考虑非期望产出弱可处置性的随机 DEA 模型①

李永立，吴 冲
(哈尔滨工业大学管理学院，哈尔滨 150001)

摘要： 针对大量生产过程中存在非期望产出的现象及效率评价中数据包含随机性误差的事实，建立非期望产出的随机 DEA 模型. 该模型通过引入风险的概念定义决策单元的占优，并应用统计学中的“相关性”概念刻画非期望产出的弱可处置性，在最优化理论的框架下，将两者结合起来，构建了可以同时考察两者的评价模型. 在实证分析中，考察了该模型在不同随机误差水平下，在考虑与不考虑弱可处置性的情况下，模型评价结果的异同. 结论表明：该模型可以同时解决非期望产出存在和数据包含随机误差的问题，有着广泛的适用性，模型的分析能力优于既有的模型.

关键词： 非期望产出；弱可处置；随机性；DEA 模型
中图分类号： N945；F224 **文献标识码：** A **文章编号：** 1007－9807(2014)09－0017－12

0 引 言

在评估理论中，数据包络分析(DEA)模型是用于比较和评估相似的决策单元(DMU)之间生产效率的有力工具，经典的 DEA 模型以 Charnes 等[1]和 Banker 等[2]提出的 CCR 模型和 BCC 模型为代表，他们基于一个基本的假设，即“以最小的投入换取尽可能多的产出”是有效率的标志. 但是，由于现实生产过程中伴随着副产品的出现，也即非期望产出的出现，满足以上假设并不意味着决策单元的生产有效率，比如在工业生产中伴随着的废水、废气和废渣的排放等；当考虑到这些因素对效率评价的影响时，得到的结果将与经典模型不符[3,4]. 同时，关注到数据收集中存在的随机误差现象，既有的确定性 DEA 模型难以刻画这种随机误差，从而使得到的评价结果不够客观和合理[5]. 这两个现象的存在，吸引了大量的学者对其进行研究，并针对每种现象提出了多种 DEA 模型.

为了克服非期望产出影响效率评价的问题，既有的模型大体上分为两类：一类是基于非期望产出的数据变换模型，这类模型本着非期望产出与效率评价负相关的假定进行各种形式的函数变换，比如曲线产出效率度量法[6]、非期望产出投入法[7]和非期望产出数据转换函数处理法[8]等；另一类是基于规划松弛变量的优化模型，称为 SBM 模型，这类模型以非期望产出的松弛变量为自变量，建立各种优化函数求解生产效率，比如 Sharp 等[9]，Esmaeili[10]和宋马林等[11]的相关研究. 就以上两类方法来讲，SBM 模型有着更强的实际意义和灵活性，可以成为进一步研究的出发点. 注意到随着研究的进一步深入，非期望产出影响效率评价还产生了非期望产出弱可处置的问题. 非期望产出弱可处置指的是期望产出与非期望产出之间存在着某种生产约束关系，也即当减少非期望产出时，期望产出不是不发生变化的，而有依照某种关系减少的现象[12-13]. 为了进一步建模刻画非期望产出弱可处置性对效率评价的影

① 收稿日期：2012－06－28；修订日期：2012－08－14.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(71271070)；高等学校博士点专项基金资助项目(20092302110060)；教育部新世纪优秀人才支持项目资助项目(NCET－08－0171).
作者简介：李永立(1985—)，男，辽宁沈阳人，博士生. Email：0440004@fudan.edu.cn

响,Fare 等[14],Tyteca[15]和 Ernest 等[16]在 SBM 模型的基础上,分别引入不同的线性约束条件以解决这一问题. 但是,Yang 和 Pollitt[17]指出,既有的关于分析和应用弱可处置的模型虽然在概念的具体应用和建模方法上有差别,但是存在共性的问题是对于不同的非期望产出,都一致地假定了统一的变化比率,即不同的非期望产出与期望产出之间的生产制约规律相同. 而事实上,在生产过程中,制约这些量的规律可能是不同的,没有经过更加细致的分析而给出了同一变化比率的处理方法具有武断性.

为了处理随机性存在影响效率评价问题,既有文献有着非参数方法和参数方法两种主流的处理策略. 其中,非参数方法以 Simar 和 Wilson[18]的 Bootstrap 方法为代表,参数方法以 Cooper 等[19]提出的机会约束方法为代表. Bootstrap 方法通过对样本的反复抽样实现对随机性的分析和刻画,而机会约束方法基于约束条件的概率函数表达实现对随机性的分析和刻画. 一般说来,当对随机误差没有先验的估计时,采用非参数的 Bootstrap 方法,但其效率往往较低; 而对于随机误差有一定的估计或假定时,采用机会约束方法更加稳健.

注意到就作者掌握的文献来看,还未曾发现将以上两个问题结合起来的研究. 大量的 DEA 模型在构建过程中只针对其中一个问题进行建模,没有设计一个框架和模型将两者结合起来. 特别是当考虑产出的弱可处置性时,既有的模型框架很难同时刻画非期望产出的影响和随机性存在的影响. 为了同时解决以上两个问题,克服既有模型中刻画弱可处置性采用统一变化比率的不足,本文在假定随机误差分布的基础上,构建了新的 DEA 模型. 该 DEA 模型继承了 SBM 模型从松弛变量着手建模的特征,构建了统一的框架将机会约束与弱可处置性结合在一个模型中. 它区别于既有的 DEA 模型主要表现在 3 个方面: 1) 引入了风险的概念定义决策单元的占优,进而将有效性转化为相应的风险值,用以比较决策单元的效率水平; 2) 应用了相关性的概念度量弱可处置的水平,可以细致地考察每个非期望产出受弱可处置性的制约规律; 3) 优化模型的目标函数是自然的、直接的,没有像既有的模型中依赖于径向或借助于运算重新定义效率的做法,目标函数的合理性有不证自明的特征.

1 模型的建立过程

首先给出本文 DEA 随机有效的定义,这个定义通过引入风险的概念进行阐述,应用了风险是不确定性刻画的这一原理,使得模型具有了随机性的特征,并成为引入非期望产出弱可处置性刻画的良好框架. 而后通过变量间的相关性刻画弱可处置性,并说明该刻画方法的合理性和优点. 最后在以上两个定义的基础上给出本文的 DEA 模型,并阐述其管理学的意义.

1.1 DEA 随机有效的概念: 基于风险的定义

设有 n 个决策单元 (DMU) ,对第 j 个 DMU,令

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_j = (\tilde{x}_{1j},\cdots,\tilde{x}_{mj})^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}}_j = (\tilde{y}_{1j},\cdots,\tilde{y}_{pj})^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{\boldsymbol{b}}_j = (\tilde{b}_{1j},\cdots,\tilde{b}_{qj})^{\mathrm{T}}$$

分别代表投入、期望产出及非期望产出的随机向量,其中 $j = 1,\cdots,n$. m,p,q 分别表示投入、期望产出和非期望产出变量的个数.

