

基于鞅转化的利率模型漂移函数的设定检验^①

陈强¹, 郑旭¹, 许秀²

(1. 上海交通大学安泰经济与管理学院, 上海 200052; 2. 厦门大学王亚南经济研究院, 厦门 361005)

摘要: 基于切米雷泽 (Khmaladze) 鞅转化技术, 利用标记的参数经验过程构造两种对利率模型漂移函数参数形式的设定检验方法, 并给出该检验方法在原假设条件下的渐近性质与检验统计量的计算方法. 所提出的利率模型漂移函数设定检验方法不依赖于利率模型的波动函数形式, 即使对于复合假设检验问题也具有渐近分布无关性. 蒙特卡洛模拟结果表明这些检验方法具有合理的检验水平 (size) 和检验功效 (power). 利用这些检验方法对我国的短期利率动态特征进行实证分析也能得到较好的检验效果.

关键词: 鞅转化; 利率模型; 设定检验; 蒙特卡洛模拟; 实证分析

中图分类号: 0212 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2014)11-0043-14

0 引言

利率变量是金融分析的核心变量之一, 有效的刻画其动态特征对于投资分析、资产定价和风险管理等至关重要. 其中, 连续时间扩散模型是刻画利率动态过程的有力工具. 许多基于连续时间扩散模型的利率模型 (如 Vasicek 模型、CIR 模型、CKLS 模型等) 正被广泛应用. 面对不同的利率模型, 究竟哪种模型较为合适也一直是学术界和实务界争论的议题, 其涉及到对利率模型的参数形式的设定检验. 正确设定利率模型对于金融定量分析也是至关重要. 若模型设定不正确, 容易导致严重的模型设定风险. 因此, 有必要对利率动态模型的设定进行有效的模型设定检验.

目前的许多利率模型可以统一的描述为如下时间齐次扩散过程

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t \quad (1)$$

其中 $X_t \in \Xi \triangleq (\underline{x}, \bar{x})$, $-\infty \leq \underline{x} < \bar{x} \leq +\infty$, X_t 表示利率水平, 其分布函数为 $F(\cdot)$; $\mu(X_t)$ 为漂

移函数, $\sigma(X_t)$ 为波动 (或扩散) 函数, W_t 为标准维纳过程. 利率动态过程是由该扩散过程的漂移函数和波动函数所决定, 因此设定利率模型可以通过选择合理的漂移函数和波动函数来实现. 目前, 已有大量文献提出漂移函数和波动函数的联合设定检验方法. 实际应用中也存在对漂移函数或波动函数单独设定检验的必要. 例如希望在不受波动函数设定的影响下, 只关注漂移函数是否为线性; 或者针对某个被联合设定检验拒绝的利率模型, 可通过单独对漂移函数或波动函数的设定检验来判断模型错误设定的原因所在.

国内学者关于利率模型的研究主要基于模型的拓展应用与实证分析, 对于模型选择与检验的方法论研究还较为缺乏. 实际上, 通过合理的检验来“选择正确的连续时间模型对于利率衍生品的定价、对冲以及计算金融风险都十分重要”^[1]. 特别是, 随着我国金融业国际化的不断推进, 更需要发展起适合中国市场的模型检验与管理方法. 因此, 本文将重点以利率模型设定检验的理论方

① 收稿日期: 2012-09-19; 修订日期: 2013-09-05.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70971087).

作者简介: 陈强 (1982-), 男, 福建寿宁人, 博士. Email: chenq003@126.com

法为研究内容,主要关注其漂移函数参数形式的设定检验,并且旨在得到一类不依赖于波动函数形式的漂移函数参数形式设定检验方法. 具体将考虑如下形式的漂移函数参数形式的设定检验

$$dX_t = \mu(X_t, \theta) dt + \sigma(X_t) dW_t \quad (2)$$

其中 θ 为漂移函数的参数. 针对此利率模型漂移函数参数形式的设定检验大体可分为两类,简单假设 (simple hypothesis) 检验和复合假设 (composite hypothesis) 检验. 其中,简单假设检验考察漂移函数是否等于某已知函数 (参数 θ_0 已知), 即 $H_0: \mu(\cdot) = \mu(\cdot, \theta_0)$; 复合假设检验考察漂移函数是否来自某参数族下的一组函数,即存在某未知的 θ_0 , 使得

$$H_0: \mu(\cdot) \in \{\mu(\cdot, \theta_0) : \theta_0 \in \Theta \subset R^d\} \quad (3)$$

简单假设的设定检验在实际应用中存在很大局限性. 因为,通常检验漂移函数设定时,其参数值未知,必须首先估计参数值,然后再检验实际数据是否与所估计的参数形式吻合. 此时的假设检验问题则属于复合假设检验.

目前,专门针对漂移函数参数形式设定检验的方法还相对较少. 早期的一些研究如 Chen 等^[2]用经验似然拟合度检验方法来检验扩散过程的漂移项, Fan 和 Zhang^[3]应用广义似然比方法来检验漂移项是否为线性. 近年来,一些学者开始基于经验过程来对漂移函数参数形式进行拟合检验. 如 Kutoyants^[4]基于遍历扩散过程的连续观测值并假定波动函数已知条件下,分别利用经验分布函数 (empirical distribution function) 与局部时间估计量 (local time estimator) 提出了两种漂移函数参数形式的设定检验方法. 正如 Kutoyants^[4]指出,这两种检验统计量只有针对简单假设才是渐近分布无关的 (asymptotic distribution free); 而对于复合假设,其检验统计量的极限分布将依赖于原假设以及参数估计. Negri 与 Nishiyama^[5,6]、Masuda 等^[7]分别基于连续观测值与离散观测值,利用标记得分经验过程 (score-marked empirical process) 提出了相应的漂移函数参数形式的设定检验方法,然而这些检验方法都只考虑了简单假设的设定检验问题. 为此, Monsalve-Co-

bis 等^[8]则从更一般的情形考虑了针对漂移函数参数形式复合假设的检验方法. 由于 Monsalve-Cobis 等^[8]提出的检验统计量不具有渐近分布无关性,因此他们通过自举法 (bootstrap) 得到统计量的临界值 (critical value). 自举法的缺陷在于,针对不同的利率模型都必须重新自举得到相应模型检验统计量的临界值. 可见,此方法针对不同模型参数形式缺乏统一的判断标准. 由于 Monsalve-Cobis 等^[8]的自举过程需要同时基于漂移函数和波动函数的参数形式,因此其关于漂移函数参数形式的检验也依赖于波动函数的参数形式.

为此,本文将考察不依赖于波动函数形式的漂移函数参数形式的复合假设检验. 为了克服复合假设检验可能存在的达宾 (Durbin) 问题 (具体含义见下文 1.1 节),本文将利用切米雷泽 (Khmaladze) 鞅转化技术进行检验统计量的构建^[9,10]. 关于切米雷泽鞅转化技术,虽然在较长一段时间,由于某种原因一直没融入到主流的统计实践中,甚至未正式写入教材^[11],但这一技术已经逐渐被广泛应用到各类检验问题上, Koul^[11]对此也作了一个应用综述. 据目前所掌握的文献,本文利用切米雷泽鞅转化技术在国内尚属首次.

1 漂移函数设定检验的达宾问题及切米雷泽鞅转化理论

1.1 检验的达宾问题分析

在实际应用中,并不能连续的观测扩散过程,而只能在离散的时间点上进行观测. 为此,参照 Masuda 等^[7]的设置,假定利率随机过程 $X \triangleq \{X_t : 0 \leq t < \infty\}$ 在离散的时间点 $t_i = i\Delta, i = 1, 2, \dots, n$ 被观测到. 其中, Δ 为观测步长,且观测步长满足 $\Delta = O(n^{-2/3} (\ln(1+n))^{1/3})$. 可见随着观测数 $n \rightarrow \infty$, 有 $\Delta \rightarrow 0$. 令 $Y_i \triangleq X_{t_{i+1}} - X_{t_i}, X_i \triangleq X_{t_i}, \varepsilon_i \triangleq \varepsilon_{t_i} \sim i. i. d. N(0, 1)$, 于是利率模型 (2) 的离散化形式可以表示为

$$Y_i = \mu(X_i, \theta) \Delta + \sigma(X_i) \sqrt{\Delta} \varepsilon_i, \quad i = 1; \dots; n - 1 \quad (4)$$

为了简单说明漂移函数设定检验中存在的达宾问题, 本节暂时假定 $\sigma(X_i) = 1$. 则对于漂移函数参数形式简单假设 (θ_0 给定) 的设定检验可以基于如下标记的经验过程^②

$$V_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{Y_i}{\sqrt{\Delta}} - \mu(X_i, \theta_0) \sqrt{\Delta} \right) \times I(X_i \leq x) \quad (5)$$

