第 17 卷第 9 期　　管 理 科 学 学 报　　Vol. 17 No. 9
2014 年 9 月　　JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA　　Sep. 2014

存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题①

胡茂林[1]，徐维军[2]，刘幼珠[2]
(1. 淮阴师范学院数学科学学院，淮安 223300; 2. 华南理工大学工商管理学院，广州 510641)

摘要: 在经典的 Karp 在线租雪橇模型的基础上，提出并研究了存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题. 首先，给出该问题的最优离线策略并分析最优离线费用与市场利率的关系. 其次，应用在线问题之竞争分析的方法考虑了该问题的最优在线策略: 针对离线对手可随时停止使用资产或设备使得承租人陷于刚刚买入而又不再使用的高风险之中的在线特征，提出了风险均衡策略; 根据在线算法竞争比分析和求解原理，给出了风险均衡策略的竞争比并证明了这一竞争比是该问题的最优竞争比. 最后，对最优竞争比中相关变量的单调性进行了分析，结果表明: 市场利率的引入和租赁对象的多单位化能够降低问题的竞争比，从而提高在线租赁决策的效率.

关键词: 多重在线租赁问题; 连续松弛; 市场利率; 风险均衡策略; 竞争比
中图分类号: F224.0　**文献标识码:** A　**文章编号:** 1007 - 9807(2014)09 - 0029 - 11

0 引 言

随着经济的高速发展，租赁业已逐渐成为拉动内需的有效手段和“金钥匙”. 相关数据显示: 2009 年，我国融资租赁业务总量达到 3 700 亿元人民币，比 2008 年增长了 138.7%; 2011 年年底全部融资租赁合同余额为 9 300 亿元人民币，比上年的 7 000 亿元增长 32.9%. 可谓中国融资租赁行业发展迅速，同时，租赁业是国家商品流通的主渠道之一，在刺激投资需求、推动信用消费、拉动整个国民经济等方面发挥着独特的作用，逐渐成为经济活动中常见的投资方式之一.

但是，现实世界变化万千，在租赁投资过程中总是存在某些不可预测的因素，如果这些因素对租赁投资决策影响很大，应该如何优化该问题呢? 尤其是当租赁决策中越来越多地呈现出在线特点时，这是急需解决的问题. 近年来，最优化领域中兴起的一个新方向——在线问题与竞争算法，能够对该类在线问题给予有效的刻画和满意的解答[1-2]. 在线租赁算法源于 Karp[3] 在理论计算机科学领域提出的“租雪橇”问题: 该模型假设某在线人要去滑雪场滑雪，但并不清楚自己会滑多少天，在滑雪场他可以选择购买或租用雪橇的策略，因此，决定何时采用何种策略就成为该在线者决策的关键了. 在此问题中，假设租用一副雪橇每天的租金为 c，购买一副雪橇的价格为 P ($P > c, P/c = s$). 一旦在线者买下一副雪橇就不必再支付任何租赁费用了. Karp 应用在线问题之竞争分析的方法证明了该问题的最优策略: 在前 $s-1$ 天采取一直租赁的策略，之后若继续滑雪则采取购买雪橇的策略，得到的最优竞争比是 $2-1/s$.

随着人们研究的深入，逐渐发现在租赁市场的投融资活动中，决策环境往往具有很强的在线动态特征. 于是，学者们对经典的 Karp 租雪橇模型进行了改进和推广，结合实际融资租赁中伴随

① 收稿日期: 2012 - 04 - 18; 修订日期: 2013 - 07 - 13.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70801027); 教育部人文社会科学研究规划基金资助项目(10YJA630062); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2012ZZ0035).
作者简介: 胡茂林(1963—)，男，宁夏固原人，教授. Email: humaolin2000@163.com

的随机性、利率、价格变动、交易成本、风险等市场因素，给出更符合实际问题的最优在线策略，为投资者决策提供一定的理论参考. 如 Karlin 等[4]学者给出了在线租赁问题的随机性在线算法，并进一步引入折旧[5]等市场因素，讨论此情形下的在线租赁策略. El-Yaniv 和 Karp[6]建立了设备更新模型，考察了资本市场上生产商更新设备的问题，该模型可广泛地应用于供货商变更问题、菜单成本问题、融资抵押问题等. Azar 等[7]考虑了生产商面对未知的需求订单和市场不断出现生产该商品的设备时，该采取何种策略更新生产设备才能使得成本最小的问题. 之后，El-Yaniv 等[8]和 Yang 等[9]从实际经济决策角度出发，考虑了当投资者进行租赁活动时所面临的不可忽视的重要因素——利率，推广了传统的租雪橇问题进行基于利率情形下的策略设计，并给出了最优的确定性算法和最优随机性算法. 马卫民和陈国青[10]、Irani 和 Ramanathan[11]以及 Bienkowski[12]研究了购买价格波动而租赁费用不变、购买价格和租赁费用变动等情形的在线租赁问题，并分别给出了确定性算法和随机性算法及其竞争比. Fujiwara 和 Iwama[13]、Xu 等[14]分别结合未来输入具有连续性、离散性结构的概率信息研究了在线租赁决策问题. 胡茂林[15]、王扬等[16]分别考虑了可分资产、存在二手市场的在线租赁策略设计问题. 进一步，学者们认为投资者往往不是规避风险而是利用风险，有时有目的地增加风险以期望如果预测成功将获得更高的收益. 如 al-Binali[17]首先提出了著名的风险补偿模型. 接着，学者们在此基础上引入折旧、利率等因素，给出对应的确定性风险补偿模型[18-22]及其概率预期下的风险补偿模型[23-24]. 另外，传统的租雪橇问题仅仅考虑纯购买和纯租赁策略的形式，但实际投资中除纯购买和纯租赁形式外的多种租赁策略也是市场上的交易方式之一，如，张桂清等[25]、徐寅峰等[26]和 Zhang 等[27]在传统租赁模型基础上考虑以较优惠的价格租赁多个单位时间的多租赁策略. Lotker 等[28-29]从随机算法的角度对不确定因素下的多选择策略进行了分析，给出随机算法下的最优策略和竞争比. Fujiwara 等[30]从确定性角度对该问题进行了分析，并给出问题的最优下界.

