, ARPE)

Table 5 RMSE, APE, AAE, ARPE of the models

模型 / 误差	AAE	APE	RMSE	ARPE	
瞬期期权 (10 只最活跃期权)	GBM-call	16.6	0.04	21.1	0.06
	CTS-call	20.0	0.05	25.5	0.05
	RDTS-call	15.1	0.03	20.3	0.05
	GBM-put	23.5	0.09	28.5	0.11
	CTS-put	8.43	0.03	9.6	0.12
	RDTS-put	19.0	0.07	23.6	0.12
瞬期期权 (所有期权)	GBM-call	42.6	0.02	58.8	0.34
	CTS-call	11.6	4.7×10^{-3}	22.5	0.38
	RDTS-call	44.2	0.017	57.3	0.35
	GBM-put	23.7	0.014	37.3	0.47
	CTS-put	24.3	0.014	38.6	0.53
	RDTS-put	22.7	0.013	36.1	0.47
瞬期期权 (看跌期权稳健性)	GBM-OTM	4.7	0.16	9.9	0.81
	CTS-OTM	13.4	0.45	28.1	0.92
	RDTS-OTM	4.4	0.14	8.4	0.81
	GBM-ITM	48.7	0.013	55.4	0.027
	CTS-ITM	39.8	0.010	49.5	0.027
	RDTS-ITM	45.4	0.012	53.6	0.019

注: GBM、CTS、RDTS 分别表示资产价格在异方差条件下服从几何布朗运动,经典调和稳态、速降调和稳态无穷纯跳 Levy 过程,其中 call、put 表示看涨看跌,在第 3 组中,以看跌期权的定价误差作为考察模型看涨看跌期权套利平价的稳健性,OTM 为价外期权或称虚值期权(out of the money),ITM 为价内期权或称实值期权(in the money),模拟网格: 250(step) x 10 000(path) x 10 000(integration), (CPU: 2.2GHZ, RAM: 2G),置信水平 5%,针对标准化噪声,采用对偶变量技术减少方差,总体用时约 30min,方差减少至原来的 1/4。

根据 Merton^[7] 及 Carr^[32] 的杠杆效应理论,股票的波动率承受 3 方面的杠杆影响,首先是公司的财务杠杆(公司经营的资本结构)、其次为宏观经济杠杆(宏观利率,资本的借贷成本),最后为市场杠杆(例如市场非连续跳跃或者一系列突发事件等等),瞬期期权、短期期权的波动率由市场主导,而长期期权的波动率则由公司经营及宏观经济主导,本文对不同期限的期权进行实证研

究,进一步比较杠杆效应水平在条件无穷纯跳跃 Levy 过程期权定价中的影响。

表 6 列出了 2012 年 5 月的期权数据定价误差结果(仅选择当月的周三,以去除周末效应),1 个月内到期的作为短期期权(剔除 1 周内交割的期权),2 - 4 个月内到期的为中期期权,5 - 6 个月到期的作为长期期权,分成 3 类进行 MCMC 模拟期权定价并计算损失函数(定价误差参见表 6),其中括弧

⑦ 考虑到股票价格具有周末效应,这里取 2011 年 11 月最后一周周三期权数据,剔除周末效应。

内为不带杠杆效应的误差. 图 5a 5b 5c 画出了 2012 年 5 月 2 日^⑧无杠杆效应的 3 类模型短、中、长期期权定价结果及相应的隐含波动率. 图 6a 6b 6c 画出了带杠杆效应的期权定价结果及隐含波动率.

实证图表及数据表明, 总体上速降调和稳态及调和稳态定价精度高于高斯模型, 速降调和稳态保持非常好的稳健性. 带杠杆效应的条件 Levy 模型比起不带杠杆效应模型的定价能力得到极大改进, 特别是看跌期权. 一方面表明波动率在股票价格上涨和下跌中是非对称的, 另一方面说明杠杆效应显著存在于股票和期权中. 无杠杆效应模型下, 看涨、看跌期权的隐含波动率都较程度高出了市场的隐含波动率, 带杠杆效应的条件模型部分修正了这方面的不足, 隐含波动率曲线较为接近.

特别注意到, 带杠杆效应的速降调和稳态

Levy 过程在看跌期权定价上一直保持较高精度. 其他条件模型随着期限的延长, 总体上各个模型的定价误差在逐渐增大. 到期时间每延长 3 个月, 看涨期权的误差百分比就增加 1 倍. 考虑到条件无穷纯跳跃 Levy 过程只包含单因子波动率模型, 这就意味着纯跳跃的条件模型所隐含的波动率的信息是不能完全解释长期股权的杠杆效应的. 或者说, 投资者期待的股票价格长期上涨的波动率不仅仅是纯跳跃带来的, 更多的是来自于整个宏观经济环境及公司本身的经营、财务结构, 这与 Carr^[32] 关于波动率杠杆效应研究结论相符. 在研究长期股票回报率及长期期权的定价模型上, 单因子波动率模型是不够的. 适当考虑财务杠杆及宏观经济杠杆会提高长期股权和期权的预测准确度. 因此, 进一步的研究可以建立双因子波动率模型, 以提高长期期权的定价精度.

