第 18 卷第 2 期
2015 年 2 月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol. 18 No. 2
Feb. 2015

基于不完全序值信息的双边匹配决策方法①

乐 琦[1,2]，樊治平[1]
(1. 东北大学工商管理学院，沈阳 110819; 2. 江西财经大学信息管理学院，南昌 330013)

摘要: 双边匹配问题一直是经济管理等领域学者关注的焦点问题之一. 针对基于不完全序值信息的双边匹配问题，从完全双边匹配的视角提出了一种新的决策方法. 首先描述了该双边匹配问题，同时引入了完全双边匹配的概念，接着探讨了完全双边匹配的存在性，进一步给出了完全双边匹配存在和不存在情形下的双边匹配决策方法; 在此基础上提出了求解基于不完全序值信息的双边匹配问题的算法，使用该算法可获得完全双边匹配结果. 实例分析说明了所提方法的可行性和有效性.

关键词: 双边匹配; 不完全序值; 完全双边匹配; 存在性; 优化模型

中图分类号: C 934 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007 - 9807(2015)02 - 0023 - 13

0 引 言

由于现实生活存在着大量的双边匹配问题，如婚姻匹配问题[1]、电子中介中的商品买卖问题[2-3]、大学招生录取中的学生与学校的匹配问题[4-6]、人力资源管理中的员工/求职者与岗位匹配问题[7-8]、二手房交易中的买方与卖方的匹配问题[9]、风险投资活动中风险投资商与风险企业匹配问题[10-11]等，因此，双边匹配问题具有广泛的实际应用背景.

双边匹配问题研究最早起源于男女婚姻指派与大学录取问题[12-13]. Gale 和 Shapley[12]最早研究了稳定指派的概念、存在性和最优性，并给出了延迟可接受算法用来获得男方最优稳定解和女方最优稳定解. Roth[14]通过对婚姻指派与大学录取问题的提炼与分析，在研究中明确界定了双边匹配的概念. 双边匹配要以满足双边主体的需求/要求为目标[14-15]，确定合理的匹配结果，使双边主体的满意度都尽可能大.

目前，针对基于序值信息的双边匹配问题研究受到了学者们的广泛关注. McVitie 和 Wilson[16]考虑了男女双边人数不等时的婚姻匹配问题，界定了此种情形下稳定匹配的概念并给出了求解算法. Teo 等[17]从最优欺骗策略的角度研究了男女婚姻匹配问题，并应用在新加坡中学录取时学生与学校的匹配问题中. Korkmaz 等[18]运用 AHP 法和改进的 G-S 算法将军事人员与工作任务进行匹配，并构建了基于双边匹配的决策支持系统. Vande Vate[19]使用图论方法研究了男女婚姻匹配的特征，通过建立并求解线性规划模型来获得匹配结果. Manlove 等[20]、Halldórsson 等[21]和 Iwama 等[22]重点研究了双边主体序值信息不完全和无差异情形下稳定匹配算法的复杂性. 近年来，一些学者针对基于不同偏好序信息的双边匹配问题，从累积前景理论的视角研究有针对性的决策分析方法[23-24].

已有研究丰富了双边匹配的相关理论与方法，并扩大了双边匹配实际应用背景. 然而，需要

---

① 收稿日期: 2011 - 07 - 24; 修订日期: 2012 - 12 - 29.
基金项目: 国家创新研究群体科学基金资助项目(71021061); 国家自然科学基金资助项目(71071029; 71261007); 教育部人文社会科学基金资助项目(12YJC630080); 江西省自然科学基金资助项目(20132BAB201015); 江西省教育厅科学技术研究资助项目(GJJ13292).
作者简介: 乐 琦(1983—)，男，江西东乡人，博士，讲师. Email: yueqichina@126.com

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

指出的是，已有研究大多聚焦获得一方主体最优的稳定匹配结果，而在一些现实问题中，主体可能更关注匹配的满意程度，且在匹配决策过程中，并不总是以一方主体为优先考虑对象. 此外，已有的基于不完全序值信息的双边匹配问题研究，可能获得的是不完全双边匹配结果. 这里需强调的是：导致只能获得不完全双边匹配结果的根本原因是双边主体给出的偏好信息较少，例如在一个 $m \times n$ 的双边匹配问题中，一边所有主体都仅给出另一边一位主体的偏好，反之亦然，此时只能获得不完全双边匹配结果. 因此，在只能获得不完全双边匹配结果的情形下，探讨如何让双边主体给出更多的且尽可能少的偏好信息，使得新双边匹配问题存在完全双边匹配，具有重要的理论意义. 鉴于此，本文则从双边主体的满意度角度出发，通过引入完全双边匹配的概念，并探讨其存在性，进一步给出完全双边匹配存在和不存在情形下的双边匹配决策方法.