从已有的文献和资料可发现，以往的在线租赁研究都是基于 Karp 模型下考虑所需设备或资产是“完整”的个体的情形而进行的讨论，然而，现实中投资者为从事某种生产经营活动而在线租用或购买多单位资产或多件设备的现象屡见不鲜，这时，经典的基于“单一完整”设备的 Karp 模型还是否适用呢? 为此，先看一个简单的例子.

“一位父亲带着两个儿子去滑雪场练习滑雪，滑雪场规定购买一副雪橇的价格是 10，而每期租用一副雪橇的租金是 1，滑雪者一旦在某一期买下了一副雪橇，则他以后再滑雪时不必再支付租赁费用. 在滑雪场这位父亲可选择为他的两个儿子租用两副雪橇或购买两副雪橇或租用一副雪橇再购买一副雪橇等策略. 那么在不知道两个儿子要练习多长时间的情况下，这位父亲应采取怎样的租赁(租或买)策略最为划算?”

为了区别于 Karp 的“单一雪橇”在线租赁模型，称这种在线租用或购买两副或两副以上雪橇的问题为多重在线租赁问题. 对于上面这个两副雪橇的多重在线租赁问题，人们自然想到 Karp 的单个雪橇的最优租赁策略，即是把两副雪橇都租用到第 9 期结束，若第 10 期两个儿子还需要继续练习时，就购买两副雪橇，竞争比是 $2 - 1/10 = 1.9$. 然而这并不是最优的策略. 事实上，若这位父亲采取在前 6 期每期都租用两副雪橇，而在第 7 期开始买下一幅雪橇，再租用一副雪橇直到第 9 期结束，当到了第 10 期再买下一副雪橇的策略，则可得到 1.75 的竞争比. 这表明多重在线租赁问题与单一雪橇的在线租赁问题相比已发生了质的变化. 另外，关于 Karp 的单一雪橇在线租赁问题的相关变形和推广研究表明，市场利率的引入虽然使得在线租赁问题的模型复杂化，但考虑存在市场利率情况下的在线策略的竞争比比无利率情况时更小，从而使得在线问题更贴近于现实，决策效果更好.

基于以上考虑，本文主要从竞争分析的角度讨论存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题.

1 竞争比定义及问题描述

1.1 竞争比定义

在在线投资决策中，投资者往往对未来的输

入信息是逐步获知的，只有在每个阶段的开始才能获取当期的输入，而在此时，投资者又必须在没有后续信息支持的情况下立即给出输出．在这个过程当中，在线算法的设计是关键，即问题的目标是对于任意输入序列为 $I = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$，要设计怎样的策略才能使得实时决策输出结果 $O = (O_1, O_2, \cdots, O_n)$ 对应的策略花费和最优离线策略花费的比值尽可能的小．通常运用竞争比概念来分析这个实时输出结果的优劣，存在可供在线者决策选择的策略集 O 和离线者发出的不确定的输入序列集 I，在线者在 O 集中的在线算法 ALG 所花费用表示为 $Cost_{\mathrm{ALG}}(I)$，离线者在 I 集中的最优算法 OPT 所花费用表示为 $Cost_{\mathrm{OPT}}(I)$，如果存在与输入 I 无关的常数 α 和 β 满足

$$Cost_{\mathrm{ALG}}(I) \leqslant \alpha Cost_{\mathrm{OPT}}(I) + \beta \tag{1}$$

就称在线算法 ALG 是 α － 竞争的（或竞争比为 α）．如果 $\beta = 0$，称算法 ALG 是严格 α － 竞争的．根据这一定义，一个在线算法的竞争为 α，就是说对任意可变的输入，这个在线算法均能保证费用不会超过最优离线费用的 α 倍．

从上述竞争比定义可以看出，竞争比分析框架模型实质上是在线者和离线者的博弈决策模型．在博弈中，在线者首先选择在线算法并告知离线对手，然后离线对手选择合适的输入．离线对手的收益就是费用比值，即在线费用和最优离线费用的比值．离线对手的目标是选择合适的输入使得费用比值尽可能的大，而在线决策者恰恰相反，它的目标是选择最优的在线算法使得费用比值尽可能的小．

1.2　问题描述

假设某投资者需要租用或购买某种连续性资产 m 单位，每单位资产在每个租用期的租金是 c，买进 1 个单位资产的费用是 P．但由于某些因素限制，投资者并不清楚知道自己需使用该资产的时间段，即使用时间 T：$T_1, T_2, \cdots, T_n$ 是由长度 n 不确定的租用时间段构成的输入序列．设金融市场上名义利率为 η，折算成每个租用期的利率为 i，即第 1 期每单位资产租金是 c，每单位资产购买价格为 P；第 2 期每单位资产的租金 c（折算成租赁初期）的折现值是 $\frac{c}{1+i}$，每单位资产的购买价格 P（折算成租赁初期）的折现值是 $\frac{P}{1+i}$；…；第 n 期每单位资产租金的折现值是 $\frac{c}{(1+i)^{n-1}}$，每单位资产购买价的折现值是 $\frac{P}{(1+i)^{n-1}}$．在每一期的开始，投资者需要做出对这 m 单位总资产是全额租用还是全额买下或者是买下一部分（可以是小数或分数）再租用一部分的决策．一旦他在某一期买下一部分资产，则以后再需用那部分资产时就不必再支付任何租赁费用了．问题的关键是投资者面对不确定的时间段 n，到底应采取怎样的策略才能使得投资决策的费用尽可能的小？

称上述问题为存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题．这里像文献 [8] 等其它讨论单一雪橇在线租赁问题的文献一样，也假定 $\frac{P}{c} = s \geqslant 2$ 是正整数，而且 $\frac{c}{P} > \frac{i}{1+i}$，即 $1 - i(s-1) > 0$．

2　最优离线策略

在本节中，考虑存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题的最优离线策略．

这一问题所对应的离线问题是租赁时间序列 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 的长度 n 是已知的．显然，对于任意已知的 n，最优离线决策必然根据下列两种情况之一做出：1）总是租用 m 单位总资产；2）把 m 单位总资产租用 t 次然后买入，其中 $0 \leqslant t \leqslant n-1$．