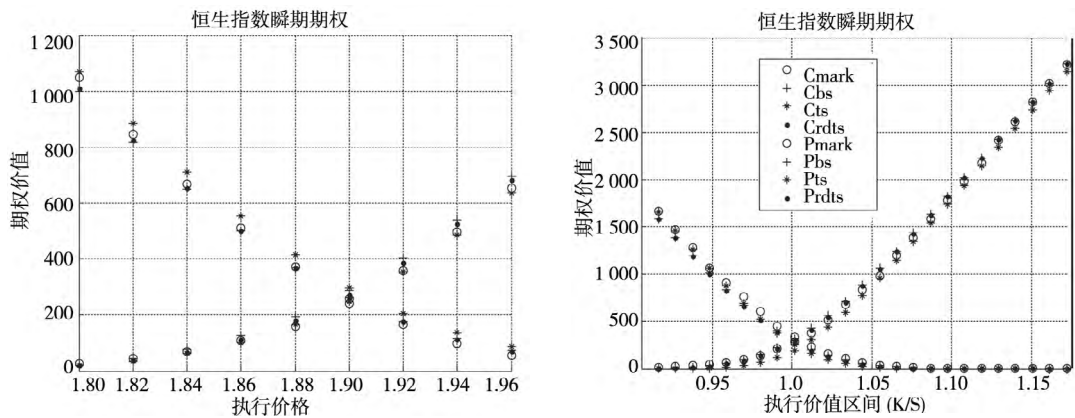


图 3 三日(左) 四日(右) 内到期 活跃期权定价结果

Fig. 3 Activity option pricing results with 3 days and 4 days maturity

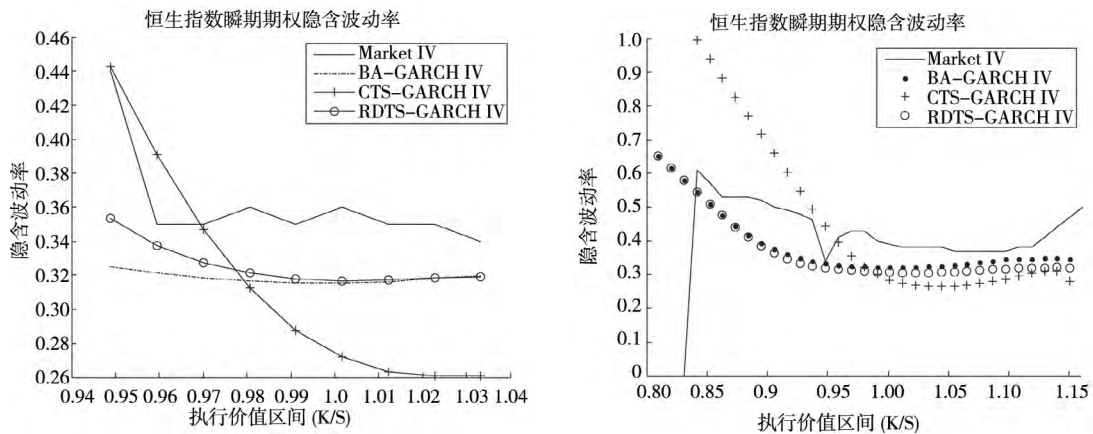


图 4 三日(左)、四日(右) 内到期看涨期权的隐含波动率

Fig. 4 Implied volatility of 3 days and 4 days maturity option

⑧ 因篇幅有限, 只选择第一天的数据作图形. 这天是该月的第一个交易日, 且恰好是周三.