1 问题描述

在考虑的基于不完全序值信息的双边匹配问题中，设甲方主体集合为 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，$m \geqslant 2$，其中 A_i 表示第 i 个甲方主体，$i = 1, 2, \cdots, m$；乙方主体集合为 $B = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$，其中 B_j 表示第 j 个乙方主体，$j = 1, 2, \cdots, n$；不妨设 $m \leqslant n$，记 $M = \{1, 2, \cdots, m\}$，$N = \{1, 2, \cdots, n\}$. 设 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{m \times n}$ 为甲方到乙方的不完全序值矩阵，$r_{ij} \in P_i \cup \phi$，其中 $P_i = \{1, 2, \cdots, p_i\}$，$p_i$ 表示甲方主体 A_i 给出的排序位置数；若 $r_{ij} \in P_i$，则 r_{ij} 表示甲方主体 A_i 把乙方主体 B_j 排在第 r_{ij} 位，若 $r_{ij} = \phi$，则 r_{ij}（或 ϕ）表示甲方主体 A_i 没有给出乙方主体 B_j 的偏好；设 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{m \times n}$ 为乙方到甲方的不完全序值矩阵，$t_{ij} \in Q_j \cup \phi$，其中 $Q_j = \{1, 2, \cdots, q_j\}$，$q_j$ 表示乙方主体 B_j 给出的排序位置数；若 $t_{ij} \in Q_j$，则 t_{ij} 表示乙方主体 B_j 把甲方主体 A_i 排在第 t_{ij} 位，若 $t_{ij} = \phi$，则 t_{ij}（或 ϕ）表示乙方主体 B_j 没有给出甲方主体 A_i 的偏好.

注 1 排序位置数 p_i（q_j）是指主体 A_i（B_j）给出多少个乙方主体（甲方主体）的偏好，例如在一个 4×6 的双边匹配问题中，$p_2 = 4$ 表示主体 A_2 仅给出了 4 个乙方主体的偏好.

注 2 $P_i = \{1, 2, \cdots, p_i\}$ 表示序值 1，序值 2，…，序值 p_i 组成的集合；$r_{ij} \in P_i$ 并不表明当 $j \neq j'$ 时，有 $r_{ij} \neq r_{ij'}$，即虽然 $r_{ij} \in P_i$，但 $\{r_{ij} \mid j = 1, 2, \cdots, n\} \neq P_i \cup \phi$. 通常，$\{r_{ij} \mid j = 1, 2, \cdots, n\} \subseteq P_i \cup \phi$，若 $\{r_{ij} \mid j = 1, 2, \cdots, n\} = P_i \cup \phi$，则表明主体 A_i 给出的为严格序值信息，即当 $j \neq j'$ 时，有 $r_{ij} \neq r_{ij'}$. 例如在一个 4×6 的双边匹配问题中，若主体 A_2 仅给出主体 B_1, B_2, B_4, B_6 的偏好，且序值分别为 1，1，3，3，则 $p_2 = 4$，$P_2 = \{1, 2, 3, 4\}$，且 $r_{21} = r_{22} = 1$，$r_{24} = r_{26} = 3$，$r_{23} = r_{25} = \phi$；此时 $\{r_{2j} \mid j = 1, 2, \cdots, 6\} = \{1, 3, \phi\} \neq P_2 \cup \phi$；若主体 A_3 仅给出主体 B_1, B_2, B_3, B_4, B_6 的偏好，且序值都为 1，则 $p_3 = 5$，$P_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，且 $r_{31} = r_{32} = r_{33} = r_{34} = r_{36} = 1$，$r_{35} = \phi$；此时 $\{r_{3j} \mid j = 1, 2, \cdots, 6\} = \{1, \phi\} \neq P_3 \cup \phi$；若主体 A_4 仅给出主体 B_2, B_4, B_5 的偏好，且序值分别为 2，1，3，则 $p_4 = 3$，$P_4 = \{1, 2, 3\}$，且 $r_{42} = 2$，$r_{44} = 1$，$r_{45} = 3$，$r_{41} = r_{43} = r_{46} = \phi$；此时 $\{r_{4j} \mid j = 1, 2, \cdots, 6\} = \{1, 2, 3\} = P_4 \cup \phi$.