1）对于 $i > 0$，将 m 单位总资产租用 n 期的租用费的折现值为

$$v_1(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{cm}{(1+i)^j} = cm \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}$$

2）对于 $i > 0$，将 m 单位总资产先租用 t 期然后买入的总花费的折现值为

$$\begin{aligned} v_2(n) &= u(t) \\ &= cm \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^{t-1}} + \frac{mP}{(1+i)^t} \end{aligned} \tag{2}$$

在式（2）中利用假设 $\frac{c}{P} > \frac{i}{1+i}$ 可知，最优离线算法 OPT 决不会把 m 单位总资产租用一段时间后再买入，否则就有 $v_2(n) > mP$，其中 mP 是投资者在活动一开始就购买 m 单位总资产所花费用．

令 s^* 是租用 m 单位总资产所花租用费的折现值累计达到一开始就购买 m 单位总资产所花费用 mP 的总租用期数. 即，s^* 是关于 n 的方程 $\frac{cm[(1+i)^n-1]}{i(1+i)^{n-1}} = mP$ 的根,也就是说

$$(1+i)^{s^*-1} = \frac{1}{1-i\left(\frac{P}{c}-1\right)}$$

利用 $\frac{P}{c} = s$，则

$$s^* = 1 - \frac{\ln[1-i(s-1)]}{\ln(1+i)}$$

通过上面的分析可见，对于任意已知的 n，如果用 $V_{\mathrm{OPT}}(n)$ 表示最优离线策略的花费，可得到下面的定理 1.

定理 1 对于存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题,最优离线策略是: 当 $n < s^*$ 时一直租用 m 单位总资产; 当 $n \geqslant s^*$ 时在租赁活动的开始就直接买入 m 单位总资产，而且其最优费用为

$$V_{\mathrm{OPT}}(n) = \begin{cases} cm\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^{n-1}}, & n < s^* \\ mP, & n \geqslant s^* \end{cases} \tag{3}$$

定理 1 表明 s^* 是决策者根据已知的使用时间段 n 在活动的开始就作出是租用还是购买 m 单位资产的阈值，称其为关键时间. 关于关键时间 s^*，有下面的定理 2.

定理 2 对于存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题，关键时间

$$s^* = 1 - \frac{\ln[1-i(s-1)]}{\ln(1+i)} \tag{4}$$

是 $i(i>0)$ 的单调增加连续函数,并且

$$\lim_{i\to 0} s^* = s$$

证明 由式(4)，显然 s^* 是 $i(i>0)$ 的连续函数. 为证明其单调增加性，把式(4) 两边对 i 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}i} = \frac{(s-1)(1+i)\ln(1+i) + [1-i(s-1)]\ln[1-i(s-1)]}{(1+i)[1-i(s-1)]\ln^2(1+i)} \tag{5}$$

显然 $\frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}i}$ 的符号取决于式(5) 右边分子的符号,而其分子

$$\begin{aligned}
&(s-1)(1+i)\ln(1+i) + [1-i(s-1)]\ln[1-i(s-1)] \\
&= s\ln(1+i) - [1-i(s-1)]\ln(1+i) + [1-i(s-1)]\ln[1-i(s-1)] \\
&= s\ln(1+i) - [1-i(s-1)]\ln\frac{1+i}{1-i(s-1)} = \ln\left(1+\frac{is}{s}\right)^s - \ln\left(1+\frac{is}{1-i(s-1)}\right)^{1-i(s-1)} \\
&= \ln\frac{\left(1+\frac{is}{s}\right)^s}{\left(1+\frac{is}{1-i(s-1)}\right)^{1-i(s-1)}}
\end{aligned} \tag{6}$$

令 $f(x) = \left(1+\frac{y}{x}\right)^x$，$x>0$，$y>0$，则由对数不等式 $\frac{1}{\frac{1}{h}+1} < \ln(1+h) < h(h>0)$ 有

$$f'(x) = \left(1+\frac{y}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x+y}\right] >$$

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^x\left[\frac{1}{\frac{1}{y/x}+1} - \frac{y}{x+y}\right] = 0$$

可见 $f(x)$ 是增函数. 又由于在式(6) 中 $s \geqslant 2$，$1-i(s-1) > 0$，且 $s > 1-i(s-1)$，所以

$$\frac{\left(1+\frac{is}{s}\right)^s}{\left(1+\frac{is}{1-i(s-1)}\right)^{1-i(s-1)}} > 1$$

从而由式(5) 和(6) 可知 $\frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}i} > 0$，因此 s^* 是 $i(i>0)$ 的单调增函数.

又由洛比达法则有

$$\lim_{i\to 0} s^* = 1 - \lim_{i\to 0}\frac{(\ln[1-i(s-1)])'}{(\ln(1+i))'}$$

$$= 1 + \lim_{i\to 0}\frac{(s-1)(1+i)}{1-i(s-1)} = s$$ 证毕.

定理 2 表明,当 $i > 0$ 时,$s^* > s$. 即当存在市场利率 i 时，投资者作出购买 m 单位资产的时间比无市场利率的决策时间有所推迟. 且当市场利率 i 逐渐减小趋于 0 时，两种情形下的决策时间无限地接近，这也进一步说明了市场中存在的利率因素对投资者的决策有着重要的影响.

3　最优在线策略

在这一节，给出存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题的风险均衡策略并分析其竞争比. 本文涉及的风险含义与传统风险有所区别，风险均衡策略是指设计一个策略使得一直租赁和 1 次性购买之间所花费用尽可能地均衡，如果不均衡就有可能导致事后总费用的增加，即承担的风险增大. 比如，在一次投资活动中，投资者从开始就选择 1 次性购买资产的策略，那么当只租 1 次而后续活动终止时，损失是 $P - 1$，但如果选择一直租赁的策略，则不存在损失. 为了分析问题方便，在下面的讨论中，不妨假定 s^* 是正整数.