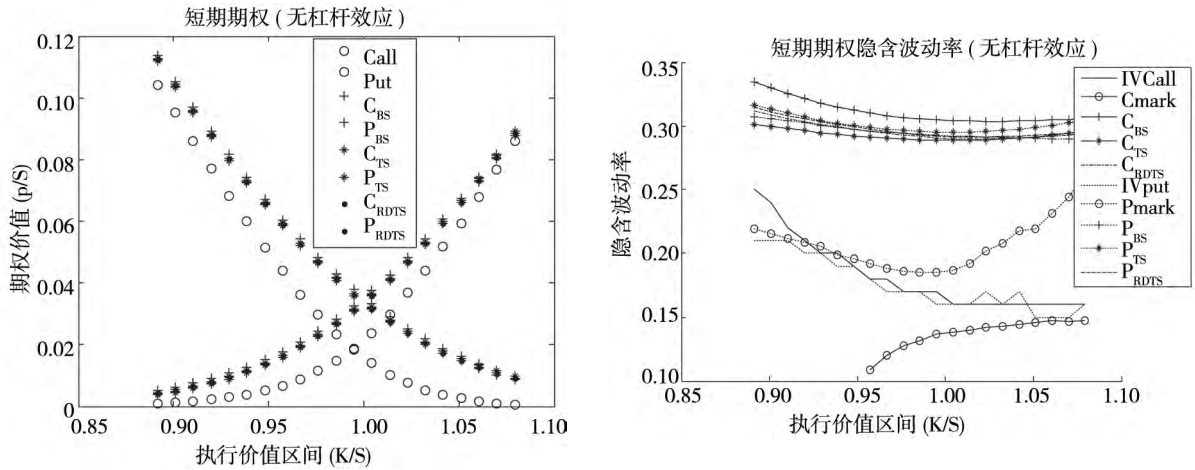


图 5a 不带杠杆的短期期权价值与隐含波动率

Fig. 5a Option prices and implied volatility in short term without leverage effect

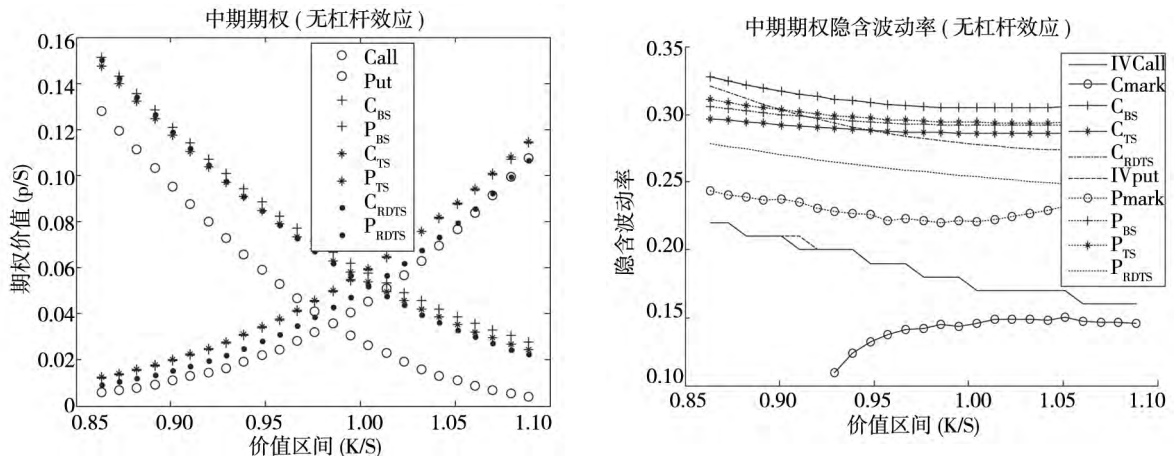


图 5b 不带杠杆的中期期权价值与隐含波动率

Fig. 5b Option prices and implied volatility in medium term without leverage effect

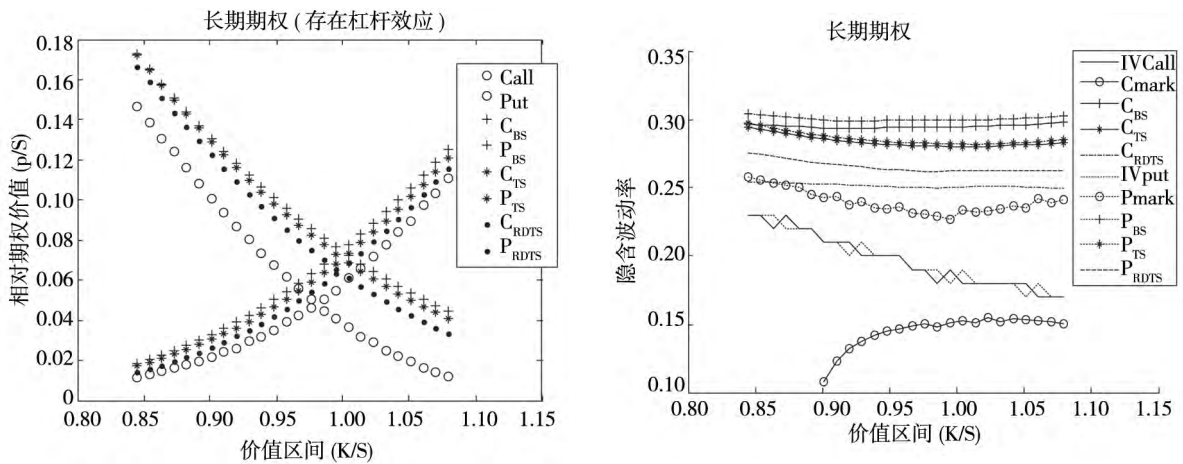


图 5c 不带杠杆的长期期权价值与隐含波动率

Fig. 5c Option prices and implied volatility in long term without leverage effect

注: 图中价格逐渐下降的点、圈表示看涨期权, 相反表示看跌期权。空心圆圈是期权的市场价格, 加号为条件布朗运动, 星号为调和稳态过程, 实心点为速降调和稳态。在隐含波动率图中, 以实线表示看涨期权, 虚线表示看跌, 同样绘制了看涨看跌期权无套利平价的结果。