依据文献[25 – 27]，给出如下定义.

定义 1 双边匹配界定为关于甲乙双边主体集合的映射 μ，即 $\mu: A \cup B \rightarrow A \cup B$，且 $\forall A_i \in A$，$\forall B_j \in B$ 满足下列条件：1）$\mu(A_i) \in B \cup A_i$；2）$\mu(B_j) \in A \cup B_j$；3）$\mu(A_i) = B_j$ 当且仅当 $\mu(B_j) = A_i$；4）若 $\mu(A_i) = B_j$，则 $\mu(A_i) \neq B_k$，$\forall k \in N, k \neq j$，其中 $\mu(A_i) = B_j$ 表示 A_i 与 B_j 在 μ 中匹配，$\mu(A_i) = A_i$ 与 $\mu(B_j) = B_j$ 分别表示 A_i 与 B_j 在 μ 中未匹配，即单身.

在主体偏好信息不完全的情形下，若主体 A_i 给出主体 B_j 的序值偏好，同时主体 B_j 给出主体 A_i 的序值偏好，则主体对 (A_i, B_j) 或 (B_j, A_i) 是兼容的[26]，否则主体对 (A_i, B_j) 或 (B_j, A_i) 是不兼容的. 称 (A_i, B_j) 为 μ – 匹配主体对当且仅当 (A_i, B_j) 是兼容的且 $\mu(A_i) = B_j$. 根据定义 1 中的条件 3）可知，若 (A_i, B_j) 为 μ – 匹配主体对，则 (B_j, A_i) 也为 μ – 匹配主体对.

注 3 依据文献[26]，可知主体对 (A_i, B_j) 是兼容的 $\Leftrightarrow$ 主体 A_i 和主体 B_j 都相互给出了对方的序值偏好，进一步可知 (A_i, B_j) 为 μ – 匹配主体对 $\Leftrightarrow \mu(A_i) = B_j$ 且 (A_i, B_j) 是兼容的.

因此，双边匹配 μ 可表示为 $\mu = \mu_D \cup \mu_S$，其中 μ_D 为匹配主体对的集合，μ_S 为单身主体对的集合. 进一步，给出偏好信息不完全情形下完全双边匹配的定义如下.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定义 2　对于任意双边匹配 μ，$\mu = \mu_D \cup \mu_S$，若 μ_D 中包含 $\min\{m, n\}$ 个匹配主体对，则称 μ 为完全的，即称 μ 为完全双边匹配.

注 4　定义 2 中，由于 $m \leqslant n$，此时只要 μ_D 中包含 m 个匹配主体对，则 μ 为完全双边匹配.

根据以上描述，主体偏好信息不完全的双边匹配问题，如图 1 所示，其中 A_i 与 B_j 之间的有向虚线的权值表示它们之间的偏好大小，A_i 与 B_j 之间的无向实线表示 A_i 与 B_j 匹配，中介通常是指撮合双边主体进行匹配的个人、机构或决策系统. 在图 1 中，主体 A_1 没有给出主体 B_n 的序值偏好，主体 A_2 没有给出主体 B_2 的序值偏好，主体 B_1 和 B_n 没有给出主体 A_1 的序值偏好，主体 B_{n-1} 没有给出主体 A_2 的序值偏好；由无向实线连接形成的匹配主体对集合表示 μ_D，B_n 在该匹配中是单身.

基于上面的论述，本文要解决的问题是：依据不完全序值矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{m\times n}$，运用某种决策分析方法获得完全双边匹配结果. 为方便起见，给出如下求解具有不完全序值信息的双边匹配问题的求解过程.