由于风险是不确定性刻画的有力工具,针对模型的随机性,本文引入风险定义随机占优: 认为 DMU_k 占优于 DMU_j 的风险由以下概率式定义

$$risk(DMU_k > DMU_j) = p(\tilde{\boldsymbol{x}}_j \leqslant \tilde{\boldsymbol{x}}_k, \tilde{\boldsymbol{y}}_j \geqslant \tilde{\boldsymbol{y}}_k, \tilde{\boldsymbol{b}}_j \leqslant \tilde{\boldsymbol{b}}_k) \quad (1)$$

注意到当 $risk = 0$ 时,DMU_j 相比于 DMU_k 以概率 1 不满足 $\tilde{\boldsymbol{x}}_j \leqslant \tilde{\boldsymbol{x}}_k$,$\tilde{\boldsymbol{y}}_j \geqslant \tilde{\boldsymbol{y}}_k$,$\tilde{\boldsymbol{b}}_j \leqslant \tilde{\boldsymbol{b}}_k$,即投入和非期望产出少,而期望产出多的情况,这意味着 DMU_k 的效率以概率 1 占优于 DMU_j ,这蕴含着如果 DMU_j 是有效率点的话,DMU_k 必然也是. 随着 $risk$ 的增大,则认为 DMU_k 占优于 DMU_j 的风险变大. 相比于传统的确定性模型占优的定义,这里引入风险的概念有助于分析随机性的情况.

在以上风险概念定义的框架下,可以得出如下的关于决策单元占优和有效的定义.

定义 1 (随机占优) 认为 DMU_k 占优于 DMU_j ,当且仅当下式成立

$$risk(DMU_k > DMU_j) \leqslant risk(DMU_j > DMU_k) \quad (2)$$

定义 2(随机有效) 对含有 n 个 DMUs 的

集合，DMU_k有效当且仅当对于任意的 j 属于 $1,\cdots,n$ 成立

$$risk(DMU_k > DMU_j) \leqslant risk(DMU_j > DMU_k) \tag{3}$$

1.2 产出间弱可处置性的刻画: 基于变量间的相关性

根据引言中关于弱可处置的定义: 为想要减少非期望产出，必须牺牲部分期望产出，也即非期望产出与期望产出存在某种在生产规律下约束的关系. 为了表示这种关系，很自然地想到相关系数，即为 DMU_j 的 $\tilde{y}_j$ 中的第 r 种期望产出 $\tilde{y}_{rj}$ 与 $\tilde{b}_j$ 中的第 s 种非期望产出 $\tilde{b}_{sj}$ 之间的相关系数为 $\rho(\tilde{y}_{rj},\tilde{b}_{sj})$，表示为

$$\rho(\tilde{y}_{rj},\tilde{b}_{sj}) = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{y}_{rj},\tilde{b}_{sj})}{\sqrt{\mathrm{cov}(\tilde{y}_{rj},\tilde{y}_{rj})}\sqrt{\mathrm{cov}(\tilde{b}_{sj},\tilde{b}_{sj})}} \tag{4}$$

在统计学上，相关系数表示两个变量之间的相依关系，它可以成为反映产出间生产制约关系的度量. 用相关系数刻画弱可处置性，以上面的 $\rho(\tilde{y}_{rj},\tilde{b}_{sj})$ 为例，有下面的几种情况

$$\rho(\tilde{y}_{rj},\tilde{b}_{sj})\begin{cases} >0 & \text{两个变量表现为正向的弱可处置性，}\\ & \text{一个减少，另一个也随之减少} \\ =0 & \text{两个变量没有相互制约的规律，}\\ & \text{没有弱可处置性的特征} \\ <0 & \text{两个变量表现为负向的弱可处置性，}\\ & \text{一个减少，另一个随之增加}\end{cases}$$

对于 $\rho(\tilde{y}_{rj},\tilde{b}_{sj})$ 的数值大小来说，其绝对值大，表示弱可处置性的规律强，而对于生产系统来说，一般的弱可处置规律表现为 $\rho(\tilde{y}_{rj},\tilde{b}_{sj}) > 0$ 的情况，也即非期望产出要较少，也同时必须牺牲期望产出的规律. 从本文的关于弱可处置的刻画方法来看，它克服了既有研究假定规律一致的特征，可以逐一刻画不同变量间的弱可处置规律. 事实上，本文的这个弱可处置性的定义不仅适用于期望产出和非期望产出之间的问题，还可以处理一类有着互斥关系产出的评价问题，这时对应着$\rho<0$的情况. 处理这一类问题的意义在于，对于评价对象，收集了很多产出的指标，这些指标间有些可能是互斥的，比如评价企业的社会贡献，可能既要考察企业的盈利，带动的就业，也要考察其处理污染物的投入，工人的福利等; 这时企业的盈利与排污投入和工人福利就存在负相关的关系，为合理地评价这一问题，体现这些量之间的负相关关系，就需要将 ρ 引入模型，这一原理事实上与处理非期望产出弱可处置性的原理是异曲同工的，都是消除指标间存在的相关关系的影响，只不过一个是负向的，一个是正向的. 而既有的基于 DEA 的评价模型，也仅能处理两者正向的关系，这是引入相关系数的又一个有利之处.

1.3 本文 DEA 模型的数学表达及其管理学意义

为了考察决策变量 DMU_k 的效率，建立如下的 DEA 模型

$$\begin{aligned} \underset{\lambda}{\mathrm{MAX}}\ \ & P\{\bigcap_{i=1}^{m}(\sum_j \tilde{x}_{ij}\lambda_j \leqslant \tilde{x}_{ik})\times \\ & \bigcap_{r=1}^{p}(\sum_j \tilde{y}_{rj}\lambda_j \geqslant \tilde{y}_{rk})\times \\ & \bigcap_{s=1}^{q}(\sum_j \tilde{b}_{sj}\lambda_j \leqslant \tilde{b}_{ik})\} \end{aligned} \tag{5}$$

约束条件一

$$P\{\sum_j \tilde{x}_{ij}\lambda_j < \tilde{x}_{ik}\} \geqslant 1-\xi,\ i=1,\cdots,m$$

$$P\{\sum_j \tilde{y}_{rj}\lambda_j > \tilde{y}_{rk}\} \geqslant 1-\xi,\ r=1,\cdots,p$$

$$P\{\sum_j \tilde{b}_{sj}\lambda_j < \tilde{b}_{sk}\} \geqslant 1-\xi,\ s=1,\cdots,q$$

$$\sum_j \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geqslant 0 \quad \text{及} \quad \lambda_k = 0$$

约束条件二

$$\sum_j \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geqslant 0 \quad \text{及} \quad \lambda_k = 0$$

其中，ξ 是模型的置信度，用以确定模型在怎样的可信性水平下结果是可以被接受的，这类似于统计推断中的定义. DMU_k表示第 k 个生产决策单元，当其被选定用于测量其效率时，就从这个生产决策单元的集合中取出来，也即 $\lambda_k=0$，而用集合中剩下的元素确定其生产效率. 注意到这个模型中有两个约束条件，其中约束条件一反映的是剩余点的生产可能性约束，如果取出的生产决策单元不满足该约束，表明它是模型的边界点，也即“效率点”的候选点，这时，应用约束条件二进行模型的求解; 如果取出的生产决策单元满足约束条件一，表明该点不是一个有效率的生产决策单

元，这时直接应用约束条件一求解最优化问题即可.

该 DEA 模型的管理学意义及其对于非期望弱可处置问题和随机性问题的处理特征为:

1) 对于目标函数来说，根据本文中决策单元有效的定义，概率 P 反映待评估的 DMU_k 是有效率的决策单元的风险，这个概率越大，则认可 DMU_k 是有效决策单元的风险就越大. 由此对于各个效率待评估的决策单元，其效率水平可按该风险值的升序排列，认可“决策单元有效”的风险越小，则认为决策单元越有效，反之则不是. 这个目标函数由于引入了概率函数，很自然的它成为了刻画随机性的有力工具.