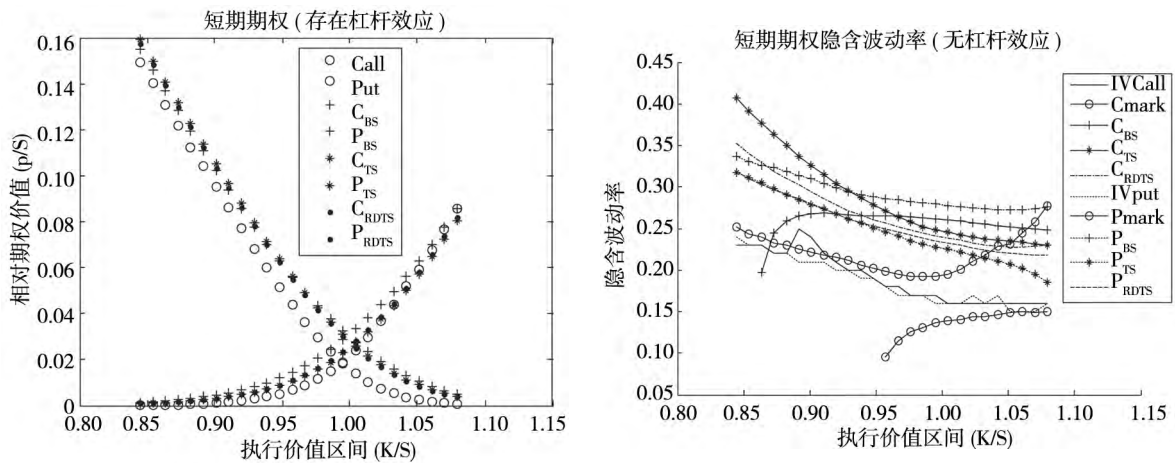


图 6a 短期期权及其隐含波动率

Fig. 6a Short term options and the implied volatility

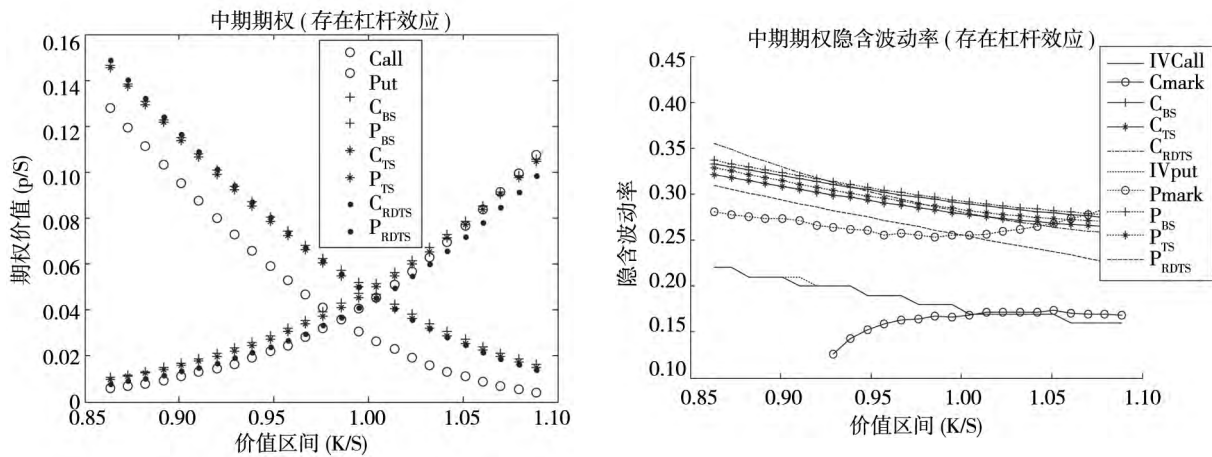


图 6b 中期期权及其隐含波动率

Fig. 6b Medium term options and the implied volatility

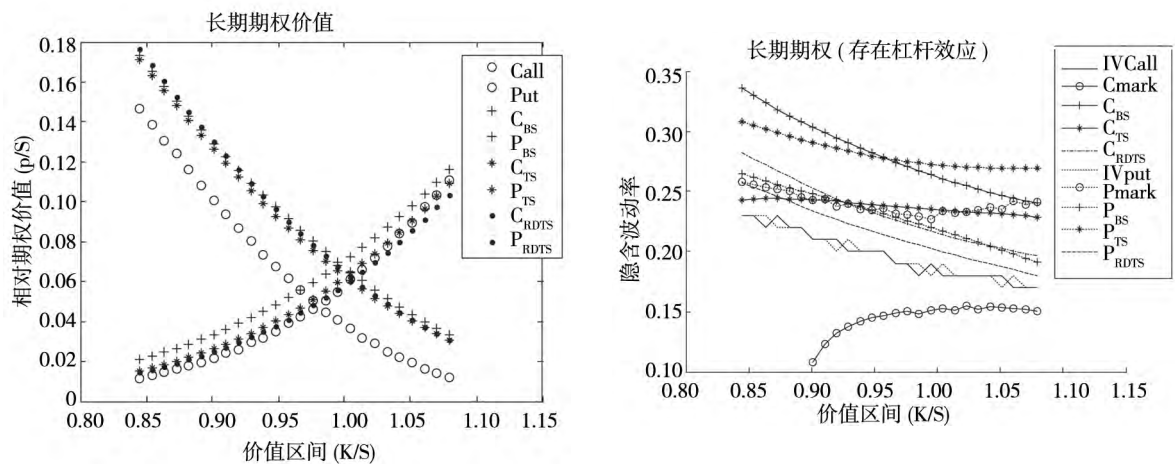


图 6c 长期期权及其隐含波动率

Fig. 6c Long term options and the implied volatility

注: 图中价格逐渐下降的点、圈表示看涨期权 相反表示看跌期权。空心圆圈是期权的市场价格, 加号为条件布朗运动, 星号为调和稳态过程, 实心点为速降调和稳态。在隐含波动率图中, 以实线表示看涨期权, 虚线表示看跌, 同样绘制了看涨看跌期权无套利平价的结果。

表 6 存在杠杆效应的不同期限期权的定价误差

Table 6 Loss function of short , medium and long terms options

Maturity	Type	AAE	APE	ARPE	RMSE	RMRE
短期期权 (1 个月以内)	Call-BS	147.487 3 (292.774 5)	0.275 7 (0.389 8)	0.536 9 (2.444 4)	149.888 9 (302.030 4)	0.006 9 (0.013 7)
	Call-TS	145.562 4 (278.127 1)	0.272 1 (0.370 3)	0.539 1 (2.327 4)	147.607 6 (286.830 8)	0.006 8 (0.013 1)
	Call-RDTS	142.406 7 (280.171 0)	0.266 2 (0.373 1)	0.495 1 (2.274 4)	145.493 0 (288.825 1)	0.006 7 (0.013 1)
	Put-BS	33.536 4 (179.215 1)	0.068 3 (0.318 6)	0.141 8 (1.239 8)	36.785 3 (192.494 9)	0.001 6 (0.008 4)
	Put-TS	33.533 5 (182.744 9)	0.068 3 (0.324 9)	0.149 9 (1.308 8)	37.640 3 (194.358 9)	0.001 6 (0.008 6)
	Put-RDTS	30.434 3 (178.213 0)	0.062 0 (0.316 8)	0.107 3 (1.314 7)	35.164 0 (190.230 2)	0.001 4 (0.008 4)