风险均衡策略(SBR)　对于存在市场利率 i，每单位资产每个租用期的租金是 c，每单位资产的购买价格是 P，资产总需求量为 m 单位的连续松弛多重在线租赁问题:

1) 在前 s^* 个租用期每个 T_j 的开始，若投资者仍需用这 m 单位资产，则考虑可买入资产的最大允许数额 m_j，其余所需资产 $m - \sum_{l=1}^{j} m_l$ 均采取租用，使得即使到了第 $j+1$ 期投资者不再需用这些资产时仍能保证以目标竞争比 α 均衡地分散风险;

2) 在前 s^* 期考虑可买入资产的最大允许数额 m_j 的同时，前 s^* 期买进资产的总量应等于投资者所需用的资产总量，即 $\sum_{j=1}^{s^*} m_j = m$，以免在 $s^* + 1$ 期及以后投资者还需用这种资产时还有未买进的资产并对其再付租赁费.

根据定义的风险均衡策略，可得到定理 3.

定理 3　对于存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题，设风险均衡策略的目标竞争比是 α，则在前 s^* 期 $T_1, T_2, \cdots, T_s$，当需用时每期买进的资产值是

$$m_j = cm(\alpha - 1)\frac{P^{j-1}}{(P-c)^j} \tag{7}$$

式中 $1 \leqslant j \leqslant s^*$.

证明　用数学归纳法证明该命题.

当 $j = 1$ 时，即在第 1 期 T_1 的开始，若投资者需租用或买进这种资产 m 个单位，根据风险均衡策略，为了保证目标竞争比 α，以防止在第 2 期 T_2 及以后都不再需用这种资产的风险，则投资者在最大买进量 m_1 下的所有在线花费为 $Pm_1 + c(m - m_1)$，最优离线花费为 cm，而且必须满足

$$\alpha = \frac{Pm_1 + c(m - m_1)}{cm}$$

于是可得

$$m_1 = cm(\alpha - 1)\frac{1}{P - c}$$

即命题对于 $j = 1$ 成立.

现假定命题对于任意的 $j < k$ 成立，即当 $j < k \leqslant s^*$ 时

$$m_j = cm(\alpha - 1)\frac{P^{j-1}}{(P-c)^j} \tag{8}$$

当 $j = k$ 时，即在第 k 期 T_k 的开始，投资者需继续租用或买进这种资产 m 个单位，根据风险均衡策略，为了保证目标竞争比 α，以防止在第 $k+1$ 期 T_{k+1} 及以后都不再需用这种资产的风险，则投资者在最大买进量 m_k 下的所有在线花费的折现值为

$$Pm_1 + c(m - m_1) + \frac{Pm_2 + c(m - m_1 - m_2)}{1 + i} + \cdots + \frac{Pm_k + c(m - m_1 - m_2 - \cdots - m_k)}{(1+i)^{k-1}}$$

最优离线花费的折现值为 $cm + \frac{cm}{1+i} + \cdots + \frac{cm}{(1+i)^{k-1}}$,而且必须满足

$$\alpha = \frac{Pm_1 + c(m - m_1) + \frac{Pm_2 + c(m - m_1 - m_2)}{1+i} + \cdots + \frac{Pm_k + c(m - m_1 - m_2 - \cdots - m_k)}{(1+i)^{k-1}}}{cm + \frac{cm}{1+i} + \cdots + \frac{cm}{(1+i)^{k-1}}}$$

整理可得

$$
\begin{aligned}
m_k(P-c) = {} & [cm(\alpha-1) - m_1(P-c)](1+i)^{k-1} + [cm(\alpha-1) + cm_1 - m_2(P-c)](1+i)^{k-2} + \\
& [cm(\alpha-1) + cm_1 + cm_2 - m_3(P-c)](1+i)^{k-3} + \cdots + \\
& \left[cm(\alpha-1) + c\sum_{j=1}^{k-2} m_j - m_{k-1}(P-c)\right](1+i) + \left[cm(\alpha-1) + c\sum_{j=1}^{k-1} m_j\right]
\end{aligned}
$$

把式(8)中的每个 m_j 代入上式右边化简得

$$
\begin{aligned}
m_k(P-c) = cm(\alpha-1)\Bigg\{ & \left[1 - \frac{1}{P-c}(P-c)\right](1+i)^{k-1} + \left[1 + c\frac{1}{P-c} - \frac{P}{(P-c)^2}(P-c)\right](1+i)^{k-2} + \\
& \left[1 + c\sum_{j=1}^{2} \frac{P^{j-1}}{(P-c)^j} - \frac{P^2}{(P-c)^3}(P-c)\right](1+i)^{k-3} + \cdots + \\
& \left[1 + c\sum_{j=1}^{k-2} \frac{P^{j-1}}{(P-c)^j} - \frac{P^{k-2}}{(P-c)^{k-1}}(P-c)\right](1+i) + \left[1 + c\sum_{j=1}^{k-1} \frac{P^{j-1}}{(P-c)^j}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

把上式右边每个求和 $\sum$ 按公比为 $\frac{P}{P-c}$ 的等比数列求和化简可得

$$m_k(P-c) = cm(\alpha-1)\frac{P^{k-1}}{(P-c)^{k-1}}$$

从而

$$m_k = cm(\alpha-1)\frac{P^{k-1}}{(P-c)^k}$$

由归纳法原理知命题对一切 $1 \leqslant j \leqslant s^*$ 的自然 j 成立. 证毕.

由定理3中的式(7)易知，$\frac{m_{j+1}}{m_j} = \frac{P}{P-c} > 1$. 这表明无论离线对手在哪一期终止租赁活动，只要每期在需要时买进的资产值等比均衡地增加，就能实现或达到一个恒定的竞争比 α.

定理4 对于存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题，风险均衡策略的竞争比是

$$\alpha = \frac{P^{s^*}}{P^{s^*} - (P-c)^{s^*}} \tag{9}$$

证明 由于投资者对这种资产的需用总量为 m，根据风险均衡策略可知

$$\sum_{j=1}^{s^*} m_j = m \tag{10}$$

把式(7)中的诸 m_j 代入式(10)，得

$$c(\alpha-1)\sum_{j=1}^{s^*} \frac{P^{j-1}}{(P-c)^j} = 1 \tag{11}$$

把式(11)中的和式按公比为 $\frac{P}{P-c}$ 的等比数列求和，整理可解得

$$\alpha = \frac{P^{s^*}}{P^{s^*} - (P-c)^{s^*}}$$

证毕.