2) 关注于最优化函数中引入的概率，这个值的确定过程就包含了确定 $\tilde{x}_{ij}$ ，$\tilde{y}_{rj}$ 和 $\tilde{b}_{sj}$ 这些量之间关系的步骤，而这恰恰是考虑了产出间弱可处置关系(在本文中为以上各变量间的相关系数) 的框架，这一点将在模型的求解过程中得到详尽分析.

3) 对于约束条件，前 3 个表示在 ξ 置信度下的生产可能集，$\sum \lambda_j = 1$ 是规模报酬可变的约束条件，$\lambda_j \geqslant 0$ 是决策单元投入、期望产出及非期望产出非负的必然要求，事实上，其已蕴含在前 3 个对生产可能集描述的约束中. 但是，按照这里取出一个待测的 DMU，用剩下的 DMU 集合做参考集用以测评的方法，第一组约束条件的前 3 个可能不满足，在这种情况下，取出的 DMU 点就是一个边界点，是“效率点”的候选点，这时需要直接用第二组约束条件，并且这时的结果加星号(*) 给予标识.

4) 这个模型的结果不依赖于变量的单位，是尺度不变的，即当同一类的变量等比例发生变化时，不改变模型的结果[20]. 这一点可以从式(5) 的目标函数中清楚地获得: 同一类变量等比例变化可以直接被约去，而不对目标函数值产生影响. 注意到既有的 SBM 模型中的加性模型对这个单位变化是敏感的[21]，这里的模型相比于加性模型有优势，并且目标变量是自然的和直接的.

2 模型的求解过程

以上建立的 DEA 模型，即式(5) 是通用的模型结构，在不清楚概率函数 P 的情况下是不能求解的. 这里，本文给出关于模型随机误差项的基本假设，在这个假设的基础上，给出了模型的求解方法和求解步骤，为模型的应用铺平道路.

2.1 模型假设、相关推论及其合理性

数据的随机误差是模型随机性的根本来源，表现在本文中就是随机变量 $\tilde{x}_{ij}$ ，$\tilde{y}_{rj}$ 和 $\tilde{b}_{sj}$ 的随机扰动项. 由于数据的随机误差有着多种不同的来源，根据统计学中的中心极限定理，知道这样的误差往往满足零均值和一定方差水平的正态分布，由此假定本文中数据随机误差满足正态分布，表述如下:

模型假定 令 ε_{ij} ，η_{rj} 和 w_{sj} 分别为随机变量 $\tilde{x}_{ij}$ ，$\tilde{y}_{rj}$ 和 $\tilde{b}_{sj}$ 的随机扰动项，假定 ε_{ij} ，η_{rj} 和 w_{sj} 满足均值为零的正态分布，则其数学表述为 $\varepsilon_{ij} \to N(0,(\sigma_{ij}^{x})^2)$ ，$\eta_{rj} \to N(0,(\sigma_{rj}^{y})^2)$ ，$w_{sj} \to N(0,(\sigma_{sj}^{b})^2)$ ，这里 $(\sigma_{ij}^{x})^2$ ，$(\sigma_{rj}^{y})^2$ 和 $(\sigma_{sj}^{b})^2$ 分别表示相应的方差.

在以上的假设下，立即可以得到 $\tilde{x}_{ij}$ ，$\tilde{y}_{rj}$ 和 $\tilde{b}_{sj}$ 这些量的分布为

$$\tilde{x}_{ij} \to N(0,(\sigma_{ij}^{x})^2) ,$$
$$\tilde{y}_{rj} \to N(y_{rj},(\sigma_{rj}^{y})^2) ,$$
$$\tilde{b}_{sj} \to N(b_{sj},(\sigma_{sj}^{b})^2)$$

其中，x_{ij} ，y_{rj} 和 b_{sj} 分别是 $\tilde{x}_{ij}$ ，$\tilde{y}_{rj}$ 和 $\tilde{b}_{sj}$ 的期望值.

根据正态分布的线性运算还是正态分布的事实，立即得到如下推论:

推论 1 $({}_i\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda - \tilde{x}_{ik})$ ，$(\tilde{y}_{rk} - {}_r\tilde{\boldsymbol{y}}\lambda)$ 和 $({}_s\boldsymbol{b}\lambda - \tilde{b}_{sk})$ 满足正态分布，数学表述如下

$$({}_i\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda - \tilde{x}_{ik}) \to N({}_i\boldsymbol{x}\lambda - x_{ik},(\sigma_{ii}^{\mathrm{II}}(\lambda))^2)$$
$$(\tilde{y}_{rk} - {}_r\tilde{\boldsymbol{y}}\lambda) \to N(y_{rk} - {}_r\boldsymbol{y}\lambda,(\sigma_{rr}^{\mathrm{OO}}(\lambda))^2)$$
$$({}_s\tilde{\boldsymbol{b}}\lambda - \tilde{b}_{sk}) \to N({}_s\boldsymbol{b}\lambda - b_{sk},(\sigma_{ss}^{\mathrm{UU}}(\lambda))^2)$$

其中，$(\sigma_{ii}^{\mathrm{II}}(\lambda))^2$ 表示 $({}_i\tilde{x}\lambda - \tilde{x}_{ik})$ 的方差，$(\sigma_{rr}^{\mathrm{OO}}(\lambda))^2$ 和 $(\sigma_{ss}^{\mathrm{UU}}(\lambda))^2$ 与之类似，为相应项的

方差. 同时约定 ${}_i\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda = \sum_j \tilde{x}_{ij}\lambda_j$，${}_r\tilde{\boldsymbol{y}}\lambda = \sum_j \tilde{y}_{rj}\lambda_j$ 及 ${}_s\tilde{\boldsymbol{b}}\lambda = \sum_j \tilde{b}_{sj}\lambda_j$，下同并不再赘述.

进一步考察 $({}_i\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda - \tilde{x}_{ik})$，$(\tilde{y}_{rk} - {}_r\tilde{\boldsymbol{y}}\lambda)$ 和 $({}_s\tilde{\boldsymbol{b}}\lambda - \tilde{b}_{sk})$ 的方差–协方差矩阵有以下推论:

推论 2　$({}_i\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda - \tilde{x}_{ik})$，$(\tilde{y}_{rk} - {}_r\tilde{\boldsymbol{y}}\lambda)$ 和 $({}_s\tilde{\boldsymbol{b}}\lambda - \tilde{b}_{sk})$ 的方差–协方差矩阵是 λ 的函数，有以下的形式

$$\boldsymbol{\Lambda}(\lambda) = \begin{pmatrix} [\boldsymbol{\Lambda}_{ii'}^{\mathrm{II}}(\lambda)]_{m\times m} & [\boldsymbol{\Lambda}_{ir}^{\mathrm{IO}}(\lambda)]_{m\times p} & [\boldsymbol{\Lambda}_{is}^{\mathrm{IU}}(\lambda)]_{m\times q} \\ [\boldsymbol{\Lambda}_{ir}^{\mathrm{IO}}(\lambda)]_{p\times m}^{\mathrm{T}} & [\boldsymbol{\Lambda}_{rr'}^{\mathrm{OO}}(\lambda)]_{p\times p} & [\boldsymbol{\Lambda}_{rs}^{\mathrm{OU}}(\lambda)]_{p\times q} \\ [\boldsymbol{\Lambda}_{is}^{\mathrm{IU}}(\lambda)]_{q\times m}^{\mathrm{T}} & [\boldsymbol{\Lambda}_{rs}^{\mathrm{OU}}(\lambda)]_{q\times p}^{\mathrm{T}} & [\boldsymbol{\Lambda}_{ss'}^{\mathrm{UU}}(\lambda)]_{q\times q} \end{pmatrix}_{(m+p+q)\times(m+p+q)}$$