中期期权 (3 个月以内)	Call-BS	409.544 3 (591.201 3)	0.380 0 (0.548 5)	0.822 0 (1.376 0)	414.067 3 (593.541 1)	0.015 0 (0.027 7)
	Call-TS	387.301 8 (514.530 2)	0.359 3 (0.477 4)	0.766 4 (1.192 9)	392.154 2 (517.121 9)	0.015 0 (0.024 1)
	Call-RDTS	310.968 9 (505.006 5)	0.288 5 (0.468 5)	0.251 8 (1.103 3)	373.092 6 (507.117 5)	0.014 7 (0.023 7)
	Put-BS	90.585 8 (227.522 4)	0.103 1 (0.258 9)	0.238 8 (0.465 8)	98.250 3 (233.526 3)	0.010 2 (0.010 7)
	Put-TS	89.557 2 (237.585 7)	0.101 9 (0.270 3)	0.246 4 (0.491 1)	97.449 9 (243.138 9)	0.010 0 (0.011 1)
	Put-RDTS	62.614 9 (97.300 5)	0.071 2 (0.110 7)	0.128 0 (0.230 8)	74.196 2 (105.842 0)	0.006 9 (0.004 6)
长期期权 (6 个月以内)	Call-BS	584.315 3 (689.916 2)	0.412 8 (0.487 3)	0.666 9 (0.865 4)	586.436 9 (693.597 1)	0.027 4 (0.032 4)
	Call-TS	509.191 1 (633.771 7)	0.359 7 (0.447 7)	0.575 3 (0.781 7)	510.908 8 (635.613 8)	0.023 9 (0.029 7)
	Call-RDTS	567.761 0 (483.682 7)	0.401 1 (0.341 7)	0.614 7 (0.591 1)	572.361 0 (485.109 1)	0.026 6 (0.029 7)
	Put-BS	231.350 4 (292.318 3)	0.224 6 (0.283 8)	0.356 7 (0.373 2)	236.591 4 (300.985 4)	0.010 9 (0.013 7)
	Put-TS	74.103 1 (219.988 3)	0.072 0 (0.213 6)	0.127 2 (0.288 3)	80.732 9 (225.313 8)	0.003 5 (0.010 3)
	Put-RDTS	65.096 7 (123.541 1)	0.063 2 (0.120 0)	0.092 8 (0.155 9)	72.410 4 (129.048 7)	0.003 1 (0.005 8)