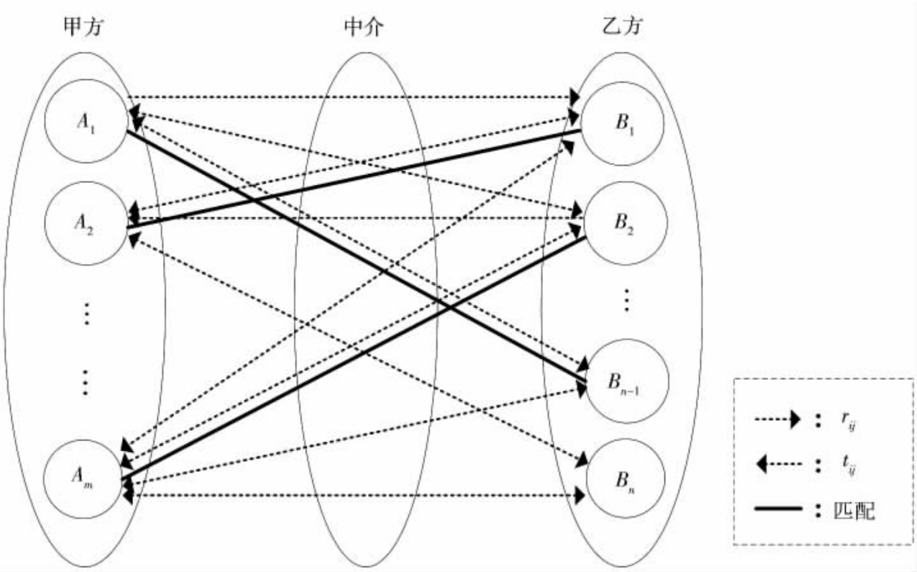

图 1　基于不完全序值信息的双边匹配问题

Fig. 1 Two-sided matching problem based on incomplete ordinal number information

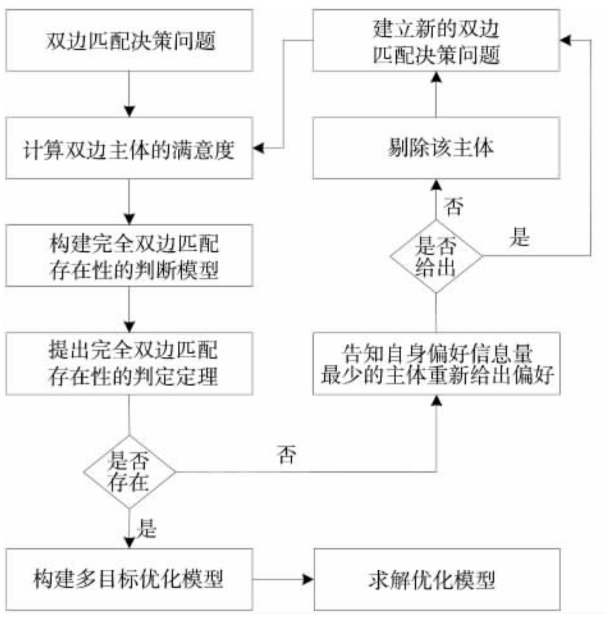

图 2　基于不完全序值信息的双边匹配问题的求解过程

Fig. 2 Solution process for two-sided matching problems based on incomplete ordinal number information

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2 完全双边匹配的存在性

由于每个主体都给出另一方部分或所有主体集合的序值偏好，因此，完全双边匹配可能不存在. 为了判断实际双边匹配问题是否存在完全双边匹配结果，给出如下判断方法.

2.1 满意度

不失一般性，若甲方主体 A_i 把乙方主体 B_j 排在第一位，则 A_i 对 B_j 的满意程度最高；若甲方主体 A_i 把乙方主体 B_j 排在最后一位，则 A_i 对 B_j 的满意程度最低. 这里，把一方主体对另一方主体的满意程度称为满意度，满意度界定在 [0，1] 区间上.

定义 3 设 α_{ij} 为甲方主体 A_i 对乙方主体 B_j 的满意度，β_{ij} 为乙方主体 B_j 对甲方主体 A_i 的满意度，则满意度 α_{ij} 与 β_{ij} 分别表示为

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}\dfrac{p_i+1-r_{ij}}{p_i}, & r_{ij}\neq\phi,\\ \varphi, & r_{ij}=\phi,\end{cases}\tag{1}$$
$$i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n$$

$$\beta_{ij}=\begin{cases}\dfrac{q_j+1-t_{ij}}{q_j}, & t_{ij}\neq\phi,\\ \varphi, & t_{ij}=\phi,\end{cases}\tag{2}$$
$$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

注 5 定义 3 中，若 $\alpha_{ij}=\varphi$，则 α_{ij} 表示甲方主体 A_i 对乙方主体 B_j 的满意度不存在；若 $\beta_{ij}=\varphi$，则 β_{ij} 表示乙方主体 B_j 对甲方主体 A_i 的满意度不存在.