其中，$[\boldsymbol{\Lambda}_{ii'}^{\mathrm{II}}(\lambda)]_{m\times m}$ 表示 $({}_i\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda - \tilde{x}_{ik})$ 的方差，$[\boldsymbol{\Lambda}_{ir}^{\mathrm{IO}}(\lambda)]_{m\times p}$ 表示 $({}_i\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda - \tilde{x}_{ik})$ 和 $(\tilde{y}_{rk} - {}_r\tilde{\boldsymbol{y}}\lambda)$ 的协方差，矩阵中的其他量与之同理可得.

本文假定的合理性在于统计学的中心极限定理. 不仅如此，经典的统计学和计量经济学方法都采用了与本文一致的假定，即假设随机扰动项满足正态分布，但本文中由于弱可处置性的存在，所以这些扰动项之间并不是独立的，而表现了由生产关系而体现出的相关关系. 因此，式(4) 定义的结果包含在以上确定 $\Lambda(\lambda)$ 的过程中. 对于同一个 DMU 来说，它包含了两个层面的含义: 其一，每类量不同种之间的关系，比如对于第 j 个 DMU，第 i 种投入与第 i' 种投入之间的关系(其中 $i \neq i'$，注意到当 $i = i'$ 时，体现为各量自身由随机误差所解释的方差关系). 这些关系体现在相应的协方差阵中，即由 $\Lambda(\lambda)$ 矩阵对角线上矩阵的对角元素体现; 其二，不同类变量之间的关系，比如对于第 j 个 DMU，第 i 种投入与第 r 种期望产出之间的关系，或第 r 种期望产出与第 s 种非期望产出之间的关系. 这些关系体现在相应的协方差阵中，即由 $\Lambda(\lambda)$ 矩阵对角线上矩阵的非对角元素体现. 注意到这些关系就包含了污染物可弱处理的概念，因为其体现了期望产出与非期望产出之间的关系，这些关系就是对产出弱可处置性的量化. 对于不同的 DMU 来说: 考察不同的 DMU 各类量之间的关系，其体现在相应的协方差阵中，表现为 $\Lambda(\lambda)$ 矩阵的非对角线上的矩阵元素，即当 $j \neq j'$ 时的情况. 如果不同的 DMU 生产过程是互不干扰的，可以认为这些量是独立的，即 $\Lambda(\lambda)$ 矩阵的非对角线上的矩阵的非对角线元素为零.

2.2　与概率模型等价的确定性模型

在以上的假设推论准备下，可以得到与原概率模型等价的确定性模型，这是模型求解重要的一步. 以下通过两个引理引出等价模型.

引理 1　原优化模型的目标函数等价于如下的积分形式，其数学表述如下.

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{m}({}_i\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda \leqslant \tilde{x}_{ik})\bigcap_{r=1}^{p}({}_r\tilde{\boldsymbol{y}}\lambda \geqslant \tilde{y}_{rk})\bigcap_{s=1}^{q}({}_s\tilde{\boldsymbol{b}}\lambda \leqslant \tilde{b}_{ik})\right\} = P\left\{\vec{\tilde{\boldsymbol{X}}} \leqslant \vec{\boldsymbol{0}}_{m\times 1}, \vec{\tilde{\boldsymbol{Y}}} \leqslant \vec{\boldsymbol{0}}_{p\times 1}, \vec{\tilde{\boldsymbol{Z}}} \leqslant \vec{\boldsymbol{0}}_{q\times 1}\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(2\pi)^{(m+p+q)/2}|\boldsymbol{\Lambda}(\lambda)|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{\widetilde{\boldsymbol{H}}} - \vec{\boldsymbol{H}})^{\mathrm{T}}[\Lambda(\lambda)]^{-1}(\vec{\widetilde{\boldsymbol{H}}} - \vec{\boldsymbol{H}})\right\}\mathrm{d}\vec{\widetilde{\boldsymbol{H}}}$$

其中

$$\vec{\tilde{\boldsymbol{X}}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{x}_{ij} - \tilde{x}_{ik}\right)_{m\times 1}, \quad \vec{\tilde{\boldsymbol{Y}}} = \left(\tilde{y}_{rk} - \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{y}_{rj}\right)_{p\times 1}, \quad \vec{\tilde{\boldsymbol{B}}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{b}_{sj} - \tilde{b}_{sk}\right)_{q\times 1},$$
$$\vec{\widetilde{\boldsymbol{H}}} = (\vec{\tilde{\boldsymbol{X}}}, \vec{\tilde{\boldsymbol{Y}}}, \vec{\tilde{\boldsymbol{B}}})^{\mathrm{T}}, \quad \vec{\boldsymbol{H}} = \mathrm{E}(\vec{\widetilde{\boldsymbol{H}}})$$

证明　注意到交集的定义，原模型目标函数可变形为

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\bigcap_{i=1}^{m}({}_{i}\tilde{x}\lambda\leqslant\tilde{x}_{ik})\ \bigcap_{r=1}^{p}({}_{r}\tilde{y}\lambda\geqslant\tilde{y}_{rk})\ \bigcap_{s=1}^{q}({}_{s}\tilde{b}\lambda\leqslant\tilde{b}_{ik})\right\}\\
&=P\{(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{x}_{1j}\leqslant\tilde{x}_{1k}),(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{x}_{2j}\leqslant\tilde{x}_{2k}),\cdots,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{x}_{mj}\leqslant\tilde{x}_{mk}),\\
&\quad(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{y}_{1j}\geqslant\tilde{y}_{1k}),(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{y}_{2j}\geqslant\tilde{y}_{2k}),\cdots,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{y}_{pj}\geqslant\tilde{y}_{pk}),\\
&\quad(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{b}_{1j}\leqslant\tilde{b}_{1k}),(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{b}_{2j}\leqslant\tilde{b}_{2k}),\cdots,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{b}_{qj}\leqslant\tilde{b}_{qk})\}\\
&=P\{(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{x}_{1j}-\tilde{x}_{1k}\leqslant 0),(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{x}_{2j}-\tilde{x}_{2k}\leqslant 0),\cdots,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{x}_{mj}-\tilde{x}_{mk}\leqslant 0),\\
&\quad(\tilde{y}_{1k}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{y}_{1j}\leqslant 0),(\tilde{y}_{2k}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{y}_{2j}\leqslant 0),\cdots,(\tilde{y}_{pk}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{y}_{pj}\leqslant 0),\\
&\quad(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{b}_{1j}-\tilde{b}_{1k}\leqslant 0),(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{b}_{2j}-\tilde{b}_{2k}\leqslant 0),\cdots,(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{b}_{qj}-\tilde{b}_{qk}\leqslant 0)\}\\
&=P\{\overrightarrow{\tilde{X}}\leqslant\vec{\mathbf{0}}_{m\times1},\overrightarrow{\tilde{Y}}\leqslant\vec{\mathbf{0}}_{p\times1},\overrightarrow{\tilde{B}}\leqslant\vec{\mathbf{0}}_{q\times1}\}
\end{aligned}
$$

结合引理 1 中对符号的说明，由假设及其推论知，$\overrightarrow{\tilde{X}}$，$\overrightarrow{\tilde{Y}}$ 和 $\overrightarrow{\tilde{B}}$ 满足联合正态分布，其联合均值为 $\overrightarrow{\boldsymbol{H}}$，联合方差阵为 $\Lambda(\lambda)$. 由此根据多维正态分布函数的密度公式，得到如引理 1 中的结论. 证毕.