注:表中包含3种期限的期权,分别为1个月的短期期权,3个月的中期期权,6个月的长期期权。Call和Put代表看涨、看跌期权类型。BS,TS,RDTS分别表示正态、调和稳态和速降调和稳态Levy过程相应模型。直接列出的数据是考虑了杠杆效应的蒙特卡罗模拟定价结果。便于比较,括弧内列出了无杠杆效应模型的定价结果。模拟路径数为10000,所有期权定价的平均标准差控制为价格的1%。初始参数见表3。初始状态:漂移率为0,无风险收益率为0,日波动率为0.02,随机扰动为0。进行马尔科夫链蒙特卡罗模拟。AAE:平均绝对误差;APE:平均百分比误差;ARPE:平均相对百分比误差;RMSE:平方根误差;RMRE:相对均值价格比误差。

4 结束语

期权价格信息反映了投资者对公司或者整个市场未来走势的判断,融入了市场上所有可获得的经济信息和投资者不可见的决策心理. 传统的基础价格模型假设资产的随机扰动(或新息)服从正态分布(包括条件正态分布)或有限跳跃跳—扩散过程,这类模型与市场表现的实际情形相差甚远. 本文为股票价格建立了随条件变化的、带有杠杆效应且融入了跳跃测度的条件 Levy 过程,用以动态刻画时变的非对称波动率、漂移率和随机跳跃. 实证研究表明,非对称无穷纯跳跃的条件调和稳态 Levy 过程在收益率拟合和期权定价上的表现均更加优良且具有稳健性. 本文主要工作和结论如下:

1) 扩展了传统定价模型,建立了带杠杆效应和跳跃测度的条件 Levy 过程,在时间序列分析的基础上得到了马尔科夫状态空间方程,并进行模型的估计和检验. 通过收益率的拟合分析,对比了无穷纯跳跃的调和稳态模型与其他 3 类价格模型的差异(分别代表无跳跃的 BS 模型、有限跳跃的莫顿跳扩散模型和无限活动率的 VG 模型). 研究结果显示,调和稳态过程在刻画尖峰、厚尾及左偏特征上表现更加优良,好于其它的传统 Levy

过程.

2) 在局部等价鞅测度下推导了广义条件 Levy 过程的风险中性定价模型,并进一步进行期权定价的实证研究. 指出 Duan^[4] 的 GARCH 期权定价模型、高斯 N-GARCH 定价模型以及 Barone^[33] 的非参数历史滤波 GARCH 期权定价模型都可以作为本文条件 Levy 模型的特殊情形. 研究表明,条件 Levy 过程具有很好的灵活性和广泛的适用性. 这类离散 Levy 模型相对 Carr^[14] 的连续时变 Levy 过程更加简单,便于投资者和研究人员在实践中应用.

3) 根据到期时间不同,对比了看涨、看跌期权及无套利平价的稳健性的损失函数值,比较了不同期限期权定价结果,考察了杠杆效应对期权定价的影响. 通过恒生指数期权的实证分析发现,条件非对称无穷纯跳跃 Levy 模型比高斯 ARMA-GARCH 模型更加准确和稳健,同时,引入杠杆效应的波动率模型具有明显的优越性. 这为期权定价模型的理论研究提供了新的证据.

另外,本文模型的定价精度依赖于期权的期限,而单因子波动率模型描述股票的长期价格波动有其局限性. 进一步的研究可以针对公司、行业的财务杠杆及整个宏观经济环境建立多因子波动率模型,以克服纯跳跃单因子波动率模型的不足.

参考文献:

- [1] Black F, Scholes M. The pricing options and corporate liabilities [J]. *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3): 637-654.
- [2] Engle R F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation [J]. *Econometrica*, 1982, 50(4): 987-1008.
- [3] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity [J]. *Journal of Econometrics*, 1986, 31(3): 307-327.
- [4] Duan J C. The GARCH option pricing model [J]. *Mathematical finance*, 1995, 5(1): 13-32.
- [5] Christoffersen P, Elkamhi R, Feunou B, et al. Option valuation with conditional herteroskedasticity and nonnormality [J]. *Review of Financial Studies*, 2010, 23(5): 3141-3189.
- [6] Hull J, White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities [J]. *Journal of Finance*, 1987, 42(2): 281-300.
- [7] Duffie D. *Dynamic Asset Pricing Theory* [M]. 3rd edit. Princeton University Press. 2001.
- [8] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous [J]. *Journal of Financial Economics*. 1976, 3(1): 125-144.
- [9] Kou S. A jump-diffusion model for option pricing [J]. *Management Science*, 2002, 48(8): 1086-1101.
- [10] Heston S, Nandi S. A closed-form GARCH option valuation model [J]. *Review of Financial Studies*, 2000, 13(3): 585-625.