其中 $I(\cdot)$ 为示性函数. 在一定假设条件下, $V_n(x)$ 会收敛于时间尺度为 $F(x)$ 的标准布朗运动 B , 即 $B \circ F(x)$ ^[7]. 因此, 基于 $V_n(x)$ 的检验满足渐近分布无关性. 在实际应用中, 更多情况下并不知道 θ_0 的具体值, 因此必须首先对 θ_0 进行估计. 假定存在 θ_0 的某个估计量 $\hat{\theta}$ 满足假设条件 (A8) (见附录 A), 则对漂移函数参数形式复合假设的设定检验可以基于如下标记的参数经验过程

$$\hat{V}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{Y_i}{\sqrt{\Delta}} - \mu(X_i, \hat{\theta}) \sqrt{\Delta} \right) \times I(X_i \leq x) \quad (6)$$

对式 (6) 利用泰勒展开定理及条件 (A8) 可以将其表示为

$$\hat{V}_n(x) = V_n(x) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (\dot{\mu}(X_i, \theta_0) \sqrt{\Delta}) \times I(X_i \leq x) \cdot \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) + r_n(x) \quad (7)$$

其中 $\dot{\mu}(X_i, \theta_0) \triangleq (\partial \mu(X_i, \theta) / \partial \theta) |_{\theta=\theta_0}$, $i = 1, \dots, n-1$, 展开式的余项为 $r_n(x) = o_p(1)$. 由条件 (A8) 知 $\hat{\theta}$ 是渐近正态, 且 $\hat{V}_n(x)$ 会弱收敛于高斯过程

$$V_\infty(x) \triangleq B \circ F(x) - \eta(x) \cdot \omega \quad (8)$$

其中 $\eta(x) \triangleq \int_x^x \dot{\mu}(s, \theta_0) dF(s)$, ω 是一个协方差矩阵为 $E\iota(X, \theta_0) \iota(X, \theta_0)^T$ 的中心化的正态向量 (相关要求见附录 A). 通常 $\dot{\mu}(\cdot)$ 函数会与原假设或其所含参数的估计有关. 于是 $\hat{V}_n(x)$ 所收敛到的高斯过程 $V_\infty(x)$ 因为其额外项 $\eta(x) \cdot \omega$ 中含有 $\dot{\mu}(\cdot)$ 函数, 使得基于 $\hat{V}_n(x)$ 的检验不再是

渐近分布无关. 这种因为包含了估计参数而破坏了检验统计量的分布无关性 (distribution free) 的现象最初是 Durbin^[12] 在分析原假设含有估计参数的 Kolmogorov-Smirnov 检验时发现的, 因此学术界也将此类问题称为达宾 (Durbin) 问题.

1.2 切米雷泽鞅转化理论简介

克服达宾问题的一个重要方法是采用切米雷泽鞅转化技术. 其基本思想是将参数经验过程 (通常为一个半鞅过程) 通过 Doob-Meyer 分解后转化得到一个鞅过程. 为简单说明, 在此沿用 Khmaladze^[9] 对分布函数的分析. 首先, 根据 Doob-Meyer 分解定理知: 对于任何一个非负半鞅 z , 总存在一个递增右连续的可预测过程 $a(\tau)$ ($Ea(\tau) < \infty$) 和一个右连续鞅 m , 使得

$$z(\tau) = a(\tau) + m(\tau) \quad a. s. \quad (9)$$

假定 v_1, \dots, v_n 是来自 $F(\cdot)$ 的独立同分布随机变量, 则 $u_i = F(v_i)$, $i = 1, \dots, n$ 将是 $[0, 1]$ 区间上独立均匀分布随机变量. 于是, 如下经验分布函数 $H_n(\tau)$ 可视为一种半鞅 (下鞅) 过程

$$H_n(\tau) = F_n(F^{-1}(\tau)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(u_i \leq \tau) \quad (10)$$

令 $\Psi^{H_n} \triangleq \{\Psi_\tau^{H_n}: 0 \leq \tau \leq 1\}$ 为过程 $H_n(\tau)$ 生成的 σ -代数 (即 $\sigma(H_n(s): 0 \leq s \leq \tau)$) 所对应的流 (filtration). 则顺序统计量 $u_{(1)}, \dots, u_{(n)}$ 是关于 Ψ^{H_n} 的马尔科夫时间且 $H_n(\tau)$ 为马尔科夫过程. Khmaladze^[9] 注意到对任意的时间间隔 $\Delta\tau \geq 0$, $n\Delta H_n(\tau) \triangleq n[H_n(\tau + \Delta\tau) - H_n(\tau)]$ 会服从一个二项分布, 即

$$n\Delta H_n(\tau) \sim B(n(1 - H_n(\tau)), \Delta\tau / (1 - \tau))$$

且有 $H_n(0) = 0$, 于是

$$E(\Delta H_n(\tau) | \Psi_\tau^{H_n}) = \frac{1 - H_n(\tau)}{1 - \tau} \Delta\tau \quad (11)$$

这意味着 $H_n(\tau)$ 可做如下 Doob-Meyer 分解

$$H_n(\tau) = \int_0^\tau \frac{1 - H_n(s)}{1 - s} ds + m_n(\tau) \quad (12)$$

其中 $m_n(\tau)$ 为一个鞅. 根据式 (12) 可以得到标准化的经验过程 $S_n(\tau) \triangleq \sqrt{n}(H_n(\tau) - \tau)$ 的

② 关于漂移函数设定检验还可以基于其他类似的经验过程, 如 Monsalve-Cobis 等^[8] 所基于的经验过程类似于 $V_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{Y_i}{\Delta} - \mu(X_i, \theta_0) \right) I(X_i \leq x)$; Masuda 等^[7] 所基于的经验过程类似于 $V_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} (Y_i - \mu(X_i, \theta_0) \Delta) I(X_i \leq x)$. 不过这两种经验过程的极限过程与步长 Δ 有关, 不便于对其相应参数经验过程进行鞅转化. 为此, 本文改用式 (5) 形式的经验过程.

Doob-Meyer 分解为

$$S_n(\tau) = w_n(\tau) - \int_0^\tau \frac{S_n(s)}{1-s} ds \quad (13)$$

其中 $w_n(\tau) \triangleq \sqrt{nm_n}(\tau)$ 会弱收敛于标准布朗运动 $B \circ F(x)$. 为了进一步将此分解方法扩展到一般的参数经验过程, 令 h_i 为映射 $\theta \rightarrow H_n(\cdot, \theta) \triangleq F_n(F^{-1}(\cdot), \theta)$ 关于 $\theta_i, i = 1, \dots, d$ 的弗里歇导数 (假定 h_i 存在), 则 $h(\tau) \triangleq (\tau, h_1(\tau), \dots, h_d(\tau))^T$ 为 $[0, 1]$ 区间上的 $d+1$ 维的实值函数.

假定其导数 $\dot{h}(\tau) \triangleq dh(\tau)/d\tau$ 在 $\tau = 1$ 附近线性独立, 从而保证 $M_s = \int_s^1 \dot{h}(\tau) \dot{h}(\tau)^T d\tau$ 非奇异, 考虑如下转化

$$w_n(\tau) = S_n(\tau) - \int_0^\tau \dot{h}(s)^T M_s^{-1} \times \int_s^1 \dot{h}(r) dV_n(r) ds \quad (14)$$

式 (14) 即为切米雷泽鞅转化公式, 易验证当 $h(\tau) = \tau$ 时, 式 (14) 退化式为 (13). 可见, Khmaladze^[9] 所定义的关于一般参数经验过程的切米雷泽鞅转化是原来的经验过程 (不含估计参数) Doob-Meyer 分解的推广与应用.

上述切米雷泽鞅转化技术虽然只是基于分布函数的拟合检验提出的, 它也可以推广至其他回归模型的拟合检验. 如 Khmaladze 与 Koul^[10] 基于加权的残差经验过程分别讨论了回归模型中的函数形式设定检验及回归模型残差分布的拟合检验. 这两类检验的切米雷泽鞅转化形式相似, 主要是原假设对应扩展切平面 (extended tangent space corresponding to the null ETS^[13]) 的基的选择有所不同 (如上述的分布函数检验的 ETS 的基为 $\dot{h}(\tau)$).