引理 2 原优化模型的约束条件等价于如下的确定性公式，其数学表述为

$$P\{{}_{i}\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda<\tilde{x}_{ik}\}\geqslant 1-\xi\Leftrightarrow{}_{i}\boldsymbol{x}\lambda\leqslant x_{ik}+\sigma_{ii}^{\mathrm{II}}(\lambda)\Phi^{-1}(\xi),$$
$$P\{\tilde{y}_{rk}<{}_{r}\tilde{\boldsymbol{y}}\lambda\}\geqslant 1-\xi\Leftrightarrow y_{rk}\leqslant{}_{r}\boldsymbol{y}\lambda+\sigma_{rr}^{\mathrm{OO}}(\lambda)\Phi^{-1}(\xi),$$
$$P\{{}_{s}\tilde{\boldsymbol{b}}\lambda<\tilde{b}_{sk}\}\geqslant 1-\xi\Leftrightarrow{}_{s}\boldsymbol{b}\lambda\leqslant b_{sk}+\sigma_{ss}^{\mathrm{UU}}(\lambda)\Phi^{-1}(\xi)$$

证明 这里以其中的第 1 个等价式为例，后两个以此类推.

原约束条件可变形为

$$P\left\{\frac{{}_{i}\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda-\tilde{x}_{ik}-({}_{i}\boldsymbol{x}\lambda-x_{ik})}{\sigma_{ii}^{II}(\lambda)}<\frac{-({}_{i}\boldsymbol{x}\lambda-x_{ik})}{\sigma_{ii}^{II}(\lambda)}\right\}\geqslant 1-\xi$$

令

$$\tilde{z}=\frac{{}_{i}\tilde{\boldsymbol{x}}\lambda-\tilde{x}_{ik}-({}_{i}\boldsymbol{x}\lambda-x_{ik})}{\sigma_{ii}^{\mathrm{II}}(\lambda)}$$

可见 $\tilde{z}$ 满足标准正态分布，记为 $\tilde{z}\to N(0,1)$（简记为 Φ）. 由此，以上不等式化简为

$$\Phi\left\{\frac{-({}_{i}\boldsymbol{x}\lambda-x_{ik})}{\sigma_{ii}^{\mathrm{II}}(\lambda)}\right\}\geqslant 1-\xi$$

又由标准正态分布的性质

$$\Phi^{-1}(1-\xi)=-\Phi^{-1}(\xi)$$

以上不等式化简为

$$\frac{-({}_{i}\boldsymbol{x}\lambda-x_{ik})}{\sigma_{ii}^{\mathrm{II}}(\lambda)}\geqslant-\Phi^{-1}(\xi)$$

整理即得

$${}_{i}\boldsymbol{x}\lambda\leqslant x_{ik}+\sigma_{ii}^{\mathrm{II}}(\lambda)\Phi^{-1}(\xi)$$

证毕.

通过两个引理，原概率模型转化为可直接求解的确定性模型，如下

$$\underset{\lambda}{\mathrm{MAX}}\int_{-\infty}^{\vec{0}}\frac{1}{(2\pi)^{(m+p+q)/2}\,|\Lambda(\lambda)|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\tilde{H}}-\overrightarrow{H})^{\mathrm{T}}[\Lambda(\lambda)]^{-1}(\overrightarrow{\tilde{H}}-\overrightarrow{H})\right\}\mathrm{d}\overrightarrow{\tilde{H}}\tag{6}$$

约束条件一

$${}_{i}\boldsymbol{x}\lambda\leqslant x_{ik}+\sigma_{ii}^{\mathrm{II}}(\lambda)\Phi^{-1}(\xi),\ i=1,\cdots,m$$
$$y_{rk}\leqslant{}_{r}\boldsymbol{y}\lambda+\sigma_{rr}^{\mathrm{OO}}(\lambda)\Phi^{-1}(\xi),\ r=1,\cdots,p$$
$${}_{s}\boldsymbol{b}\lambda\leqslant b_{sk}+\sigma_{ss}^{\mathrm{UU}}(\lambda)\Phi^{-1}(\xi),\ s=1,\cdots,q$$
$$\sum_{j}\lambda_j=1,\ \lambda_j\geqslant 0,\ \lambda_k=0$$

约束条件二

$$\sum_{j}\lambda_j=1,\ \lambda_j\geqslant 0,\ \lambda_k=0$$

2.3　模型的等价变换及其求解方法

以上的模型(6)从形式上较难辨识该模型的几何意义和求解方法，为此将以上模型目标函数中的被积变量作如下的线性变换

$$\tilde{x}_i^* = \frac{\sum_j \tilde{x}_{ij}\lambda_j - \tilde{x}_{ik} - \left(\sum_j x_{ij}\lambda_j - x_{ik}\right)}{\sqrt{\sum_j (\sigma_{ij}^x\lambda_j)^2 + (\sigma_{ik}^x)^2}},$$

$i = 1, 2, \cdots, m$

$$\tilde{y}_r^* = \frac{\tilde{y}_{rk} - \sum_j \tilde{y}_{rj}\lambda_j - \left(y_{rk} - \sum_j y_{rj}\lambda_j\right)}{\sqrt{\sum_j (\sigma_{rj}^y\lambda_j)^2 + (\sigma_{rk}^y)^2}},$$

$r = 1, 2, \cdots, p$

$$\tilde{b}_s^* = \frac{\sum_j \tilde{b}_{sj}\lambda_j - \tilde{b}_{sk} - \left(\sum_j b_{sj}\lambda_j - b_{sk}\right)}{\sqrt{\sum_j (\sigma_{sj}^b\lambda_j)^2 + (\sigma_{sk}^b)^2}},$$

$s = 1, 2, \cdots, q$

这些变换将以上的变量标准化，其中 σ_{ij}^x 表示第 j 个决策单元投入变量 x 的第 i 个分量的标准差，其他的标准差依次类推. 这时得到的各个变量间的方差—协方差矩阵将成为相关系数矩阵，这直接体现了弱可处置性是通过相关系数阵引入模型的原理. 由此，得到如下的模型目标函数

$$\int_{-\infty}^{v_q^b}\cdots\int_{-\infty}^{v_1^b}\int_{v_p^y}^{+\infty}\cdots\int_{v_1^y}^{+\infty}\int_{-\infty}^{v_m^x}\cdots\int_{-\infty}^{v_1^x} T^*\,\mathrm{d}\tilde{x}_1^*\cdots\mathrm{d}\tilde{x}_m^*\,\mathrm{d}\tilde{y}_1^*\cdots\mathrm{d}\tilde{y}_p^*\,\mathrm{d}\tilde{b}_1^*\cdots\mathrm{d}\tilde{b}_q^*$$

该目标函数是多元正态分布积分的形式，其中被积的变量从 $\tilde{x}_1^*$ 到 $\tilde{b}_q^*$ 共计 $m+p+q$ 个，被积函数为 T^*，为

$$T^* = \frac{1}{(2\pi)^{(m+p+q)/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\tilde{x}_1^*,\cdots,\tilde{x}_m^*,\tilde{y}_1^*,\cdots,\tilde{y}_p^*,\tilde{b}_1^*,\cdots,\tilde{b}_q^*\right)^{\mathrm{T}}[\rho]^{-1}\left(\tilde{x}_1^*,\cdots,\tilde{x}_m^*,\tilde{y}_1^*,\cdots,\tilde{y}_p^*,\tilde{b}_1^*,\cdots,\tilde{b}_q^*\right)\right\}$$

式中 ρ 表示以上变量的相关系数矩阵，这个矩阵来自于对样本数据的估计，是一个前定的量，不含待定量 λ_j，$j = 1, 2, \cdots, n$.