定理4表明，风险均衡策略的竞争比是关键时间 s^* 的单调减函数，而关键时间 s^* 是市场利率 i 的单调增函数，因此这一策略的竞争比是市场利率 i 的单调减函数，即市场利率 i 越高，竞争比越小. 特别地，当市场利率 $i = 0$ 时，$s = s^*$，竞争比等于 $\frac{P^s}{P^s - (P-c)^s}$，且

$$\frac{P^{s^*}}{P^{s^*} - (P-c)^{s^*}} < \frac{P^s}{P^s - (P-c)^s} \tag{12}$$

即考虑市场利率时能够获得比无利率时更小的竞争比. 也就是说考虑市场利率时，投资者按风险均衡策略进行租赁(租和买)能够节约投资成本. 另外，由 $P = cs$，有

$$
\begin{aligned}
\frac{P^s}{P^s - (P-c)^s} &= 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{s-1}\right)^s - 1} \\
&< 1 + \frac{1}{1 + \frac{s}{s-1} - 1} \\
&= 2 - \frac{1}{s}
\end{aligned} \tag{13}
$$

与

$$
\begin{aligned}
\frac{P^s}{P^s - (P-c)^s} &= \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{s}\right)^s} \\
&\leqslant \frac{e}{e-1} \approx 1.582
\end{aligned} \tag{14}
$$

这表明，有、无利率两种情况下连续松弛多重在线租赁问题具有比 Karp“单一完整”设备的在线租赁模型更小的竞争比，而且两种情况的上界都是 $\frac{e}{e-1} \approx 1.582$.

推论1 对于存在市场利率的连续松弛多重

在线租赁问题，其

1）风险均衡策略每期买入的资产额是

$$m_j = \frac{P^{j-1}(P-c)^{s^*-j}}{P^{s^*}-(P-c)^{s^*}}cm \tag{15}$$

2）风险均衡策略每期的租用资产额是

$$r_j = \frac{P^{s^*}-P^{j}(P-c)^{s^*-j}}{P^{s^*}-(P-c)^{s^*}}m \tag{16}$$

式中 $1 \leqslant j \leqslant s^*$.

由推论 1 可知，对于存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题，投资者只要在租赁活动的每一期按照式（15）和（16）买入和租用资产，就能确保在线投资成本控制在事后离线最优成本的由定理 4 给出的竞争比倍数以内.

事实上，对该问题给出的风险均衡策略是最优的. 为了证明风险均衡策略的最优性，先给出并证明下面的引理 1.

引理 1　对于存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题，设任一在线策略 ALG 各期购买资产额的序列为 $m_1', m_2', \cdots, m_n'$，则到第 $j(0<j\leqslant n)$ 期结束时，策略 ALG 的花费的折现值为

$$V_{\mathrm{ALG}}(j) = c\left\{\sum_{l=0}^{j-1}\frac{m}{(1+i)^l}+\frac{s-1}{(1+i)^{j-1}}\sum_{l=1}^{j}m_l' - [1-i(s-1)]\left[\frac{m_1'}{1+i}+\frac{m_1'+m_2'}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{\sum_{l=1}^{j-1}m_l'}{(1+i)^{j-1}}\right]\right\}$$

证明　事实上，利用 $P=cs$ 有

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{ALG}}(j) &= Pm_1'+\frac{Pm_2'}{1+i}+\cdots+\frac{Pm_j'}{(1+i)^{j-1}}+c(m-m_1')+\frac{c(m-m_1'-m_2')}{1+i}+\cdots+\frac{c\left(m-\sum_{l=1}^{j}m_l'\right)}{(1+i)^{j-1}} \\ &= c\left\{\sum_{l=0}^{j-1}\frac{m}{(1+i)^l}+(s-1)m_1'+\frac{(s-1)m_2'}{1+i}+\cdots+\frac{(s-1)m_{j-1}'}{(1+i)^{j-2}}+\frac{(s-1)m_j'}{(1+i)^{j-1}}-\frac{m_1'}{1+i}-\frac{m_1'+m_2'}{(1+i)^2}-\cdots-\frac{\sum_{l=1}^{j-1}m_l'}{(1+i)^{j-1}}\right\} \end{aligned} \tag{17}$$

改记

$$\begin{aligned} (s-1)m_1' &= \frac{(s-1)[(1+i)^{j-1}-1+1]}{(1+i)^{j-1}}m_1' = \frac{(s-1)}{(1+i)^{j-1}}m_1'+\frac{i(s-1)[(1+i)^{j-2}+(1+i)^{j-3}+\cdots+(1+i)+1]}{(1+i)^{j-1}}m_1' \\ &= \frac{(s-1)}{(1+i)^{j-1}}m_1'+\frac{i(s-1)}{1+i}m_1'+\frac{i(s-1)}{(1+i)^2}m_1'+\cdots+\frac{i(s-1)}{(1+i)^{j-1}}m_1' \end{aligned} \tag{18}$$

同理可得

$$\frac{(s-1)m_2'}{1+i} = \frac{(s-1)}{(1+i)^{j-1}}m_2'+\frac{i(s-1)}{(1+i)^2}m_2'+\frac{i(s-1)}{(1+i)^3}m_2'+\cdots+\frac{i(s-1)}{(1+i)^{j-1}}m_2' \tag{19}$$

……

$$\frac{(s-1)m_{j-1}'}{(1+i)^{j-2}} = \frac{(s-1)}{(1+i)^{j-1}}m_{j-1}'+\frac{i(s-1)}{(1+i)^{j-1}}m_{j-1}' \tag{20}$$

把式（18）、（19）和（20）代入式（17），整理得

$$V_{\mathrm{ALG}}(j) = c\left\{\sum_{l=0}^{j-1}\frac{m}{(1+i)^l}+\frac{s-1}{(1+i)^{j-1}}\sum_{l=1}^{j}m_l' - [1-i(s-1)]\left[\frac{m_1'}{1+i}+\frac{m_1'+m_2'}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{\sum_{l=1}^{j-1}m_l'}{(1+i)^{j-1}}\right]\right\}$$

证毕.