依据式(1)，可得 $\alpha_{ij}\in(0,1]\cup\varphi$，$\alpha_{ij}=1$ 当且仅当 $r_{ij}=1$；依据式(2)，可得 $\beta_{ij}\in(0,1]\cup\varphi$，$\beta_{ij}=1$ 当且仅当 $t_{ij}=1$.

2.2 模型

依据式(1)和式(2)，不完全序值矩阵 $\boldsymbol{R}=[r_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{T}=[t_{ij}]_{m\times n}$ 转化为不完全满意度矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=[\alpha_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}}=[\beta_{ij}]_{m\times n}$，基于该不完全满意度矩阵，分别建立 0 - 1 矩阵 $\boldsymbol{\Psi}=[\psi_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}=[\omega_{ij}]_{m\times n}$，其中元素 ψ_{ij} 与 ω_{ij} 分别表示为

$$\psi_{ij}=\begin{cases}1, & \alpha_{ij}\neq\varphi,\\ 0, & \alpha_{ij}=\varphi,\end{cases}\tag{3}$$
$$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

$$\omega_{ij}=\begin{cases}1, & \beta_{ij}\neq\varphi,\\ 0, & \beta_{ij}=\varphi,\end{cases}\tag{4}$$
$$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

基于矩阵 $\boldsymbol{\Psi}=[\psi_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}=[\omega_{ij}]_{m\times n}$，建立综合 0 - 1 矩阵 $\boldsymbol{\Delta}=[\delta_{ij}]_{m\times n}$，其中

$$\delta_{ij}=\psi_{ij}\omega_{ij}=\begin{cases}1, & \psi_{ij}\neq\varphi,\omega_{ij}\neq\varphi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{5}$$
$$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$$

注 6 依据式(1) - 式(5)，可知 δ_{ij} 为 0 - 1 变量，其中 $\delta_{ij}=1$ 表示 $r_{ij}\neq\phi$ 且 $t_{ij}\neq\phi$，即主体对 (A_i,B_j) 是兼容的，$\delta_{ij}=0$ 表示 $r_{ij}=\phi$ 或 $t_{ij}=\phi$，即主体对 (A_i,B_j) 是不兼容的.

进一步，基于综合 0 - 1 矩阵 $\boldsymbol{\Delta}=[\delta_{ij}]_{m\times n}$，构建判断完全双边匹配存在性的优化模型. 设 x_{ij} 为 0 - 1 变量，其中 $x_{ij}=0$ 表示 $\mu(A_i)\neq B_j$（即 A_i 与 B_j 在 μ 中不匹配），$x_{ij}=1$ 表示 $\mu(A_i)=B_j$，则可构建如下优化模型(6)

$$\max\quad F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_{ij}\tag{6a}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,m\tag{6b}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\leqslant 1,\quad j=1,2,\cdots,n\tag{6c}$$

$$x_{ij}=0\text{ 或 }1,\ i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\tag{6d}$$

模型(6)中，式(6b)的含义是每个甲方主体必须且只能与 1 个乙方主体匹配；式(6c)的含义是每个乙方主体至多与 1 个甲方主体匹配.

2.3 判定定理

定理 1 当且仅当 $F^{*}=m$ 时存在完全双边匹配，其中 F^{*} 为模型(6)的最优目标函数值.

证明 首先证明必要性. 假设完全双边匹配存在，则存在双边匹配 $\mu=\mu_{\mathrm{D}}\cup\mu_{\mathrm{S}}$，其中 $\mu_{\mathrm{D}}=\{(A_i,B_{f(i)})\mid i=1,2,\cdots,m\}$，$\mu(A_i)=B_{f(i)}$，$f(i)\in N$，$f(i)\neq f(k)$，$\forall k\in M,k\neq i$. 令 $\boldsymbol{X}'=[x'_{ij}]_{m\times n}$，其中

$$x'_{ij}=\begin{cases}1, j=f(i)\\ 0, j\neq f(i)\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$$

则 $\boldsymbol{X}'=[x'_{ij}]_{m\times n}$ 满足式(6b)—式(6d)，且 $F'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}x'_{ij}=m$. 由于 δ_{ij} 为 0 - 1 变量，则依据

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式(6a)—式(6d),可知 $F \leqslant m$. 因此 $F^* = F' = m$.