同时注意到每个变量的积分限依次记为 v_1^x，$\cdots$，v_m^x，v_1^y，$\cdots$，v_p^y，v_1^b，$\cdots$，v_q^b，以其中的 v_i^x，v_r^y 和 v_s^b 为例，有

$$v_i^x = \frac{\sum_j x_{ij}\lambda_j - x_{ik}}{\sqrt{\sum_j (\sigma_{ij}^x\lambda_j)^2 + (\sigma_{ik}^x)^2}},$$

$$v_r^y = \frac{\sum_j y_{rj}\lambda_j - y_{rk}}{\sqrt{\sum_j (\sigma_{rj}^y\lambda_j)^2 + (\sigma_{rk}^y)^2}},$$

$$v_s^b = \frac{\sum_j b_{sj}\lambda_j - b_{sk}}{\sqrt{\sum_j (\sigma_{sj}^b\lambda_j)^2 + (\sigma_{sk}^b)^2}}$$

注意到含有 y 的量的变化与其他的两类变量有不同. 通过以上的变换可见，将包含在方差—协方差矩阵中的待定变量 λ_j 变换出来，出现在积分限中，以上的变换过程就是实现多元正态函数标准化的过程. 这个变化有助于简化运算和使目标函数的意义更加明朗: 本文的目标函数在 1.1 节给出的随机占有的定义下展开，而后给出了其基于概率的表达，并通过相关系数矩阵，变量间的弱可处置性就包含在这个概率表达中; 在假定变量收集的误差满足正态分布的假设下，将概率函数具体化为多元正态分布函数，并进一步化为以相关系数矩阵为方差—协方差阵的标准形式; 这个函数通过 λ_j 的不同组合，使得积分限发生变化，进而可以求得满足“占优”的风险最大的那个组合，它就是本文排序决策单元的依据.

本文的算法依据于标准形式，可以采用遗传算法、神经网络求解或网格搜索等方法，找到使得目标函数最大的那个 λ_j 的组合. 考虑到运算的通用性和方便性，本文直接依托于 Matlab 2008a 以上版本自带的搜索工具箱进行搜索. 它是一个图形用户的界面，方便于这个较为复杂的非线性规划问题的求解，可以根据自定的精度和搜索时间，控制算法的实现时间，这也为工程应用和提供满意解(而非最优解)提供了便利. 在 Matlab 中运行命令 psearchtool，可以直接打开该工具箱，关于该工具箱较为详尽的使用说明，可参见文献[25].

2.4　模型的求解步骤

第 1 步　收集数据，按照投入、期望产出和非

期望产出分成 3 类变量，并整理成相应的向量形式;

第 2 步 确定随机性方差，即随机误差项 ε_{ij}，η_{rj} 和 w_{sj} 的方差水平. 注意到 DMU 收集的是截面数据，难以通过一次实现值测定随机性的方差，这往往需要根据历史数据或既往经验假定或给定方差水平;

第 3 步 根据样本计算相关系数矩阵 ρ，对着这个矩阵的元素做显著性检验;

第 4 步 求得用 λ_j 的组合表达的误差限 v_i^x，v_r^y 和 v_s^b；

第 5 步 设定置信系数 ξ，应用 matlab 2008a 以上版本中的直接搜索工具箱求解等价的确定性规划模型(6)，计算出 λ 和各个 DMU 的风险值，根据风险值的大小进行效率排序. 在这一步中涉及到 DMU 是否满足第一组前 3 个约束条件的判断，如果不满足，则转入应用第二组约束条件，并将结果加星号标记以示潜在的效率点.

3 模型的实证分析

3.1 数据选取

考虑到环境效率评价数据具有典型的非期望产出性质及非期望产出弱可处置的特点，本文选用中国省级环境效率评价数据作模型的实证分析. 首先，选择 6 个省级指标用于该分析，分别为能源消耗总量($_1\boldsymbol{x}$)和年末从业人员总数($_2\boldsymbol{x}$)做投入变量，GDP($\boldsymbol{y}$)作为期望产出，而工业废气排放量($_1\boldsymbol{b}$)、工业废水排放量($_2\boldsymbol{b}$)和工业固体废弃物排放量($_3\boldsymbol{b}$)作为非期望产出. 注意到这 6 类指标直接联系着生产过程，与环境效率评价直接相关，并有很多代表性文献在处理环境效率的评价问题时选择了以上部分或全部的指标，比如杨俊等[22]和刘勇等[23]的研究. 然后，选择北京等 10 个省市 2009 年的数据进行分析，该数据来源于《中国统计年鉴(2010)》和《中国能源统计年鉴(2010)》.

3.2 实证目标

这里的实证研究旨在讨论以下几个问题:

1) 本文提出的随机 DEA 模型与经典的处理非期望产出的确定性 DEA 模型在效率评价方面有怎样的异同?

2) 本文提出的考虑弱可处置性的模型与不考虑弱可处置性时，结果有怎样的不同?

3) 随机误差方差水平的不同会对模型的评价结果产生怎样的影响?

3.3 实证方案设计与结果分析

按照以上实证目标，设计如下的实证步骤:

首先，给定不同的随机性方差水平，该水平设定为如下的含有参数 θ 的表达式

$$\begin{aligned}&\sigma_{ij}^x = \theta\% \cdot x_{ij},\\&\sigma_{rj}^y = \theta\% \cdot y_{rj},\\&\sigma_{sj}^b = \theta\% \cdot b_{sj}\end{aligned} \tag{7}$$

分别设定 θ 值为 1，5，10 和 50，以期回答实证目标中第 3 个问题. 注意到 θ 值越大，反映数据收集的误差越大，也即数据可能越不准确，这是方差水平的物理意义，用以刻画统计数据的质量.