为了给出关于漂移函数设定检验的切米雷泽鞅转化的含义与性质, 针对来自分布为 $F(x)$ 的随机变量 $x \in \Xi$, 令 $g(x)$ 为相应 ETS 的基向量, 则对于任意二次可积实值函数 φ 的切米雷泽鞅转化 T_g 可定义为

$$T_g(\varphi(x)) = \varphi(x) - \int_x^x g(s)^T M_s^{-1} \int_s^{\bar{x}} g(r) \times d\varphi(r) dF(s) \quad (15)$$

式 (15) 可以看作是基于一区间 $(x, \bar{x}]$ 的信息, 通过

递归最小二乘估计 (recursive least squares estimate) 对 $\varphi(x)$ 预测后的残差^[14]. 它是一种线性的垂直映射和保距映射^[10]. 为了下文分析的需要, 在此用 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数, 根据 Bai^[14] 的附录 A 得出如下定理 1.

定理 1 假定 $E\|g(X)\|^2 < \infty$, 矩阵 $M_s = Eg(X)g(X)^T I(X \geq s)$ 是非奇异的, c 为任意常数或随机变量, 则对于任意 $x \in \Xi$, 切米雷泽鞅转化 T_g 式 (15) 满足 $T_g(cg(x)) = 0$.

证明 令 $\phi_g(\varphi(x)) = \int_x^x g(s)^T M_s^{-1} \int_s^{\bar{x}} g(r) d\varphi(r) dF(s)$, 则 $T_g(\varphi(x)) = \varphi(x) - \phi_g(\varphi(x))$. 由 Bai^[14] 附录 A 可知 $\phi_g(cg(x)) = cg(x)$, 所以 $T_g(cg(x)) = cg(x) - \phi_g(cg(x)) = 0$. 证毕.

对于参数经验过程 (7), 由于其极限过程的额外项 $\eta(x) \cdot \omega$ 是其对应的 ETS 的基 g 的线性函数 (见附录 B 中定理 2 的证明), 若能找到其对应的 ETS 的基 g , 则通过切米雷泽鞅转化 T_g 有 $T_g(\eta(x) \cdot \omega) = 0$. 于是

$$T_g(\hat{V}_n(x)) = T_g(V_n(x) + \eta(x) \cdot \omega + r_n(x)) \Rightarrow B \circ F(x) \quad (16)$$

可见, 通过切米雷泽鞅转化式 (15) 可以把参数经验过程中与原假设有关的成分剔除, 从而保证基于鞅转化后的经验过程的检验统计量具有渐近分布无关性. 有了渐近分布无关的检验统计量, 便可以很方便的得到相应检验统计量的临界值. 下节将具体说明基于更一般形式的参数经验过程的漂移函数设定检验方法及性质.

2 基于切米雷泽鞅转化的漂移函数的检验及其计算

2.1 经验过程设置

第 1 节主要是基于 $\sigma(X_i) = 1$ 假定下分析了漂移函数设定检验中存在的达宾问题, 并且已知不含估计参数的标记经验过程 (5) 弱收敛于标准布朗运动. 实际应用中更常见的情形是 $\sigma(X_i)$ 为异方差形式, 此时的经验过程 (5) 的极限过程将会依赖于 $\sigma(X_i)$. 为了得到一个标准的稳定的极限过程, 可以把经验过程 (5) 进一步用 $\sigma(X_i)$

标准化为

$$V_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} e_i I(X_i \leq x) \quad (17)$$

其中 $e_i \triangleq \frac{Y_i/\sqrt{\Delta} - \mu(X_i, \theta_0) \sqrt{\Delta}}{\sigma(X_i)}$. 参照 Masuda 等^[7]

的做法 定义 $V_n(-\infty) = 0, V_n(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} e_i$, 于

是 $V_n(x)$ 可以在 Skorokhod 空间 $D[\underline{x}, \bar{x}]$ 上取值.

由附录 B 知 $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ 为鞅过程序列. 若 $\sigma(X_i)$ 函数形式未知时, 很自然的考虑是利用其估计量 $\hat{\sigma}(X_i)$ 代替. 于是对于一般形式的漂移函数复合假设问题的设定检验可以考虑基于如下估计的标准化的标记参数经验过程

$$\hat{V}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \hat{e}_i I(X_i \leq x) \quad (18)$$

其中 $\hat{e}_i \triangleq \frac{Y_i/\sqrt{\Delta} - \mu(X_i, \hat{\theta}) \sqrt{\Delta}}{\hat{\sigma}(X_i)}$. 由于本文着重分

析一类不依赖于波动函数形式的漂移函数参数形式设定检验方法. 为了得到估计的 $\hat{\sigma}(X_i)$, 本文将选用一般的核估计技术估计 $\sigma^2(\cdot)$ 在 x 点的值, 即

$$\hat{\sigma}^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) (X_{i+1} - X_i)^2}{\Delta \sum_{i=1}^{n-1} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)} \quad (19)$$

其中 $K(\cdot)$ 为核函数, h 为窗宽. 式 (19) 的核估计完全无需知道波动函数的具体形式, 因此基于此估计的漂移函数检验方法不依赖于波动函数的函数形式. 显然, 引入波动函数的核估计 (19) 会增大 $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^{n-1}$ 序列前后期的相依性. 那么, 估计的参数经验过程 (18) 是否仍可通过切米雷泽鞅转化得到渐近分布无关的检验统计量呢? 下文的定理 2 表明, 在一定条件下, 切米雷泽鞅转化对上述经验过程 (18) 仍适用.

2.2 检验统计量及其渐近性质

在一定的正则性条件(见附录 A)下, 可以证明在漂移函数参数形式设定正确原假设条件下, 参数经验过程仍可以收敛到某个高斯过程, 但由于此极限高斯过程会依赖于原假设条件及参数估计, 即不满足分布无关性, 因此不便于直接被应用. 为此, 可以选择切米雷泽鞅转化来克服上述

麻烦. 通过切米雷泽鞅转化的检验统计量可以得到确切的渐近原假设分布, 而且可以很方便的被执行. 通过推导可知: 基于标记的参数经验过程 (18) 的漂移函数设定检验的 ETS 的基为

$$g(x) = \frac{\dot{\mu}(x, \theta_0) \sqrt{\Delta}}{\sigma(x)}, \text{ 相应的有 } M_s = E g(X) g(X)^T I(X \geq s).$$

注意到 $g(x)$ 和 M_s 都可能依赖于未知的参数 θ_0 , 且 M_s 还可能依赖于分布函数 $F(\cdot)$. 相应的, 令

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) &= \frac{\dot{\mu}(x, \hat{\theta}) \sqrt{\Delta}}{\hat{\sigma}(x)}, \\ \hat{M}_s &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \hat{g}(X_i) \hat{g}(X_i)^T I(X_i \geq s) \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\hat{\sigma}(X_i)$ 为核估计 (19). 分布函数 $F(\cdot)$ 可用经验分布函数 $F_n(\cdot)$ 代替, 则参数经验过程 (18) 的切米雷泽鞅转化的估计式可表示为

$$\begin{aligned} \hat{W}_n(x) &= \hat{V}_n(x) - \int_{s \leq x} \hat{g}(s)^T \hat{M}_s^{-1} \times \\ &\quad \int_{r \geq s} \hat{g}(r) d\hat{V}_n(r) dF_n(s) \end{aligned} \quad (21)$$

针对原假设的检验统计量将基于 $\hat{W}_n(x)$ 进行构建. 以下定理 2 给出了在原假设条件下通过切米雷泽鞅转化后的 $\hat{W}_n(x)$ 的渐近收敛性质.

定理 2 假定附录 A 的条件 (A1) - (A10) 成立, 则在原假设条件 (3) 下, 当 $n \rightarrow \infty$, 且步长满足 $\Delta = O(n^{-2/3} (\ln(1+n))^{1/3})$ 时, 对于 $x \in [\underline{x}, x_1], x_1 < \bar{x}$, 有

$$\hat{W}_n(x) \Rightarrow B \circ F(x) \quad (22)$$

证明见附录 B.