其次证明充分性. 设 $F^* = m, X^* = [x_{ij}^*]_{m\times n}$ 为对应于 F^* 的最优解. 依据式(6b)—式(6d),可设

$$x_{ij}^* = \begin{cases} 1, & j = f^*(i) \\ 0, & j \neq f^*(i) \end{cases}$$

$$f^*(i) \in N, f^*(i) \neq f^*(k), \forall k \in M, k \neq i$$

设 μ^* 为对应于 $X^* = [x_{ij}^*]_{m\times n}$ 的双边匹配,则 $\mu^* = \mu_D^* \cup \mu_S^*$,其中 $\mu_T^* = \{(A_i, B_{f^*(i)}) | i = 1, 2, \cdots, m\}$.

下面用反证法证明 $\delta_{i,f^*(i)} = 1, i = 1, 2, \cdots, m$. 假设 $\exists i_0 (i_0 \in M)$,使得 $\delta_{i_0,f^*(i_0)} = 0$,则依据式(6a),可得 $F^* < m$,这与 $F^* = m$ 矛盾. 因此,$\delta_{i,f^*(i)} = 1, i = 1, 2, \cdots, m$. 依据式(3)—式(5),可得 $\alpha_{i,f^*(i)} \neq \varphi, \beta_{i,f^*(i)} \neq \varphi$. 因此,$\mu^* = \mu_D^* \cup \mu_S^*$ 为完全双边匹配. 证毕.

3　完全双边匹配存在情形下的双边匹配决策方法

针对考虑的双边匹配问题,若其存在完全双边匹配,则给出下面的方法进行求解.

3.1　模型建立

基于不完全满意度矩阵 $\tilde{A} = [\alpha_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\tilde{B} = [\beta_{ij}]_{m\times n}$,分别建立完全满意度矩阵 $\bar{\Psi} = [\bar{\psi}_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\bar{\Omega} = [\bar{\omega}_{ij}]_{m\times n}$,元素 $\bar{\psi}_{ij}$ 与 $\bar{\omega}_{ij}$ 分别表示为

$$\bar{\psi}_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \alpha_{ij} \neq \varphi, \\ -K, & \alpha_{ij} = \varphi, \end{cases} i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

$$\bar{\omega}_{ij} = \begin{cases} \beta_{ij}, & \beta_{ij} \neq \varphi, \\ -K, & \beta_{ij} = \varphi, \end{cases} i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

其中 K 为足够大的正数.

依据完全满意度矩阵 $\bar{\Psi} = [\bar{\psi}_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\bar{\Omega} = [\bar{\omega}_{ij}]_{m\times n}$,构造获得完全双边匹配结果的优化模型. 设 y_{ij} 表示一个 0 – 1 变量,其中 $y_{ij} = 0$ 表示 $\mu(A_i) \neq B_j$, $y_{ij} = 1$ 表示 $\mu(A_i) = B_j$,则可构建如下多目标优化模型(9)

$$\max \quad Z_A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{\psi}_{ij} y_{ij} \tag{9a}$$

$$\max \quad Z_B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_{ij} y_{ij} \tag{9b}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n y_{ij} = 1, i = 1, 2, \cdots, m \tag{9c}$$

$$\sum_{i=1}^m y_{ij} \leqslant 1, j = 1, 2, \cdots, n \tag{9d}$$

$$y_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n \tag{9e}$$

模型(9)中,式(9a)和式(9b)是目标函数; 式(9a)的含义是最大化所有甲方主体关于乙方主体的满意度之和; 式(9b)的含义是最大化所有乙方主体关于甲方主体的满意度之和; 式(9c)的含义是每个甲方主体必须且只能与 1 个乙方主体匹配; 式(9d)的含义是每个乙方主体至多与 1 个甲方主体匹配.

注 7　由于 $m \leqslant n$,因此要确定完全双边匹配,式(9c)应取等号,式(9d)应取不等号. 因而,式(9c)表示每个甲方主体必须且只能与 1 个乙方主体匹配,式(9d)表示每个乙方主体至多与 1 个甲方主体匹配. 若 $m > n$,则可通过互换原问题中的甲乙双边主体,构建模型(9),此时约束条件表达式仍为式(9c)和式(9d).