定理 5　对于存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题，风险均衡策略 SBR 是最优策略.

证明　设 ALG 是任意一个不同于 SBR 的确定性算法. 下面证明算法 ALG 只能得到比风险均衡策略的竞争比 α 更大的竞争比.

令 $m_1, m_2, \cdots, m_{s^*}$ 是实现 SBR 的竞争比 α 时前 s^* 期各期买入的资产值. 在第 1 期，面对资产使用者提出的要租用或者买进 m 单位总资产的任务，设 ALG 买进的资产额为 m_1'，则两种算法 ALG 和 SBR 在第 1 期的租用资产额分别为 $m-m_1'$ 和 $m-m_1$. 如果 $m_1' > m_1$，则令资产使用者停止使用资产，则由引理 1 有

$$\begin{aligned}\alpha_1' - \alpha &= \frac{V_{\mathrm{ALG}}(1)}{cm} - \frac{V_{\mathrm{SBR}}(1)}{cm} \\ &= \frac{c\{m + (s-1)m_1'\}}{cm} - \frac{c\{m + (s-1)m_1\}}{cm} \\ &= \frac{(m_1' - m_1)(s-1)}{m} > 0\end{aligned}$$

如果 $m_1' \leqslant m_1$，则令资产使用者在第二期继续使用 m 个单位总资产. 设 ALG 买进的资产额为 m_2'，则两种算法 ALG 和 SBR 在第 2 期的租用资产额分别为 $m - m_1' - m_2'$ 和 $m - m_1 - m_2$. 如果 $m_1' < m_1$ 且 $m_1' + m_2' \geqslant m_1 + m_2$，或者如果 $m_1' = m_1$ 而且 $m_1' + m_2' > m_1 + m_2$，则令资产使用者停止使用资产，于是有

$$\begin{aligned}\alpha_2' - \alpha &= \frac{V_{\mathrm{ALG}}(1)}{cm + \frac{cm}{1+i}} - \frac{V_{\mathrm{SBR}}(1)}{cm + \frac{cm}{1+i}} \\ &= \frac{c}{cm + \frac{cm}{1+i}}\left(\left\{m + \frac{m}{1+i} + \frac{s-1}{1+i}(m_1' + m_2') - [1 - i(s-1)]\frac{m_1'}{1+i}\right\} - \left\{m + \frac{m}{1+i} + \frac{s-1}{1+i}(m_1 + m_2) - [1 - i(s-1)]\frac{m_1}{1+i}\right\}\right) \\ &= \frac{(m_1' + m_2' - m_1 - m_2)(s-1) + [1 - i(s-1)](m_1 - m_1')}{(1+i)m + m} > 0\end{aligned}$$

如果 $m_1' + m_2' \leqslant m_1 + m_2$，则令资产使用者在第 3 期继续使用 m 个单位总资产.

一般地，对于所有的 $j < s^*$，到了第 j 期结束的时候，如果 ALG 的总买入额 $\sum_{l=1}^{j} m_l' \leqslant \sum_{l=1}^{j} m_l$，则令资产使用者继续使用 m 个单位总资产，否则就有

$$\begin{aligned}\alpha_j' - \alpha &= \frac{V_{\mathrm{ALG}}(j)}{cm + \frac{cm}{1+i} + \cdots + \frac{cm}{(1+i)^{j-1}}} - \frac{V_{\mathrm{SBR}}(j)}{cm + \frac{cm}{1+i} + \cdots + \frac{cm}{(1+i)^{j-1}}} \\ &= \frac{c}{cm + \frac{cm}{1+i} + \cdots + \frac{cm}{(1+i)^{j-1}}}\left(\left\{\sum_{l=0}^{j-1}\frac{m}{(1+i)^l} + \frac{s-1}{(1+i)^{j-1}}\sum_{l=1}^{j} m_l' - [1 - i(s-1)]\left[\frac{m_1'}{1+i} + \frac{m_1' + m_2'}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{\sum_{l=1}^{j-1} m_l'}{(1+i)^{j-1}}\right]\right\} - \right. \\ &\quad \left. c\left\{\sum_{l=0}^{j-1}\frac{m}{(1+i)^l} + \frac{s-1}{(1+i)^{j-1}}\sum_{l=1}^{j} m_l - [1 - i(s-1)]\left[\frac{m_1}{1+i} + \frac{m_1 + m_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{\sum_{l=1}^{j-1} m_l}{(1+i)^{j-1}}\right]\right\}\right) \\ &= \frac{1}{m\sum_{l=0}^{j-1}(1+i)^l}\left\{(s-1)\left(\sum_{l=1}^{j-1} m_l' - \sum_{l=1}^{j-1} m_l\right) + [1 - i(s-1)] \times \right. \\ &\quad \left.\left[(1+i)^{j-2}(m_1 - m_1') + (1+i)^{j-3}(m_1 + m_2 - m_1' - m_2') + \cdots + \left(\sum_{l=1}^{j-1} m_l - \sum_{l=1}^{j-1} m_l'\right)\right]\right\} > 0\end{aligned}$$

然而，当资产使用者使用 m 个单位总资产持续到第 s^* 期结束的时候，由于 ALG 与 SBR 不同，则有

$$\begin{aligned}&m_1' < m_1 \\ &m_1' + m_2' < m_1 + m_2 \\ &\vdots \\ &m_1' + m_2' + \cdots + m_s' < m_1 + m_2 + \cdots + m_s\end{aligned} \tag{21}$$

或者存在 $1 \leqslant k \leqslant s$ 使得

$$\begin{aligned}&m_1' = m_1 \\ &m_1' + m_2' = m_1 + m_2 \\ &\vdots \\ &m_1' + m_2' + \cdots + m_k' = m_1 + m_2 + \cdots + m_k \\ &m_1' + m_2' + \cdots + m_{k+1}' < m_1 + m_2 + \cdots + m_{k+1} \\ &\vdots \\ &m_1' + m_2' + \cdots + m_s' < m_1 + m_2 + \cdots + m_s\end{aligned} \tag{22}$$