根据 $\hat{W}_n(x)$ 弱收敛性, 可以构建出不同的检验统计量, 本文选用 Kolmogorov-Smirnov (KS) 与 Cramer von Mises (CvM) 两种检验, 定义检验统计量为

$$K_n \triangleq \sup_{\underline{x} \leq x \leq \bar{x}} |\hat{W}_n(x)|, \quad \mathcal{L}_n \triangleq \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} (\hat{W}_n(x))^2 dF_n(x) \quad (23)$$

依据连续映射定理有

$$K_n \xrightarrow{P} \sup_{\underline{x} \leq x \leq \bar{x}} |B \circ F(x)|,$$

$$C_n \xrightarrow{P} \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} (B \circ F(x))^2 dF(x) \quad (24)$$

为了避免 \hat{M}_s 在 x 的高分位点的估计效果不佳, 取 x_1 ($x_1 < \bar{x}$) 为计算区间的上界. 其对应于经验分布函数值为 $F_n(x_1)$ 则可以采用如下尺度化的 (scaled) 检验统计量

$$K_n = \sup_{\underline{x} \leq x \leq x_1} \left| \frac{\hat{W}_n(x)}{\sqrt{F_n(x_1)}} \right|, \quad C_n = F_n^{-2}(x_1) \int_{\underline{x}}^{x_1} \hat{W}_n(x)^2 dF_n(x) \quad (25)$$

根据布朗运动的尺度变换性质知, 式 (25) 与式 (23) 会有相同极限分布^{[15][16]}. 这样就可以通过式 (24) 模拟得到检验统计量 K_n 与 C_n 极限分布的临界值. 因此可以方便的利用式 (25) 进行检验分析. 与以往的一些检验方法 (如 Chen 等^[2], Fan 和 Zhang^[3]) 相比, K_n 与 C_n 的一个明显优势在于其有一个简单且恒定的极限分布, 且很容易执行. 相比之下, Chen 等^[2] 所提出的经验似然拟合度检验 (记为 EL 检验) 涉及太多的近似估计项, 使得 EL 检验的有限样本表现很差. 因此, EL 检验在实际应用时需要借助一些其他方法 (如自举法). Fan 和 Zhang^[3] 所提出的广义似然比方法 (记为 GLR 检验) 的临界值会受到不同的原假设模型甚至不同的参数值的影响. 因此应用 GLR 检验同样需要通过自举法判断检验结果. 而本文提出的检验统计量 K_n 与 C_n 具有渐近分布无关性, 并且通过鞅转化可以消除或减轻模型的原假设及参数估计误差的影响. 因此, 检验统计量 K_n 与 C_n 可以很方便的应用于各种漂移函数的设定检验.

2.3 检验统计量的计算方法

下面将介绍如何根据实际数据计算上述检验统计量. 首先, 可将式 (21) 等价的表示

$$\hat{W}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \hat{e}_i \left(I(X_i \leq x) - \int_{s \leq x} \hat{g}(s)^T \times \hat{M}_s^{-1} I(X_i \geq x) dF_n(s) \hat{g}(X_i) \right) \quad (26)$$

根据 Bai^[14]、Koul 与 Song^[16] 的说明, 提出如下关于 $\hat{W}_n(x)$ 的具体计算方法: 令 $X_{(i)}$, $1 \leq i \leq n$ 表示 X_i 的第 i 个顺序统计量, $\hat{e}_{(i)}$ 与 $\hat{g}_{(i)}$ 表示与 X_i 对应的 \hat{e}_i 和 \hat{g}_i 按 $X_{(i)}$ 顺序排列后的值. 则式

(26) 可以通过如下式 (27) 求得.

$$\hat{W}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^k \left(\hat{e}_{(i)} - \frac{1}{n} \sum_{j=i}^{n-1} \hat{g}_{(i)}^T \hat{M}_{(i)}^{-1} \hat{g}_{(j)} \hat{e}_{(j)} \right), \quad X_{(k)} \leq x < X_{(k+1)} \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (27)$$

其中, $\hat{g}_{(i)} = \frac{\dot{\mu}(X_{(i)}; \hat{\theta}) \sqrt{\Delta}}{\hat{\sigma}(X_{(i)})}$, $\hat{M}_{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{j=i}^{n-1} \hat{g}_{(j)} \hat{g}_{(j)}^T$, $j = 1, \dots, n-1$. 相应的 K_n 与 C_n 可以通过如下式 (28) 求得

$$K_n = \max_i \left| \frac{\hat{W}_n(X_i)}{\sqrt{F_n(x_1)}} \right|, \quad C_n = \frac{1}{nF_n^2(x_1)} \sum_i I(X_i \leq x_1) (\hat{W}_n(X_i))^2 \quad (28)$$

于是, 通过式 (28) 就可以计算得到漂移函数的设定检验统计量 K_n 与 C_n 的值, 当检验统计量大于其对应的极限分布 (24) 的临界值时, 原假设将被拒绝. 下节将根据式 (28) 进行蒙特卡洛模拟分析和具体数据的实证分析.

3 蒙特卡洛模拟与实证分析

本节的蒙特卡洛模拟与实证分析所涉及到的非参数核估计均采用标准正态核函数. 核估计的窗宽的选择按经验公式 $h = c \cdot \text{std}(x) \cdot h^{-1/5}$ 计算, 其中 $\text{std}(x)$ 表示变量 x 的标准差. 根据标准正态核估计的经验法则选取 $c = 1.06$. 参照 Stute 等^[15] 的做法, 选择计算区间的上界 x_1 为经验分布函数的 99% 分位点. Bai^[14] 通过模拟得到 K_n 在 1%、5% 和 10% 显著性水平下的临界值分别为 2.80、2.22 和 1.94. 根据 Bai^[14] 的模拟设置, 可以类似模拟得到 C_n 在 1%、5% 和 10% 显著性水平下的临界值分别为 2.803 9、1.665 5 和 1.201 9.

3.1 蒙特卡洛模拟分析

学术界关于利率模型漂移函数的参数形式已有大量研究. 很长时间以来, 对于其漂移函数的均值回复特征是否为线性也一直悬而未决^[17]. 在此, 主要通过检验利率过程的线性均值回复特征来分析统计量 K_n 与 C_n 的检验效果. 蒙特卡洛

模拟的数据生成所考虑的原假设 (H_0) 模型为 CKLS 模型

$$dX_t = (\beta_0 + \beta_1 X_t) dt + \sigma X_t^\rho dW_t \quad (29)$$

其参数真实值选用 Chan 等^[18] 的估计值, 即 $\beta_0 = 0.0408$, $\beta_1 = -0.5921$, $\sigma^2 = 1.6704$, $\rho = 1.4999$. 为了分析检验统计量的检验功效, 类似 Monsalve-Cobis 等^[8] 的模拟设计, 通过对 CKLS 模型的漂移函数引入不同的非线性函数 $NL(X_t)$ 得到一系列不同的备择假设模型

$$dX_t = (\beta_0 + \beta_1 X_t + NL(X_t)) dt + \sigma X_t^\rho dW_t \quad (30)$$

本文选用两种形式 $NL(X_t)$ 的备择假设, 即

$$H_1: NL(X_t) = \delta_d(1 - X_t^{\delta_d}) \text{ 与}$$

$$H_2: NL(X_t) = -\gamma_d \sqrt{X_t} \quad (31)$$

其中 δ_d 取 4、5, γ_d 取 0.8、1. 采用 Milstein 方法从时间区间 $[-100/n, T]$ 中产生样本量为 $5Tn + 500$ 个离散观测值, 然后删去前 500 个观测值以

减小模拟初始值的影响, 并从剩下的 $5Tn$ 各数据中每隔 5 个抽 1 个以减小离散化偏差 (discretization bias) 的影响, 于是得到 $[0, T]$ 区间上样本量为 n 的数据序列 $\{X_i\}_{i=1}^n$, 其抽样步长为 $\Delta = T/n$. 在模拟中, 取 $T = 1$ 和 2 , $\Delta = 1/250, 1/500$ 和 $1/1000$.

为了与已有的漂移函数进行比较, 本文同时计算了 GLR 检验统计量^③. 由于 GLR 检验的自举法十分耗时, 难以进行大量的模拟分析. 因此, 本文遵循 Fan 和 Zhang^[3] 的做法, 通过模拟特定模型 (模型参数已知) 条件下 GLR 检验的临界值, 并基于此进行模拟与比较分析. 在上述原假设模型 (29) 及相应参数设置下, 通过 10 000 次循环的模拟计算可以得到 GLR 检验统计量在显著性水平 (α) 分别为 10% 和 5% 的临界值 (见表 1).

表 1 检验统计量 GLR 在模型 (29) 下的模拟临界值

Table 1 Simulated critical value of GLR test under model (29)

$\alpha \setminus \Delta$	$T = 1$			$T = 2$		
	1/250	1/500	1/1000	1/250	1/500	1/1000
10%	5.369 0	6.226 9	7.226 5	9.578 9	10.898 5	12.538 2
5%	6.618 5	7.575 4	8.803 8	12.774 2	14.025 3	16.099 3

从表 1 可以看出, GLR 检验的临界值在不同的样本量下也有较大差异. 可见 GLR 检验统计量的值易受实际数据量的影响. 接着, 利用表 1 的临界值计算 GLR 检验的检验水平 (size) 与检验功效 (power). 同时也计算了检验统计量 K_n 与 C_n 检验水平与检验功效. 通过 2 000 次循环得到各检验统计量分别在 5% 与 10% 显著性水平下的模拟结果 (见表 2).