- [11] Nelson D. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach [J]. *Econometrica*, 1991, 59(2): 347–370.
- [12] Hansen P, Lunde A. A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1) [J]. *Journal of applied econometrics*, 2005, 20(7): 873–889.
- [13] Andersen T G, Bollerslev T, Diebold F X, et al. The distribution of realized stock return volatility [J]. *Journal of Financial Economics*, 2001, 61(1): 43–76.
- [14] Carr P, Wu L. Time-changed levy processes and option pricing [J]. *Journal of Financial Economics*, 2004, 71(1): 113–141.
- [15] 欧丽莎, 袁琛, 李汉东. 中国股票价格跳跃实证研究 [J]. *管理科学学报*, 2011, 14(9): 60–66.
Ou Lisha, Yuan Chen, Li Handong. Empirical research on jumps in stock price in Chinese stock markets [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2011, 14(9): 60–66. (in Chinese).
- [16] Barndorff-Nielsen O. Processes of normal inverse Gaussian type [J]. *Finance and Stochastics*, 1997, 2(1): 41–68.
- [17] Madan D, Carr P, Chang E. The variance gamma process and option pricing [J]. *European Finance Review*, 1998, 2(1): 79–105.
- [18] Carr P, Geman H, Madan D B, et al. The fine structure of asset returns an empirical investigation [J]. *Journal of Business*, 2002, 75(2): 305–332.
- [19] Mandelbrot B. The variation of certain speculative prices [J]. *Journal of Business*, 1963, 36(4): 394–419.
- [20] Fama E. The behavior of stock-market prices [J]. *Journal of Business*, 1965, 38(1): 34–105.
- [21] Fama E. Mandelbrot and the stable paretian hypothesis [J]. *Journal of Business*, 1963, 36(4): 420–429.
- [22] Xu W D, Wu C F, Dong Y C, et al. Modeling Chinese stock returns with stable distribution [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, 54(1): 610–617.
- [23] Rachev S, Menn C, Fabozzi F J. Fat-tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing [M]. New York: Wiley, 2005.
- [24] Menn C, Rachev S. Smoothly truncated stable distributions, GARCH models, and option pricing [J]. *Mathematical methods of Operations Research*, 2009, 63(3): 411–438.
- [25] Kim Y, Rachev S, Bianchi M, et al. Tempered stable and tempered infinitely divisible GARCH models [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2010, 34(9): 2096–2109.
- [26] Rosinski J. Tempering stable processes [J]. *Stochastic Processes and their Applications*, 2007, 117(6): 677–707.
- [27] Kim Y, Rachev S, Bianchi M, et al. Time series analysis for financial market meltdowns [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2011, 35(8): 1879–1891.
- [28] Kim Y, Rachev S, Bianchi M, et al. A New Tempered Stable Distribution and Its Application to Finance [M] // Bol G, Rachev S T, Wuert R. (Eds.), *Risk Assessment: Decisions in Banking and Finance* Physika Verlag: Springer. 2008: 77–110.
- [29] Carr P, Wu L. Variance risk premiums [J]. *Review of Financial Studies*, 2009, 22(3): 1311–1341.
- [30] Lin S Q, Michael M. Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model [J]. *Econometric Theory*, 2003, 19(2): 280–310.
- [31] 吴恒煜, 朱福敏. GARCH 驱动的历史滤波服从 Levy 过程的期权定价 [J]. *系统工程学报*, 2012, 6(27): 327–337.
Wu Hengyu, Zhu Fumin. Option pricing for historical filtering on Levy processes driven by GARCH [J]. *Journal of Systems Engineering*, 2012, 6(27): 327–337. (in Chinese)
- [32] Carr P, Wu L. Leverage Effect, Volatility Feedback, and Self-exciting Market Disruptions [R]. The American Finance Association meetings, 2011. Bloomberg Portfolio Research Paper, 2011 (2009–03), FRONTIERS.
- [33] Barone G, Adesi R F, Engle M L. A GARCH option pricing model with filtered historical simulation [J]. *Review of Financial Studies*, 2008, 21(3): 1223–1258.
- [34] Engle R F, Ng V K. Measuring and testing the impact of news on volatility [J]. *Journal of Finance*, 1993, 48(5): 1749–1778.

Option pricing based on conditional infinite pure jump Levy processes with leverage effect

WU Heng-yu^{1 2 3}, ZHU Fu-min³, WEN Jin-ming⁴

- 1. Collaborative-Innovation Center of Financial Security, Chengdu 611130, China;
- 2. The Center of Chinese Financial Studies, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China;
- 3. School of Economic Information Engineering, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China;
- 4. The Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal, H3A 2K6, Canada

Abstract: Considering the negative correlation of stock returns and its volatility, this paper established a time-varying infinite pure jump Levy processes with time-changed conditional expectations and volatility in discrete-time. According to local martingale measure transformation, we derived its equivalent risk neutral pricing model for the conditional Levy processes and used in the Hang Seng Index options for empirical research. Studies show: the conditional Levy processes with leverage effect jointly portray the asset prices' time-varying drift, variance, non-Gauss random innovations and asymmetric volatility four states, and this model has wide applicability; compared to Brownian Motion, Jump-Diffusion, and Variance Gamma process, Tempered Stable models have better performance in capturing leptokurtosis and fat-tailed features; with leverage effect, option pricing capacity of conditional Levy process has been greatly improved, we also found that Rapidly Decreasing Tempered Stable process performs more robust.