按照 2.4 中的求解步骤，将其中的置信系数 ξ 取为 0.4，这时对得到的结果将有 60% 的把握认定是系统的真实结果. 注意到 ξ 如果取得太大，结果可信性将很低，如果取得太小，则结果过于保守，得到的结论将没有任何指导决策和判断的价值. 由此得到考虑弱可处置性的效率值及其排序情况. 同时，在表的最后一列，选择经典的含有非期望产出的确定性 DEA 模型作为基准模型，本文中选择的模型由 Zhu[24] 提出，具体形式如下(其符号与文献[24]的符号略有修改，与本文定义的符号保持一致)

$$\begin{aligned}&\text{MAX } h\\&\text{s.t. } {}_r\boldsymbol{y}\lambda \geqslant h \cdot y_{rk},\ r = 1,\cdots,p;\\&\quad {}_s\boldsymbol{b}\lambda \geqslant h \cdot b_{sk},\ s = 1,\cdots,q;\\&\quad {}_i\boldsymbol{x}\lambda \leqslant x_{ik},\ i = 1,\cdots,m;\\&\quad \sum_j \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geqslant 0 \text{ 及 } \lambda_k = 0\end{aligned}$$

由上面的公式可见: 它是一个产出指向型的模型，其评价特征是结果值越大表示效率越低，同时该模型也体现了将弱可处置性假定为一致的规律进行建模的思路，这体现在约束条件的第 2 个方程中. 选用该模型与本文的模型进行比照，以期回答实证目标中第 1 个问题，结果如表 1 所示.

而后将所有量之间的相关系数设为零，即不考虑弱可处置性时，模型在以上方差水平下的值，用以回答实证目标第 2 个问题，结果如表 2 所示.

表 1　不同方差水平下“考虑弱可处置性”模型的结果列表

Table 1 Results at different variance values in the case of considering weak disposability

θ(%)	1		5		10		50		经典模型	
省份	风险值	排序	风险值	排序	风险值	排序	风险值	排序	结果值	排序
北京	0*	1	0*	1	0*	1	0.018 5*	1	1.000 00	1
山西	1	4	0.999 6	8	0.954 9	9	0.566 1	9	1.143 74	5
吉林	$9.12\times10^{-6*}$	2	0.207 3	4	0.346 1	5	0.405 4	6	1.132 48	4
江苏	0*	1	0.001 1*	3	0.062 9	4	0.281 9	5	1.000 00	1
福建	0.314 1	3	0.461 4	5	0.480 7	6	0.452 0	7	1.240 19	6
河南	0*	1	$1.52\times10^{-5*}$	2	0.015 2*	3	0.254 2	4	1.341 13	7
广东	0*	1	0*	1	$1.35\times10^{-5*}$	2	0.091 4	3	1.000 00	1
重庆	1	4	0.803 5	6	0.683 7	7	0.467 2	8	1.107 40	3
云南	1	4	0.997 6	7	0.920 6	8	0.570 0	10	1.106 40	2
青海	0*	1	0*	1	0*	1	0.042 1*	2	1.000 00	1

表 2　不同方差水平下“不考虑弱可处置性”模型的结果列表

Table 2　Results at different variance values in the case of not considering weak disposability

θ(%)	1		5		10		50	
省份	风险值	排序	风险值	排序	风险值	排序	风险值	排序
北京	0*	1	0*	1	0*	1	0.004 5*	2
山西	1	4	0.999 6	8	0.954 5	9	0.347 6	10
吉林	$2.26\times10^{-5*}$	2	0.204 6	4	0.296 1	5	0.129 7	5
江苏	0*	1	$3.13\times10^{-4*}$	3	0.018 3	4	0.082 6	4
福建	0.314 1	3	0.461 4	5	0.472 4	6	0.198 1	7
河南	0*	1	$5.16\times10^{-9*}$	2	$7.08\times10^{-4*}$	3	0.193 3	6
广东	0*	1	0*	1	$3.19\times10^{-8*}$	2	0.067 8	3
重庆	1	4	0.830 5	6	0.681 7	7	0.211 9	8
云南	1	4	0.997 6	7	0.920 6	8	0.303 9	9
青海	0*	1	0*	1	0*	1	$6.50\times10^{-4*}$	1

读表 1 和表 2 可以发现，对于实证的 3 个目标，有着以下的结果.

对于实证目标 1，比较经典模型和本文模型的结果可以发现: 1) 经典模型和本文提出的新 DEA 模型的结果有着相同的层面，也即都认为北京、青海、江苏和广东是环境效率较高的点，但是又有着很大的不同，比如不同点之间的排序有着差别，河南这个点的排序差异很大. 产生这些差别的原因在于模型有效性的定义，经典模型从产出径向的角度定义有效性，而本文从风险的角度定义有效性，因此在接受评价结果时，也取决于评价人选择的有效性的定义标准，对于评价的结果是取自评判标准的不同; 2) 新模型可以考虑有不同随机方差的情况，而经典模型没有这个能力，通过对实证目标3 的回答，可以发现能够考虑有不同随机方差的情况，事实上可以分析评价的稳健性，反映数据收集的误差会不会对评价结果产生严重的影响. 这也意味着该模型的分析能力优于确定性模型;

对于实证目标 2，纵向比较表 1 和表 2 可以发现: 1) 当假定的模型随机误差较小时，考虑弱可处置性的结果与不考虑弱可处置性的结果没有显著的差异，甚至得到的风险值都比较接近; 但当随

机误差较大时，考虑弱可处置性与不考虑时产生的结果差异较大，甚至点的排序都有了较大差异；2）由于约束条件不变，所以考虑与不考虑弱可处置性时，边界点的判断没有变化.

对于实证目标 3，通过横向观察两表发现：1）随着 θ 值的增加，也即模型的随机误差变大，每个 DMU 的风险值变化是不一致的，当原来的风险值低时，风险值随 θ 变大而变大，而当原来的风险值高时，随 θ 变大而变小，这意味着随机误差的增大增加了结果的不确定性，使得每个 DMU 的风险值趋向于一致；2）随着 θ 值的增加，模型结果的差别开始显现，注意到当 θ 值为 1 时，很多点有同样的风险值，难以明确区分和排序，当 θ 值变大时，点与点之间有了较为明确的区分，并且排序也开始发生变化，有些点比较稳健，比如北京和青海，一直是有效率的点，而有些点就不稳健，比如河南，从开始排序靠前变得排序较后；这个差异也反映了如果数据的收集误差大，则有些点的评价依然是稳定的，而有些点就不是这样，这里分析随机误差变化的情况还多了一层判断结果稳健性的意义.

4 结束语

本文在确定性松弛变量的基础上，提出了可以刻画随机性概率的 DEA 模型. 该模型相比于既有的处理非期望产出及考虑其弱可处置性的模型有 3 个方面突出的特点：第 1，应用联合概率函数刻画了认定占优和有效率的风险，由于这个风险值在 0 — 1 区间，通过比较风险值的大小可以对决策单元进行效率的排序，认定其有效率风险小的排在前面，风险大的排在后面；第 2，将方差 — 协方差矩阵引入模型，将弱可处置性的规律通过相关性度量，并在目标函数的联合概率中表达. 本文的模型建立在对各个产出逐一分析的基础上，在细致程度与合理性方面超越了既有的考察弱可处置性的模型；第 3，模型的目标函数不随变量的单位变化而变化，具有尺度不变性. 通过模型的实证分析，考察了随机误差和考虑弱可处置性对于模型结果的影响，结果证实了本文模型是实用的，可以同时分析随机性和弱可处置性，相比于既有的只能分析其中一个方面的模型，具有更加广泛的适用性和更强的分析能力.

就模型的适用性方面，本文刻画的弱可处置性依托于相关系数，有助于分析线性的相关关系，当这种关系显著时，本模型处理的弱可处置性的结果是有效的，但是当这种关系不显著时，需要新的模型刻画非线性的相关关系，这需要进一步的研究.

参 考 文 献：

[1] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units [J]. European Journal of Operational Research, 1978, 2(6): 429 – 444.