3.2　模型求解

为了求解该模型,考虑到目标函数的量纲可能不同,本文采用基于函数隶属度的加权方法[28]. 设 $Z_A^{\max}$ 与 $Z_B^{\max}$ 分别为单独考虑目标 Z_A 与 Z_B 时所得的单目标函数最优值,$Z_A^{\min}$ 与 $Z_B^{\min}$ 为相应的单目标函数最劣值,则隶属度函数 μ_{Z_A} 与 μ_{Z_B} 可分别定义为

$$\mu_{Z_A} = \frac{Z_A^{\max} - Z_A}{Z_A^{\max} - Z_A^{\min}} \tag{10}$$

$$\mu_{Z_B} = \frac{Z_B^{\max} - Z_B}{Z_B^{\max} - Z_B^{\min}} \tag{11}$$

设 w_A 和 w_B 分别表示隶属度函数 μ_{Z_A} 和 μ_{Z_B}(即 Z_A 和 Z_B)的权重,满足 $0 < w_A, w_B < 1$, $w_A + w_B = 1$. 在现实的双边匹配问题中,w_A 和 w_B 可被分别视为甲方主体和乙方主体的重要程度,通常由中介依据双边主体的地位来考虑如何确定权重. 若认为双边主体在匹配过程中处

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

于平等地位，则有 $w_A = w_B$. 若认为双边主体在匹配过程中的地位不同，即一方主体与另一方主体相比在匹配过程中显得重要，则有 $w_A \neq w_B$，在这种情况下，可以采取通过比较两个目标的方式来确定权重. 例如，若目标 Z_A 比目标 Z_B 重要，且其重要程度为 θ，$\theta > 0$，则有 $w_A = \dfrac{\theta}{1+\theta}$ 和 $w_B = \dfrac{1}{1+\theta}$.

通过线性加权法建立新的目标函数为

$$\min Z = w_A \mu_{Z_A} + w_B \mu_{Z_B}$$

进一步，若用式(12a)替代式(9a)和式(9b)，则多目标优化模型(9)转化为单目标优化模型

$$\min Z = w_A \mu_{Z_A} + w_B \mu_{Z_B} \tag{12a}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1,\ i = 1,2,\cdots,m \tag{12b}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \leqslant 1,\ j = 1,2,\cdots,n \tag{12c}$$

$$y_{ij} = 0 \text{ 或 } 1,\ i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n \tag{12d}$$

显然，模型(12)可转化为标准的指派问题模型，这样可使用匈牙利法[29]进行求解. 当模型(12)中的变量和约束条件个数较多时，可采用 Lingo11.0、Cplex9.0、WinQSB2.0 等软件，或采用启发式方法或智能优化算法. 根据模型求解结果，可获得双边匹配结果.

注 8 在计算 $Z_A^{\min}$ 与 $Z_B^{\min}$ 时，由于考虑到的是不完全序值信息，则式(9a)与式(9b)中的元素应分别表示为

$$\bar{\psi}_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \alpha_{ij} \neq \varphi \\ K, & \alpha_{ij} = \varphi \end{cases}$$

$$\bar{\omega}_{ij} = \begin{cases} \beta_{ij}, & \beta_{ij} \neq \varphi \\ K, & \beta_{ij} = \varphi \end{cases}$$

其中 K 为足够大的正数.

定理 2 模型(12)必存在最优解，目标函数最优值 $Z^* > 0$.

证明 把单独考虑目标 Z_A 与 Z_B 的最大化优化的模型分别记为模型(12.1)与模型(12.2)，把单独考虑目标 Z_A 与 Z_B 的最小化优化模型分别记为模型(12.3)与模型(12.4). 根据模型(12.1)—模型(12.4)及模型(12)的特征可知，若模型(12.1)存在最优解，则模型(12.2)—模型(12.4)及模型(12)的最优解存在性类似可证.