Key words: leverage effect; conditional Levy processes; infinite pure jump tempered stable; ARMA-NGARCH model; option pricing

(上接第33页)

计算边界条件

$$\begin{aligned} \Pi_{RR}^* |_{\eta=\underline{v}} &= (p_{RR} |_{\eta=\underline{v}} - v_L) E \min(q_{RR} |_{\eta=\underline{v}} X) - (c - v_L) q_{RR} |_{\eta=\underline{v}} \\ \Pi_{RR}^* |_{\eta=p_{RR}^{-1}} &= E \min[q_{RR} |_{\eta=p_{RR}^{-1}} \bar{G}(p_{RR} |_{\eta=p_{RR}^{-1}} X)] \times \\ &\quad (p_{RR} |_{\eta=p_{RR}^{-1}} - v_L) - (c - v_L) q_{RR} |_{\eta=p_{RR}^{-1}} \end{aligned}$$

结合 $q_{RR} |_{\eta=p_{RR}^{-1}} < q_{RR} |_{\eta=\underline{v}}$ 与 $p_{RR} |_{\eta=p_{RR}^{-1}} < p_{RR} |_{\eta=\underline{v}}$, 可得 $\Pi_{RR}^* |_{\eta=p_{RR}^{-1}} < \Pi_{RR}^* |_{\eta=\underline{v}} = \Pi_{NR}^*$, 所以存在阈值 $\eta^* < \eta^\Delta \leq p_{RR}$ 满足: 当 $\eta \leq \eta^\Delta$ 时, 有 $\Pi_{RR}^* \geq \Pi_{NR}^*$; 当 $\eta > \eta^\Delta$ 时, 有 $\Pi_{RR}^* < \Pi_{NR}^*$. 证毕.

命题6证明: 将 Π_{RD} 对 q 求导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_{RD}}{dq} &= p\bar{F}(q) - c + [v_L - (r_2 + \eta)] \times \\ &\quad G(\eta) \bar{F}(q) + v_L [1 - \bar{F}(q)] \end{aligned}$$

由于 $\frac{d^2\Pi_{RD}}{dq^2} < 0$, 则销售商的最优销售价格与销售量

由式(11)与 $\frac{d\Pi_{RD}}{dq} = 0$ 联合求得. 令 $H_D = \frac{d\Pi_{RD}}{dq}$, 则

$$\frac{d\Pi_{RD}}{dq} = \frac{\partial H_D}{\partial q} + \frac{\partial H_D}{\partial p} \frac{dp}{dq}$$

又

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_D}{\partial q} &= - [p - v_L \bar{G}(\eta) - (r_2 + \eta) G(\eta)] f(q) < 0, \\ \frac{\partial H_D}{\partial p} &= \bar{F}(q) > 0 \end{aligned}$$

所以, 有 $\frac{dH_D}{dq} < 0$.

计算边界条件

$$\lim_{q \rightarrow 0} H_D = E \max(v_H, \eta) - c + [v_L - (r_2 + \eta)] G(\eta)$$

令

$$r_2^\Delta = \frac{E \max(v_H, \eta) - c}{G(\eta)} + v_L - \eta$$

若 $r_2 < r_2^\Delta$, 则 $\lim_{q \rightarrow 0} H_D > 0$; 若 $r_2 \geq r_2^\Delta$, 则 $\lim_{q \rightarrow 0} H_D \leq 0$. 又 $\lim_{q \rightarrow +\infty} H_D = -(c - v_L) < 0$, 所以, 当 $r_2 < r_2^\Delta$ 时, 存在唯一的 q_{RD} 使得 $H_D = 0$. 将 q_{RD} 代入式(11), 可得 p_{RD} ; 当 $r_2 \geq r_2^\Delta$ 时, 则不存在 q_{RD} 满足 $H_D = 0$, 即此时不存在理性预期均衡. 证毕.

命题7证明: 由于

$$\frac{d\Pi_{RD}^*}{d\eta} = [(v_L - (r_2 + \eta)) g(\eta) - G(\eta)] E \min(q_{RD}, X) < 0$$

结合 $\Pi_{RD}^* |_{\eta=\underline{v}} = \Pi_{NR}^*$, 以及 Π_{NR}^* 与 η 无关, 可得, 当 $\eta > \underline{v}$ 时, 则 $\Pi_{RD}^* < \Pi_{NR}^*$. 证毕.