这意味着在第 s^* 期结束时 ALG 还有 $m - m_1' - m_2' - \cdots - m_{s^*}'$ 单位资产没有买进，而 SBR 已将所需用的 m 单位资产全部买进，即 $m_1 + m_2 + \cdots + m_{s^*} = m$，$m_{s^*+1} = 0$. 现在令投资者从 $s^* + 1$ 期开始将无限期地需用这 m 单位资产，则这时对 ALG 来说最划算的租赁方式是在第 $s^* + 1$ 期将 $m_{s^*+1}' = m - m_1' - m_2' - \cdots - m_{s^*}'$ 单位资产全部买进. 于是由引理 1 有

$$\alpha_{s^*+1}' = \frac{V_{\mathrm{ALG}}(s^* + 1)}{Pm} = \frac{\sum_{l=0}^{s^*} \frac{m}{(1+i)^l} + \frac{s-1}{(1+i)^{s^*}} \sum_{l=1}^{s^*+1} m_l' - [1 - i(s-1)] \left[\frac{m_1'}{1+i} + \frac{m_1' + m_2'}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{\sum_{l=1}^{s^*} m_l'}{(1+i)^{s^*}} \right]}{sm}$$

与

$$\alpha = \frac{V_{\mathrm{SBR}}(s^*)}{Pm} = \frac{V_{\mathrm{SBR}}(s^* + 1)}{Pm} = \frac{\sum_{l=0}^{s^*} \frac{m}{(1+i)^l} + \frac{s-1}{(1+i)^{j-1}} \sum_{l=1}^{s^*+1} m_l - [1 - i(s-1)] \left[\frac{m_1}{1+i} + \frac{m_1 + m_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{\sum_{l=1}^{s^*} m_l}{(1+i)^{s^*}} \right]}{sm}$$

由于

$$\sum_{l=1}^{s^*} m_l = \sum_{l=1}^{s^*+1} m_l = \sum_{l=1}^{s^*+1} m_l' = m$$

从而由式(21)和式(22)可知

$$\alpha_{s^*+1}' - \alpha = \frac{1 - i(s-1)}{sm} \left[\frac{m_1 - m_1'}{1+i} + \frac{m_1 + m_2 - m_1' - m_2'}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{\sum_{l=1}^{s^*} m_l - \sum_{l=1}^{s^*} m_l'}{(1+i)^{s^*}} \right] > 0$$

综合以上分析可知，算法 ALG 只能得到比 α 更大的竞争比. 证毕.

定理 5 说明，在定理 4 中给出的风险均衡策略的竞争比是该问题的最优竞争比；推论 1 中给出的每期买入和租用的资产额是该问题每期的最佳购买额和最佳租用额. 从而在现实租赁过程中，在线投资者只要运用推论 1 中最佳购买值和最佳租用值公式进行投资就能使得花费的总成本最小.

4　结束语

本文研究的融入市场利率因素的连续松弛多重在线租赁问题，是在 Karp 的"单一雪橇"在线租赁问题理论研究的基础上向实际应用的推广. 租赁对象的多单位化与市场利率的引入虽然使在线租赁问题的模型复杂化，但使得问题更贴近于现实，同时也获得了更小的竞争比，在线决策效果更好. 本文的研究结果，一方面可直接应用于现实中存在市场利率的在线租用或购买多单位连续性资产(每一期都可以选择租用一部分再购买一部分)的在线租赁问题，另一方面是进一步研究存在市场利率的多重在线租赁问题离散情况的基础. 因此关于离散情况的研究，也是非常值得继续深入研究的课题.

参 考 文 献:

[1] 堵丁柱. k 车服务问题与竞争算法[J]. 数学的实践与认识，1991，21(4)：36－40.
Du Dingzhu. k-server problem and its competitive algorithm[J]. Mathematics in Practice and Theory，1991，21(4)：36－40. (in Chinese)

[2] 马卫民，王刊良. 局内管理决策问题及其竞争策略[J]. 管理科学学报，2003，6(2)：29－34.
Ma Weimin，Wang Kanliang. On-line management decision problem and its competitive strategies[J]. Journal of Management Sciences in China，2003，6(2)：29－34. (in Chinese)

[3] Karp R. On-line algorithms versus off-line algorithms: How much is it worth to know the future? [C]//Proc. IFIP 12th

World Computer Congress, The Netherlands: North-Holland Publishing Co., 1992, 1: 416 – 429.

[4] Karlin A R, Manaees M S, McGeogh L, et al. Competitive randomize algorithms for non-uniform problems [J]. Algorithmica, 1994, 11(6): 542 – 571.

[5] **张 永，张卫国，徐维军. 可折旧设备在线租赁的随机性竞争策略 [J]. 管理科学学报**, 2011, 14(1): 69 – 77.
Zhang Yong, Zhang Weiguo, Xu Weijun. Randomized competitive strategy for online leasing of depreciable equipment [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(1): 69 – 77. (in Chinese)

[6] El-Yaniv R, Karp R. Nearly optimal competitive online replacement policies [J]. Mathematics of Operations Research, 1997, 22(4): 814 – 839.

[7] Azar Y, Bartal Y, Feuerstein E, et al. On capital investment [J]. Algorithmica, 1999, 25(1): 22 – 36.

[8] El-Yaniv R, Kaniei R, Linial N. Competitive optimal on-line leasing [J]. Algorithmica, 1999, 25(1): 116 – 140.

[9] Yang X Y, Zhang W G, Zhang Y, et al. Optimal randomized algorithm for a generalized ski-rental with interest rate [J]. Information Processing Letters, 2012, 112(13): 548 – 551.

[10] **马卫民，陈国青. 价格连续型局内设备赁购问题的竞争分析 [J]. 系统工程理论与实践**, 2006, 26(4): 90 – 96.
Ma Weimin, Chen Guoqing. Price continuous version of the on-line equipment renting-buying problem and its competitive strategies [J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2006, 26(4): 90 – 96. (in Chinese)

[11] Irani S, Ramanathan D. TheProblem of Renting Versus Buying [R]. Personal Communications, 1998.