表 2 的模拟结果表明: 在原假设模型 (29) 下, 各检验统计量的检验水平与真实的检验水平相差不大. 表面上看, GLR 检验水平要比 K_n 与 C_n 好, 不过该模拟的 GLR 检验是基于原假设模型 (29) 在给定对应的样本量与参数设置下的大量模拟 (10 000 次循环) 所得的分位点作为其检验临界值. 因此, 其模拟的检验水平更接近真实的检验水平就不足为奇. 不管怎样, 模拟得到的 K_n 与 C_n 检验水平都是比较合理的.

当模型 (31) 中的 δ_d 与 γ_d 增加时, 备择假设

模型就更加偏离原假设模型, 因此可以预期其对备择假设模型的拒绝率也会增加. 表 2 的模拟结果也证实了这一特征. 平均而言, 经验的检验功效随着 Δ 的减小而增大, 随着 T 的增大而增大. 这与 Masuda 等^[7] 基于简单假设的模拟结论存在相似之处. 虽然, 表 2 所示的检验功效比 Monsalve-Cobis 等^[8] 的模拟结果来的低, 但是 Monsalve-Cobis 等^[8] 对漂移函数的检验是基于波动函数形式已知条件下进行的. 而本文对漂移函数的检验无需知道波动函数的具体函数形式, 其利用的信息较少, 自然的检验功效也较低. 另外, 在 H_1 下, GLR 优于 K_n 与 C_n 的情形较多, 而在 H_2 下, K_n 与 C_n 普遍优于 GLR , 且不论在 H_1 下还是在 H_2 下, K_n 与 C_n 的检验功效都比较相近. 可见, K_n 、 C_n 与 GLR 的功效表现并无绝对的优劣, 其取决于具体的数据生成过程, 这与鞅转化理论是一致的. 不过, 相比之下, K_n 、 C_n 明显的比 GLR 方便执行.

③ 由于通常的局部线性估计不能保证波动函数的估计一定是正数, 同时为了与本文所提出的检验统计量所涉及到的核估计相对应, 在计算 GLR 检验统计量时, 对其涉及到的非参数估计同样选用核估计来计算.

表 2 漂移函数检验的检验水平与检验功效的经验表现
Table 2 Empirical performance of size and power for drift function test

$\Delta \setminus \alpha$	$T = 1$						$T = 2$					
	K_n		C_n		GLR		K_n		C_n		GLR	
	10%	5%	10%	5%	10%	5%	10%	5%	10%	5%	10%	5%
检验水平 (H_0 : CKLS 模型)												
1/250	7.6	3.0	7.7	3.5	10.2	4.9	8.9	4.2	8.0	4.6	8.9	4.9
1/500	9.3	4.6	8.8	5.1	10.1	4.7	8.7	3.9	7.9	3.9	9.9	4.8
1/1 000	8.4	4.1	7.6	3.2	10.6	4.8	10.6	4.7	8.5	3.6	9.5	4.4
检验功效 (H_0 : CKLS 模型, H_1 : 取 $\gamma_d = 4$)												
1/250	10.2	4.6	13.3	6.3	42.1	27.8	22.3	12.3	25.9	15.8	32.9	15.4
1/500	14.3	7.6	15.9	8.6	50.5	35.6	27.8	16.2	29.0	18.0	43.9	23.2
1/1 000	18.6	9.6	17.7	9.8	60.0	41.8	32.2	19.1	32.5	19.8	51.9	27.6
检验功效 (H_0 : CKLS 模型, H_1 : 取 $\gamma_d = 5$)												
1/250	16.3	7.1	20.2	10.6	37.2	22.0	35.3	21.3	40.6	27.4	26.0	9.4
1/500	20.6	11.5	24.0	13.6	44.3	29.4	43.3	29.3	46.8	33.6	32.4	14.1
1/1 000	26.7	16.0	26.9	16.4	52.5	32.1	50.9	33.7	53.0	38.5	38.3	16.3
检验功效 (H_0 : CKLS 模型, H_2 : 取 $\delta_d = 0.8$)												
1/250	27.2	13.5	49.6	27.5	33.4	27.1	74.6	59.6	77.4	62.6	68.0	56.5
1/500	68.5	50.4	84.9	71.5	34.7	24.9	99.5	98.5	99.6	98.4	69.8	55.2
1/1 000	78.8	64.8	90.2	80.6	30.3	20.4	100.0	99.8	100.0	99.9	66.1	49.3
检验功效 (H_0 : CKLS 模型, H_2 : 取 $\delta_d = 1$)												
1/250	22.7	8.3	40.8	16.8	24.2	21.7	54.1	37.1	50.5	32.2	72.0	67.3
1/500	99.8	98.3	100.0	99.9	59.7	51.6	100.0	100.0	100.0	100.0	92.7	87.7
1/1 000	100.0	100.0	100.0	100.0	58.0	44.6	100.0	100.0	100.0	100.0	92.1	83.0

3.2 SHIBOR 数据的实证分析

下面将利用上述检验统计量检验我国的短期利率的动态特征. 本部分的实证所选取的数据为上海银行间同业拆放利率 (Shanghai interbank offered rate, SHIBOR). 所选取的 SHIBOR 数据期限包括隔夜 (O/N)、1 周 (1W)、2 周 (2W) 和 1 个月 (1M) 四种, 数据的时间跨度为 2007 年 1 月 1 日至 2013 年 5 月 17 日, 每种期限的利率数据个数为 1 592, 其相应的利率动态走势见图 1 至图 4.

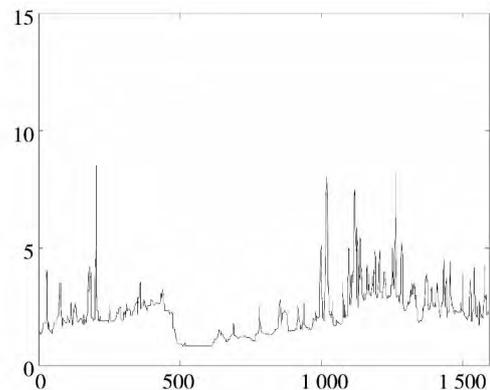


图 1 期限为 O/N 的 SHIBOR 走势图
Fig. 1 Historical trends of O/N SHIBOR

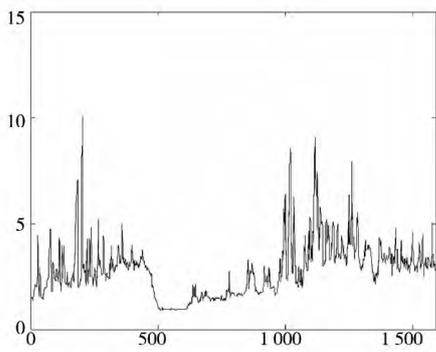


图 2 期限为 1W 的 SHIBOR 走势图

Fig. 2 Historical trends of 1W SHIBOR

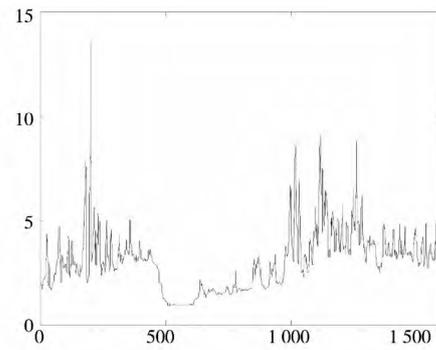


图 3 期限为 2W 的 SHIBOR 走势图

Fig. 3 Historical trends of 2W SHIBOR

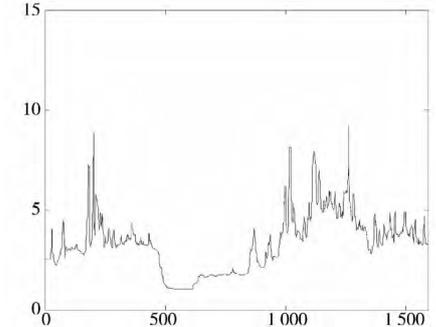


图 4 期限为 1M 的 SHIBOR 走势图

Fig. 4 Historical trends of 1M SHIBOR

从图 1 至图 4 可以看出,各短期利率走势具

有一定的持续性 (persistent),即利率走势要经过相当一段时间向长期均值水平回复. 另外,国内的许多学者也认为我国的短期利率存在均值回复特征^[19-24]. 为了验证本文所提出的漂移函数检验方法的检验表现,在此将检验上述 SHIBOR 数据是否满足线性均值回复特征,即检验漂移函数是否满足

$$\mu(X_t, \cdot) = \kappa(\varphi - X_t) \quad (32)$$

其中 κ 为持续性系数,其值越小,则持续性越强; φ 为长期平均利率水平. 另外,图 1 至图 4 也显示各短期利率波动存在明显的条件异方差现象,因此很难准确的用简单的函数来设定其波动函数形式. 因此,若通过事先假定波动函数满足某种参数形式来单独检验漂移函数的参数形式,将很容易因为波动函数的错误设定而影响了对漂移函数的设定检验,并且数据的条件异方差现象与函数形式的错误设定都容易影响参数估计的稳健性. 而本文提出的完全不依赖于波动函数形式的漂移函数设定检验避免了其受波动函数错误设定的影响,且检验统计量的渐近分布无关性也减少了参数的不正确估计对统计量计算的影响.