[2] Banker R, Charnes A, Cooper W W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis [J]. Management Science, 1984, 30(9): 1078 – 1092.

[3] Scheel H. Undesirable outputs in efficiency valuations [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 132(2): 400 – 410.

[4] 马赞甫，刘妍珺. 四类 DEA 模型相互关系及其在计算中的应用 [J]. 系统工程学报，2011, 26(4): 558 – 565.
Ma Zanfu, Liu Yanjun. Mutual relation among four DEA models and its application in computation [J]. Journal of System Engineering, 2011, 26(4): 558 – 565. (in Chinese)

[5] Kuosmanen T, Johnson A L. Data envelopment analysis as nonparametric least squares regression [J]. Operations Research, 2010, 58(1): 149 – 160.

[6] Fare R, Shawna G, Lovell K, et al. Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: A nonparametric approach [J]. Review of Economics and Statistics, 1989, 71(1): 90 – 98.

[7] Hailu A, Terrence S A. Non-parametric productivity analysis with undesirable outputs: An application to the Canadian pulp and paper industry [J]. American Journal of Agricultural Economics, 2001, 83(3): 805 – 816.

[8] Seiford L M, Zhu J. Modeling undesirable factors inefficiency evaluation [J]. European Journal of Operational Research,

2002, 142(1): 16 - 20.

[9] Sharp J A, Meng W, Liu W. A modified slacks-based measure model for data envelopment analysis with 'natural' negative outputs and inputs [J]. The Journal of the Operational Research Society, 2007, 58(12): 1672 - 1677.

[10] Esmaeili M. A slacks-based measure of efficiency for the case of exogenously fixed factors [J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(3): 4822 - 4825.

[11] 宋马林, 王舒鸿, 刘庆杰, 等. 一种改进的环境效率评价 ISBM-DEA 模型及其算例 [J]. 系统工程, 2010, 28(10): 91 - 96.

Song Malin, Wang Shuhong, Liu Qingjie, et al. A new ISBM-DEA model on environmental efficiency measurement and its numerical examples [J]. Systems Engineering, 2010, 28(10): 91 - 96. (in Chinese)

[12] Kopp R, Smith V, Vaugham W. StochasticCost Frontiers and Ferceived Technical Inefficiency [M] // Smith K V. (eds) Advances in Applied Micro-Economics, JAI press, 1980.

[13] Pittman R. Multilateral productivity comparisons with undersirable outputs [J]. The Economic Journal, 1983, 93(372): 883 - 891.

[14] Fare R, Shawna G, Lovell K, et al. Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: A nonparametric approach [J]. Review of Economics and Statistics, 1989, 71(1): 90 - 98.

[15] Tyteca D. Linear programming models for the measurement of environment performance of firms-concepts and empirical results [J]. Journal of productivity analysis, 1997, 8(2): 183 - 197.

[16] Ernest R M, Andres P T, Francesc H S. The calculation of shadow prices for industrial wastes using distance functions: An analysis for Spanish ceramic pavements firms [J]. International journal of production economics, 2001, 69(3): 277 - 285.

[17] Yang H L, Pollitt M. DistinguishingWeak and Strong Disposability among Underisable Outputs in DEA: The Example of the Environment Efficiency of Chinese Coal-fired Power Plants [R]. University of Cambridge Working Papers in Economics, 2007.

[18] Simar L, Wilson P W. Sensitivity analysis of efficiency scores: How to bootstrap in nonparametric frontier models [J]. Management Science, 1998, 44(1): 49 - 61.

[19] Cooper W W, Deng H, Huang Z M, et al. Chance constrained programming approaches to technical efficiencies andinefficiencies in stochastic data envelopment analysis [J]. Journal of the operational research society, 2002, 53(12): 1347 - 1356.

[20] 郭亚军, 马凤妹, 董庆兴. 无量纲化方法对拉开档次法的影响分析 [J]. 管理科学学报, 2011, 14(5): 19 - 28.

Guo Yajun, Ma Fengmei, Dong Qingxing. Analysis of influence of dimensionless methods on deviation maximization method [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(5): 19 - 28. (in Chinese)

[21] Tone K. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 130(3): 498 - 509.

[22] 杨　俊, 邵汉华, 胡　军. 中国环境效率评价及其影响因素实证研究 [J]. 中国人口·资源与环境, 2010, 20(2): 49 - 55.

Yang Jun, Shao Hanhua, Hu Jun. Empiricalstudy on evaluation and determinants of environmental efficiency of China [J]. China Population, Resources and Environment, 2010, 20(2): 49 - 55. (in Chinese)

[23] 刘　勇, 李志祥, 李　静. 环境效率评价方法的比较研究 [J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(1): 84 - 92.

Liu Yong, Li Zhixiang, Li Jing. Comparativestudy on DEA methods of environmental efficiency measurement [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2010, 40(1): 84 - 92. (in Chinese)

[24] Zhu J. Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: Data Envelopment Analysis with Spreadsheets and DEA Excel Solver [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003: 99 - 103.

[25] 雷英杰, 张善文, 李续武, 等. Matlab 遗传算法工具箱及应用 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2009: 208 - 253.

Lei Yingjie, Zhang Shanwen, Li Xuwu, et al. Matlab Toolbox of Genetic Algorithm and Its Application [M]. Xi'an: Xian Electronic Science & Technology University, 2009: 208 - 253. (in Chinese)

Random DEAmodel considering the weak disposability of undesirable outputs

LI Yong-li, WU Chong

School of Management, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China

Abstract: Considering that there are undesired outputs in many production processes and the fact that the data for the efficiency evaluation contain random errors, a random DEA model was built for the above two problems. The model defined the priority of the decision-making units through introducing the concept of risk and depicted the weak disposability of the undesired outputs by applying the "correlation" concept from statistics. This paper combined the randomness and the weak disposability in the framework of optimization theory to build the evaluation model that could investigate both. The empirical analysis investigated the similarities and differences of the model's evaluation results under different levels of random errors and under the consideration of weak disposability or not. The results showed that the model can solve the problem of undesirable outputs and random errors in the data. In conclusion, the model, with broad applicability, is superior to the existing models.

Key words: undesirable output; weak disposability; randomness; DEA model

(上接第 16 页)

Information organization structure for online group discussion

LI Jia[1,2], ZHANG Peng-zhu[2], LIU Jing-fang[2], LÜ Ying-jie[2], ZHANG Xiao-yan[2]

1. School of Business, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China;
2. Antai College of Economics & Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China

Abstract: While online discussion platforms have been widely used and received a lot of attention in the information systems communities, its information organization structure is still in the original form. Research that explains what kind of information organization structure is more suitable for online discussion is rare and confused if any. Thus a theory for optimal information organization in online group discussion is highly desirable. In this study, we follow the perspective of task-technology fitness, describe the fitness between tasks and information organization structures from the three perspectives of communication, process structuring, and information processing, and predict group performances based on task-technology fit condition. We also designed an experiment to validate if a match between task and information organization structure will lead to increased performance. The results indicate that for idea generation tasks, using a groupware with linear structures will lead to higher group performances compared to tree structures. On the other hand, for judgment tasks, using a groupware with tree structures will lead to higher group performances compared to linear structures. The proposed theory and method is extendable, which means we can evaluate the fitness between new task types and unseen technology, and predict the group performances.

Key words: online group discussion; group support systems; information organization structure; task-technology fitness; complexity