[12] Bienkowski M. Price fluctuations: To buy or to rent [J]. Approximation and Online Algorithms, 2010, 5893: 25 – 36.

[13] Fujiwara H, Iwama K. Average-case competitive analysis for ski-rental problems [J]. Algorithmica, 2005, 42(1): 95 – 107.

[14] Xu Y F, Xu W J, Li H Y. On the online rent or buy problem in probabilistic environments [J]. Journal of Global optimization, 2007, 38 (1): 1 – 20.

[15] **胡茂林. 可分资产的在线租赁策略及其竞争分析 [J]. 系统工程理论与实践**, 2011, 31(1): 144 – 150.
Hu Maolin. Online leasing strategy with competitive analysis for separable property [J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2011, 31(1): 144 – 150. (in Chinese)

[16] **王 扬，徐寅峰，董玉成，等. 考虑二手货市场的在线租赁决策与竞争 [J]. 系统管理学报**, 2011, 20(4): 428 – 431.
Wang Yang, Xu Yinfeng, Dong Yucheng, et al. The online rental problem with second market and its competitive analysis [J]. Journal of Systems Management, 2011, 20(4): 428 – 431. (in Chinese)

[17] al-Binali S. A risk-reward framework for the competitive analysis of financial games [J]. Algorithmica, 1999, 25(1): 99 – 115.

[18] **朱志军，徐寅峰，徐维军. 局内租赁问题的风险补偿模型及其竞争分析 [J]. 管理科学学报**, 2004, 7(3): 64 – 68, 74.
Zhu Zhijun, Xu Yinfeng, Xu Weijun. Risk-reward model of online leasing problem and its competitive analysis [J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(3): 64 – 68, 74. (in Chinese)

[19] **刘 斌，崔文田，辛春林. 基于风险补偿模型的占线住房租赁问题及其竞争分析 [J]. 系统工程理论与实践**, 2008, 28(12): 154 – 159.
Liu Bin, Cui Wentian, Xin Chunlin. Competitive analysis for online house-renting problems based on risk-reward framework [J]. Systems Engineering-Theory and Practice, 2008, 28(12): 154 – 159. (in Chinese)

[20] **王 扬，徐维军，徐寅峰. 一类占线融资租赁问题的最优竞争策略与风险补偿模型 [J]. 管理学报**, 2011, 8(12): 1866 – 1871.
Wang Yang, Xu Weijun, Xu Yinfeng. Competitive strategy and risk reward model for online financial leasing problem [J]. Journal of Management, 2011, 8(12): 1866 – 1871. (in Chinese)

[21] Zhang Y, Zhang W G, Xu W J, et al. Risk-reward models for on-line leasing of depreciable equipment [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 63(1): 167 – 174.

[22] Zhang Y, Zhang W G, Xu W J, et al. A risk-reward model for the on-line leasing of depreciable equipment [J]. Information Processing Letters, 2011, 111(6): 256 – 261.

[23] **张桂清，徐寅峰. 概率预期下在线报童问题的最小风险策略 [J]. 中国管理科学**, 2010, 18(6): 131 – 137.
Zhang Guiqing, Xu Yinfeng. The minimal risk strategy of the online newsboy problem based on probabilistic forecast [J].

Chinese Journal of Management Science，2010，18(6)：131－137. (in Chinese)

[24] Dong Y C，Xu J H，Xu Y F，et al. The on-line rental problem under risk-reward model with probabilistic forecast [J]. Information，2011，14(1)：89－96.

[25] 张桂清，徐寅峰，王 扬. 在线多租赁选择问题的最优竞争策略 [J]. 运筹与管理，2012，21(1)：11－18.
Zhang Guiqing，Xu Yinfeng，Wang Yang. Competitive analysis for the online rental problem with multiple options [J]. Operations Research and Management，2012，21(1)：11－18. (in Chinese)

[26] 徐寅峰，张兴国，董玉成，等. 带预期的占线周期性折扣租赁策略 [J]. 系统工程理论与实践，2008，28(11)：69－73.
Xu Yinfeng，Zhang Xingguo，Dong Yucheng，et al. Rental problem with a periodical leasing discount and forecast [J]. Systems Engineering-Theory and Practice，2008，28(11)：69－73. (in Chinese)

[27] Zhang G Q，Poon C K，Xu Y F. The ski-rental problem with multiple discount options [J]. Information Processing Letters，2011，111(18)：903－906.

[28] Lotker Z，Shamir B P，Rawitz D. Ski rental with two general options [J]. Information Processing Letters，2008，108(1)：365－368.

[29] Lotker Z，Shamir B P，Rawitz D. Rent，lease or buy：Randomized algorithms for multislope ski rental [C] // The 25th Internat. Symp. on the Theoretical Aspects of Computer Science，2008：503－514.

[30] Fujiwara H，Kitano T，Fujito T. On the best possible competitive ratio for multislope ski rental [C] //Proceedings of the 22nd international conference on Algorithms and Computation，2011：544－553.

Multiple online leasing problem of continuous relaxation with market interest rate

HU Mao-lin[1]，*XU Wei-jun*[2]，*LIU You-zhu*[2]
1. School of Mathematical Science，Huaiyin Normal University，Huai'an 223300，China;
2. School of Business and Management，South China University of Technology，Guangzhou 510641，China

Abstract: Based on the study of Karp's ski rental model for the classical online leasing problem，this paper considers the multiple online leasing model for continuous relaxation problem with market interest rate. Firstly，we investigate the optimal offline strategy and show the relationship between the optimal offline cost and market interest rate. Then，based on the online characteristics that offline adversary might stop using assets at anytime so that online players may encounter a high-risk situation like no longer using assets shortly after purchasing，we propose a balancing risk strategy and obtain its optimal competitive ratio by using online algorithm and competitive analysis. Meanwhile，we prove that the competitive ratio of the balancing risk strategy is the optimal ratio for this problem. At last，the monotonicity of relevant variables in the optimal competitive ratio is discussed，and the result shows that the competitive performance of online strategy improves significantly with the factor of market interest rate and multi-unit asset，thereby enhancing the online rental decision-making efficiency.

Key words: multiple online leasing problem; continuous relaxation; market interest rate; balancing risk strategy; competitive ratio