为了得到相对稳健的估计与检验结果,首先根据 Fan 和 Zhang^[3] 中 4.1 节介绍的方法,作 Y_t/Δ 关于 X_t 的 OLS 估计得到其漂移函数参数的初始估计值,然后利用这些初始估计值作为下一步 GMM 估计的初始值^④. 通过 GMM 估计得到漂移函数的参数值 (κ, φ)、相应参数估计的 t 值 (t_κ, t_φ)、 J 检验统计量^[18] 及其伴随概率 P 值 (记为 P_J). 同时,本文也计算了 K_n, C_n 与 GLR 检验统计量,并通过自举法 (500 次循环) 得到 GLR 检验的伴随概率 P 值 (记为 P_{GLR}). 所得结果见表 3.

表 3 对 SHIBOR 数据的估计与检验结果

Table 3 Estimation and testing results for SHIBOR

期限	κ	t_κ	φ	t_φ	J	P_J	GLR	P_{GLR}	K_n	C_n
0/N	26.76***	7.88	2.36***	25.06	0.09	0.77	191.58***	0.008	1.76	1.23*
1W	25.16***	9.25	2.99***	26.21	0.07	0.78	162.98*	0.056	3.17***	5.78***
2W	34.53***	11.14	3.36***	35.06	0.17	0.68	335.65*	0.054	2.86***	3.42***
1M	7.35***	7.10	3.63***	18.27	0.11	0.74	188.06**	0.036	0.91	0.21

注: ***, **, * 分别表示显著性水平小于 1%、5%、10%.

④ 此 GMM 估计的矩条件为: $E_t(Y_t/\Delta - \kappa(\varphi - X_t)) = 0$, 所用的工具变量组为 $[1, X_t, X_t^2]$

从表 3 的系数估计结果可以看出,这四种期限的短期利率过程都能显著的被线性均值回复的漂移函数所拟合,各参数的估计值的伴随概率都小于 1%。其中 1 个月期限的短期利率的持续性最强,其 κ 值为 7.35,持续性最弱的短期利率是两周期限的短期利率。

虽然这四种期限的利率过程的线性均值回复的漂移函数参数估计都十分显著,但这并不意味着线性的均值回复函数就一定是对短期利率漂移函数形式的正确设定。因为参数估计是否显著还受数据的序列相关性、异方差性等因素的影响。因此有必要单独对漂移函数的参数形式进行设定检验。在估计与检验之前,本文首先利用 ADF 单位根检验对四种期限的利率数据进行平稳性检验,发现各数据都是平稳的。因此,这些数据也比较适合本文所提出的检验方法。

表 3 显示各检验统计量的检验结果差异较大,基于 GMM 的 J 检验都没能够拒绝每种期限的 SHIBOR 数据的线性均值回复特征,而 GLR 检验又(在 10% 显著性水平下)拒绝了所有利率数据的线性均值回复特征。从 K_n 与 C_n 统计量的值可以看出期限为 1 个月的短期利率数据较好的满足线性均值回复特征。而对于较短期限的利率(特别是期限为 1 周与 2 周的利率数据)很难被线性的均值回复特征所解释。 K_n 与 C_n 的检验结果与 Monsalve-Cobis 等^[8]对 EURIBOR 的检验结果类似。Monsalve-Cobis 等^[8]的检验结果表明:期限为 1 周的 EURIBOR 数据不能很好的被线性均值回复的漂移函数所解释,而对于更长期限(期限为两周及以上)的 EURIBOR 能较好的被线性均值回复的漂移函数所解释。关于期限较短(不超过两周)的 SHIBOR 数据的线性均值回复特征被 K_n 与 C_n 统计量拒绝这一事实也与国内的一些学者的研究结果相吻合,如洪永淼、林海^[19],刘金全,郑挺国^[20],范龙振^[21]等。可见,基本上可以认为我国的短期利率动态确实存在均值回复特征。但不同期限的短期利率一般不能都被线性均

值回复特征完全解释,或许还存在某种非线性的均值回复特征。总体而言,针对不同期限利率数据的 J 检验和 GLR 检验的各自伴随概率差异都不大,这很可能表明这两类检验缺乏区分度。相比之下,本文提出的基于切米雷泽鞅转化的检验统计量 K_n 与 C_n 具有更好的区分度。另外针对不同期限利率数据, K_n 与 C_n 的实证检验结果也比较相近,这与上节的蒙特卡洛模拟结果具有一致性。

4 结束语

漂移函数的估计与检验问题比波动函数的估计与检验来的困难,关于漂移函数的单独检验方法也相对较少。目前存在的一些关于漂移函数的检验方法很多还只是针对简单假设的设定检验,对于复合假设的许多检验方法也不满足渐近分布无关性,而且大部分对漂移函数的检验还依赖于波动函数形式。本文首先分析了漂移函数设定检验中存在的达宾问题,然后针对上述关于以往检验方法的几点缺陷,提出了两个基于切米雷泽鞅转化的漂移函数的设定检验方法。其对漂移函数参数形式的设定检验具有渐近分布无关性,且其对漂移函数的检验不依赖于波动函数的具体形式。

蒙特卡洛模拟结果表明所提出的检验方法有合理的检验水平和检验功效。将这些检验方法应用到我国的短期利率的动态特征的分析表明:我国的一个月期限的 SHIBOR 数据能较好的被线性均值回复的漂移函数所解释,而对于更短期限的 SHIBOR 数据不能完全被线性均值回复的漂移函数所解释。当然,由于本文提出的漂移函数参数形式的设定检验方法无需知道波动函数的具体形式,因只利用了较少的信息,从而也降低其检验功效。不过实证分析体现基于切米雷泽鞅转化的漂移函数设定检验方法比 J 检验和 GLR 检验更能区分不同的利率动态过程。

参 考 文 献:

[1] 洪永淼. 金融计量的新近发展[J]. 经济学季刊, 2002, 1(2): 249 - 268.

Hong Yongmiao. Some recent development in financial econometrics[J]. China Economic Quarterly, 2002, 1(2): 249 - 268. (in Chinese)

- [2]Chen S ,Hardle W ,et al. An empirical likelihood goodness-of-fit test for time series [J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* ,2003 ,65(3) : 663 – 678.
- [3]Fan J ,Zhang C. A reexamination of diffusion estimators with applications to financial model validation [J]. *Journal of the American Statistical Association* ,2003 ,98(461) : 118 – 134.
- [4]Kutoyants Y A. On the goodness-of-fit testing for ergodic diffusion processes [J]. *Journal of Nonparametric Statistics* ,2010 ,22(4) : 529 – 543.
- [5]Negri I ,Nishiyama Y. Goodness of fit test for ergodic diffusion processes [J]. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* ,2009 ,61(4) : 919 – 928.
- [6]Negri I ,Nishiyama Y. Goodness of fit test for ergodic diffusions by tick time sample scheme [J]. *Statistical Inference for Stochastic Processes* ,2010 ,13(1) : 81 – 95.
- [7]Masuda H ,Negri I ,et al. Goodness-of-fit test for ergodic diffusions by discrete-time observations: An innovation martingale approach [J]. *Journal of Nonparametric Statistics* ,2011 ,23(2) : 237 – 254.
- [8]Monsalve-Cobis A ,Gonzalez-Manteiga W ,et al. Goodness-of-fit test for interest rate models: An approach based on empirical processes [J]. *Computational Statistics & Data Analysis* ,2011 ,55: 3073 – 3092.
- [9]Khamaladze E V. Martingale approach to the goodness of fit tests [J]. *Theory of Probability and its Applications* ,1981 ,26: 246 – 265.
- [10]Khamaladze E V ,Koul H L. Martingale transforms goodness-of-fit tests in regression models [J]. *The Annals of Statistics* ,2004 ,32(3) : 995 – 1034.
- [11]Koul H L. Model Diagnostics Via Martingale Transforms: A Brief Review [M]. *Frontiers in Statistics* (ed. J. Fan ,HL Koul) ,2006: 183 – 206.
- [12]Durbin J. *Distribution Theory for Tests Based on The Sample Distribution Function* [M]. *Society for Industrial Mathematics* ,1973.
- [13]Li B. Asymptotically distribution-free goodness-of-fit testing: A unifying view [J]. *Econometric Reviews* ,2009 ,28(6) : 632 – 657.
- [14]Bai J. Testing parametric conditional distributions of dynamic models [J]. *Review of Economics and Statistics* ,2003 ,85(3) : 531 – 549.
- [15]Stute W ,Thies S ,Zhu L X. Model checks for regression: An innovation process approach [J]. *Annals of Statistics* ,1998 ,26(6) : 1916 – 1934.
- [16]Koul H L ,Song W. Conditional variance model checking [J]. *Journal of Statistical Planning and Inference* ,2010 ,140(4) : 1056 – 1072.
- [17]Chapman D A ,Pearson N D. Is the short rate drift actually nonlinear? [J]. *The Journal of Finance* ,2000 ,55(1) : 355 – 388.
- [18]Chan K ,Karolyi G ,et al. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate [J]. *Journal of Finance* ,1992 ,47(3) : 1209 – 1227.
- [19]洪永淼 ,林 海. 中国市场利率动态研究——基于短期国债回购利率的实证分析 [J]. *经济学季刊* ,2006 ,5(2) : 511 – 532.
Hong Yongmiao ,Lin Hai. Performance of discrete-time spot rate models in China: An empirical test on Chinese Repo Rates [J]. *China Economic Quarterly* ,2006 ,5(2) : 511 – 532. (in Chinese)
- [20]刘金全 ,郑挺国. 利率期限结构的马尔科夫区制转移模型与实证分析 [J]. *经济研究* ,2006 ,(11) : 82 – 91.
Liu Jinquan ,Zheng Tingguo. Markov regime switching model and empirical analysis of the term structure of interest rates [J]. *Economic Research Journal* ,2006 ,(11) : 82 – 91. (in Chinese)
- [21]范龙振. 短期利率在上交所债券市场的实证分析 [J]. *管理科学学报* ,2007 ,10(2) : 80 – 89.
Fan Longzhen. Empirical analysis of short interest rate models with half-year interest rate in the Shanghai stock exchange [J]. *Journal of Management Sciences in China* ,2007 ,10(2) : 80 – 89. (in Chinese)
- [22]范龙振. 以 1 年期储蓄存款利率为状态变量的跳跃型广义 Vasicek 模型 [J]. *管理科学学报* ,2010 ,13(10) : 69 – 78.
Fan Longzhen. Generalized Vasicek model with jump type one-year deposit rate as state variable [J]. *Journal of Manage-*

ment Sciences in China, 2010, 13(10): 69–78. (in Chinese)

[23] 陈 晖, 谢 赤. 包含 Jump-Arch 过程的利率模型及其应用 [J]. 管理科学学报, 2008, 11(2): 80–90.

Chen Hui, Xie Chi. Diffusion model including the Jump-Arch process and its application [J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(2): 80–90. (in Chinese)

[24] 吴吉林, 张二华, 原鹏飞. 我国银行间同业拆借利率的动态研究——基于跳跃-扩散-机制转换模型的实证分析 [J]. 管理科学学报, 2011, 14(11): 33–41.

Wu Jilin, Zhang Erhua, Yuan Pengfei. Study on dynamic behavior of Chinese interbank offered rate: The empirical analysis based on jump-diffusion-regime switching model [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(11): 33–41. (in Chinese)

[25] Chen Q, Zheng X, Pan Z. Asymptotically Distribution-Free Tests for the Volatility Function of a Diffusion [R]. Working Paper, Shanghai Jiaotong University, 2012.

[26] Li F. Testing the parametric specification of the diffusion function in a diffusion process [J]. Econometric Theory, 2007, 23(2): 221–250.

[27] Koul H, Stute W. Nonparametric model checks for time series [J]. Annals of Statistics, 1999, 204–236.

Martingale-transformation-based specification test for drift function of interest rate model

CHEN Qiang¹, ZHENG Xu¹, XU Xiu²

1. Antai College of Economics & Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China;

2. Wang Yanan Institute for Studies in Economics, Xiamen University, Xiamen 361005, China

Abstract: Based on Khmaladze martingale transformation technology, two new tests for drift functions of interest rate models are constructed by the marked empirical processes. The asymptotic property of the tests and their calculation methods are also provided. The test statistics do not need to know the information about the diffusion function of interest models and they do not depend on an asymptotic distribution even for the composite null hypothesis. Monte Carlo simulations show that the tests have a reasonable size and power performance. The tests are also in effect when applied to analyzing the characteristics of short-term interest rates in China.

Key words: martingale transformation; interest rate model; specification test; Monte Carlo simulation; empirical analysis

附录 A: 正则性条件

为了具体说明, 本文对扩散过程 (2) 引入如下正则性条件

(A1) 存在与参数 θ 无关的常数 $C > 0$, 使得对于每一个 $x, y \in \Xi$, 有

$$|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C|x - y|.$$

(A2) 存在与参数 θ 无关的常数 $C > 0$, 使得对任意 $x \in \Xi$, 有 $\mu(x) + \sigma(x) \leq C(1 + |x|)$.

(A3) 对于函数 $P(\mu, x) = \int_0^x \exp\left\{-2 \int_0^y \frac{\mu(\tau)}{\sigma^2(\tau)} d\tau\right\} dy$ 满足 $\lim_{x \rightarrow \underline{x}} P(\mu, x) \rightarrow -\infty$ 与 $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} P(\mu, x) \rightarrow +\infty$; 且有

$$Q(\mu) = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \frac{1}{\sigma^2(y)} \exp\left\{2 \int_0^y \frac{\mu(\tau)}{\sigma^2(\tau)} d\tau\right\} dy < \infty.$$

(A4) 参数空间 Θ 是紧的, 且对任意给定 $\theta \in \Theta$, 漂移函数 $\mu(X_i, \theta)$ 满足条件 A1–A3.

(A5) 对任意 $x \in \Xi$, 有 $\mu(x, \theta)$ 在 θ_0 附近可微, 其导数 $\dot{\mu}(x, \theta_0) \triangleq (\partial \mu(x, \theta) / \partial \theta) |_{\theta=\theta_0}$ 满足 $E(\dot{\mu}(X, \theta_0))^2$ 与

$E \|\dot{\mu}(X, \theta_0)\|^4$ 存在, 且对于每一个 $k < \infty$ 及 $\Gamma = \{(i, \theta) : 1 \leq i \leq n, \sqrt{n}(\theta - \theta_0) \leq k\}$, 有

$$\sup_{i \in F} \sqrt{n} |\mu(X_i, \theta) - \mu(X_i, \theta_0) - (\theta - \theta_0)^T \dot{\mu}(X_i, \theta_0)| = o_p(1).$$

(A6) 对任意 $x \in \Xi$, $d \times d$ 阶方阵 $\ddot{\mu}(x, \theta_0) = (\partial^2 \mu(x, \theta) / \partial \theta \partial \theta^T) |_{\theta = \theta_0}$ 的数学期望存在, 且存在非负函数 $b(x, \theta_0)$, $E b(X, \theta_0) < \infty, \forall \delta > 0, \exists \gamma > 0$ 使得 $\|\theta - \theta_0\| \leq \gamma$ 就意味着 $\|\dot{\mu}(x, \theta) - \dot{\mu}(x, \theta_0) - \ddot{\mu}(x, \theta_0)(\theta - \theta_0)\| \leq \delta b(x, \theta_0) \|\theta - \theta_0\|$.

(A7) 波动函数为正且有界, 即对任意 $x \in \Xi, \sigma(x) > 0, \sup_{x \in \Xi} \sigma(x) < +\infty$.

(A8) 存在 θ_0 的一致估计量 $\hat{\theta}$ 满足 $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \iota(X_i, \theta_0) + o_p(1)$, 其中 $\iota(X_i, \theta_0)$ 为实值向量函数, 且有

$$(i) E \iota(X, \theta_0) = 0 \quad (ii) E \iota(X, \theta_0) \iota(X, \theta_0)^T < \infty.$$

(A9) 假定 $g(x)$ 在 $x = \bar{x}$ 附近线性独立.

(A10) 核函数 $K(\cdot)$ 是有界的关于 0 对称的函数, 且满足 $\int K(u) du = 1, \int |u| K(u) du < \infty$ 与 $\int u K(u) du = 0$.

其中 (A1) 与 (A2) 保证了扩散方程 (2) 强解的存在性和唯一性. (A3) 确保了随机过程 X 的遍历性 (ergodic) 且存在平稳密度 (stationary density) $f(x) = \frac{1}{Q(\mu) \sigma^2(x)} \exp\left\{2 \int_0^x \frac{\mu(\tau)}{\sigma^2(\tau)} d\tau\right\}$, 其对应的分布函数为 $F(x)$. 本文假定初始值 X_0 是来自 $F(x)$ 的一个随机变量, 因此扩散过程是平稳的. (A3) 也为定理 2 的渐近性质提供基础. (A4) - (A7) 涉及到波动函数与漂移函数的平滑性. (A8) 确保参数经验过程的收敛性. (A9) 确保 M_s 的非奇异性. (A10) 是非参数核估计的常见的基本条件.

附录 B: 关于定理 2 的证明

令 $\Pi_n(X_i) = \frac{\sigma(X_i)}{\hat{\sigma}(X_i)} - 1$. 条件 (A1)、(A2)、(A5) 及 (A6) 确保了 $E \|g(X)\|^2 < \infty$, 下面通过 4 步证明定理 2.

(1) 因为在漂移函数设定正确的原假设条件下, e_i 的条件均值为 $E(e_i | X_i) = 0$, 条件方差为 $Var(e_i | X_i) = 1$. 由扩散过程的马尔科夫性知 $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ 为鞅过程序列, 基于条件 (A1) - (A4) 及 (A7). 由 Masuda 等^[7] 的定理 5 知当 $n \rightarrow \infty$, 且 $\Delta = O(n^{-2/3} (\ln(1+n))^{1/3})$ 时 $V_n(x) \Rightarrow B \circ F(x)$. 进而根据 Chen 等^[25] 的定理 1 的第 1 部分的证明知

$$W_n(x) = T_g(V_n(x)) \Rightarrow B \circ F(x) \tag{A-1}$$

(2) 将 $\hat{V}_n(x)$ 表示为如下四部分之和

$$\begin{aligned} \hat{V}_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{Y_i / \sqrt{\Delta} - \mu(X_i, \theta_0)}{\sigma(X_i)} \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma(X_i)} I(X_i \leq x) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu(X_i, \hat{\theta}) - \mu(X_i, \theta_0)}{\sigma(X_i)} \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma(X_i)} I(X_i \leq x) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{Y_i / \sqrt{\Delta} - \mu(X_i, \theta_0)}{\sigma(X_i)} \Pi_n(X_i) I(X_i \leq x) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu(X_i, \hat{\theta}) - \mu(X_i, \theta_0)}{\sigma(X_i)} \Pi_n(X_i) I(X_i \leq x) \\ &= V_n(x) + U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) \end{aligned} \tag{A-2}$$

对于 $U_1(x)$ 根据泰勒展开定理及条件 (A5) 有

$$\begin{aligned} U_1(x) &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\dot{\mu}(X_i, \theta_0)}{\sigma(X_i)} \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma(X_i)} \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) I(X_i \leq x) + o_p(1) \\ &= -E \frac{\dot{\mu}(X, \theta_0)}{\sigma(X)} \frac{\sqrt{\Delta}}{\sigma(X)} \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) I(X \leq x) + o_p(1) \\ &= -E g(X) \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) I(X \leq x) + o_p(1) \end{aligned} \tag{A-3}$$

对于 $U_2(x)$, 可将其进一步分解为如下两部分之和

$$\begin{aligned}
U_2(x) &= -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} e_i \frac{\hat{\sigma}(X_i) - \sigma(X_i)}{\sigma(X_i)} I(X_i \leq x) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} e_i \frac{\hat{\sigma}(X_i) - \sigma(X_i)}{\sigma(X_i)} \Pi_n(X_i) I(X_i \leq x) \\
&= U_{21}(x) + U_{22}(x)
\end{aligned} \tag{A-4}$$

根据 Li^[26] 的式 (A.30) 有 $\sup_{x \in \Xi} |\hat{\sigma}^2(x) - \sigma^2(x)| = O_p(h^2 + (nh)^{-1/2} \ln(n)^{1/2})$ 从而有 $\sup_{x \in \Xi} |\hat{\sigma}(x) - \sigma(x)| = o_p(1)$.

根据条件 (A7)、(A10) 类似于 Koul 与 Song^[16] 的引理 6.3 的证明,可以得到 $\sup_{x \in [\underline{x}, \bar{x}]} |U_{21}(x)| = o_p(1)$.

由于 $\sup_{x \in \Xi} |\sigma(x)| > 0$, 因此条件 $\sup_{x \in \Xi} |\hat{\sigma}(x) - \sigma(x)| = o_p(1)$ 意味着 $\sup_{x \in \Xi} |\Pi_n(x)| = o_p(1)$, 进而有 $\sup_{x \in [\underline{x}, \bar{x}]} |U_{22}(x)| = o_p(1)$. 综上得 $\sup_{x \in [\underline{x}, \bar{x}]} |U_2(x)| = o_p(1)$.

对于 $U_3(x)$, 因为 $\sup_{x \in \Xi} |\Pi_n(x)| = o_p(1)$, 类似对 $\sup_{x \in [\underline{x}, \bar{x}]} |U_1(x)| = o_p(1)$ 的证明可得 $\sup_{x \in [\underline{x}, \bar{x}]} |U_3(x)| = o_p(1)$.

于是

$$\sup_{x \in [\underline{x}, \bar{x}]} |\hat{V}_n(x) - V_n(x) + Eg(X) I(X \leq x) \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)| = o_p(1) \tag{A-5}$$

(3) 对任意 $X_i \in \Xi$ 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时,有

$$\begin{aligned}
\hat{g}(X_i) - g(X_i) &= \left(\frac{\dot{\mu}(X_i, \hat{\theta}) - \dot{\mu}(X_i, \theta_0)}{\sigma(X_i)} + \frac{\dot{\mu}(X_i, \hat{\theta})}{\sigma(X_i)} \Pi_n(X_i) \right) \sqrt{\Delta} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \dot{\mu}(X_i, \theta_0)}{\sigma(X_i)} + \frac{\dot{\mu}(X_i, \hat{\theta})}{\sigma(X_i)} \Pi_n(X_i) \right) \sqrt{\Delta} = o_p(1)
\end{aligned} \tag{A-6}$$

根据正文的定理 1 取 $c = I(X_i \leq x) \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)$ 并由条件 (A9) 及 (A-6) 知

$$T_g(\hat{g}(X_i) I(X_i \leq x) \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)) = 0. \tag{A-7}$$

且由 (A-5) 与 (A-6) 知式 (21) 的鞅转化过程 $\hat{W}_n(x)$ 中的 $\hat{V}_n(x)$ 可换成 $V_n(x)$, 即

$$\hat{W}_n(x) = V_n(x) - \int_{s \leq x} \hat{g}(s) {}^T \hat{M}_s^{-1} \int_{r \geq s} \hat{g}(r) dV_n(r) dF_n(s) \tag{A-8}$$

(4) 根据 (A-6) 及条件 (A5)、(A8) 知 $\sup_{X_i \in \Xi} \|\hat{g}(X_i) - g(X_i)\| = o_p(1)$, 进而有

$$\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \|\hat{g}(x) - g(x)\|^2 dF(x) = o_p(1) \tag{A-9}$$

又因为根据式 (17) 有 $dV_n(X_i) = \frac{e_i}{\sqrt{n}}$ 从而有

$$\int_s^{\bar{x}} (\hat{g}(x) - g(x)) dV_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{X_i \geq s} (\hat{g}(X_i) - g(X_i)) e_i = o_p(1) \tag{A-10}$$

基于 (A-7) 至 (A-10), 类似 Bai^[14] 的附录 C 中式 (C12) 的证明, 并依据 Koul 与 Stute^[27] 的定理 2.4 知, 对任意 $x \in [\underline{x}, x_1]$, $x_1 < \bar{x}$ 有

$$\hat{W}_n(x) = T_g(\hat{V}_n(x)) = T_g(V_n(x)) + o_p(1) \tag{A-11}$$

进而由 (A-1) 得 $\hat{W}_n(x) \Rightarrow B \circ F(x)$

证毕.