由于完全双边匹配存在，则存在 $\mu = \mu_D \cup \mu_S$，$\mu_D = \{(A_i, B_{f(i)}) \mid i = 1,2,\cdots,m\}$，$\mu(A_i) = B_{f(i)}$，$f(i) \in N$，$f(i) \neq f(k)$，$\forall k \in M, k \neq i$. 令 $Y' = [y'_{ij}]_{m\times n}$，其中

$$y'_{ij} = \begin{cases} 1, & j = f(i) \\ 0, & j \neq f(i) \end{cases}$$

$$i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n$$

则 $Y' = [y'_{ij}]_{m\times n}$ 满足式(9c)—式(9e)，且 $Z'_A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{\psi}_{ij} y'_{ij} > 0$. 由于模型(12.1)是含有 $m\times n$ 个变量的 0 - 1 整数规划，则它最多产生 2^{mn} 个可行解. 进一步地可知，模型(12.1)的可行域有界且非空. 因此，模型(12.1)必存在最优解，且 $Z_A^{\max} \geqslant Z'_A > 0$，其中 $Z_A^{\max}$ 为模型(12.1)的最优值. 证毕.

根据多目标规划理论可知，模型(12)的最优解是模型(9)的有效解. 通过求解模型(12)，可获得完全双边匹配结果.

4 完全双边匹配不存在情形下的双边匹配决策方法

针对考虑的双边匹配问题，若其不存在完全双边匹配，则给出下面的交互式算法将原问题进行转化，使得新问题存在完全双边匹配，然后可使用第 3 节的方法进行求解；最后给出求解基于不完全序值信息的双边匹配问题的算法.

算法 1

步骤 1 中介告知自身偏好信息量最少的主体，该双边匹配问题不存在完全双边匹配，并要求所有自身偏好信息量最少的主体给出更多序值偏好（即增加自身的序值信息），转步骤 2；

步骤 2 若所有自身偏好信息量最少的主体都重新给出更多序值偏好，则重新整理序值信息（即重新整理所有自身偏好信息量最少的主体的序值信息），建立新的双边匹配问题，转步骤 3，否则转步骤 4；

步骤 3 依据式(1)—式(5)，建立关于新问题的模型(6)；依据定理 1，判断该新问题是否存在完全双边匹配，若存在，则转步骤 5，否则转步骤 1；

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

步骤 4　剔除自身偏好信息量最少的主体中不同意给出更多序值偏好的那些主体，重新整理序值信息(即删除这些主体给出的序值信息和关于这些主体的序值信息后，重新整理每个主体的序值信息)，建立新的双边匹配问题，转步骤 3;

步骤 5　终止.

注 9　自身偏好信息量最少的主体是指主体 A_k 或 $B_{k'}$，其中 $p_k = \min\{p_1, p_2, \cdots, p_m, q_1, q_2, \cdots, q_n\}$，$k \in M$，或 $q_{k'} = \min\{p_1, p_2, \cdots, p_m, q_1, q_2, \cdots, q_n\}$，$k' \in N$. 若 $p_i < p_k$(或 $p_i < q_j$)，则主体 A_i 的偏好信息量小于主体 A_k(或主体 B_j)的偏好信息量; 若 $q_j < q_{k'}$(或 $q_j < p_i$)，则主体 B_j 的偏好信息量小于主体 $B_{k'}$(或主体 A_i)的偏好信息量.

注 10　算法 1 是基于自身偏好信息量最少的主体是否给出更多序值偏好而提出的，此时双边主体给出的是尽可能少的偏好信息，因而新问题与原问题的初始序值信息的差异性也较小; 因此，将新问题的完全双边匹配结果视为原问题的双边匹配结果具有合理性.

定理 3　针对基于完全序值信息/偏好信息量完全的双边匹配问题，完全双边匹配存在.

证明　针对基于完全序值信息的双边匹配问题，设 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{m\times n}$ 为甲方到乙方的完全序值评价矩阵，其中 r_{ij} 表示甲方主体 A_i 把乙方主体 B_j 排在第 r_{ij} 位，$r_{ij} \in N$，设 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{m\times n}$ 为乙方到甲方的完全序值评价矩阵，其中 t_{ij} 表示乙方主体 B_j 把甲方主体 A_i 排在第 t_{ij} 位，$t_{ij} \in M$，则完全双边匹配存在当且仅当下列不等式组(13)有解

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \cdots, m \tag{13a}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \leqslant 1,\ j = 1, 2, \cdots, n \tag{13b}$$

$$y_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n \tag{13c}$$

显然

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases},$$

$$i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$$

为不等式组(13)的解，因此完全双边匹配存在.　　证毕.

定理 4　算法 1 至多经过 $m(n-1) + (m-1)n$ 次迭代收敛.

证明　由于每个主体都给出另一方部分或所有主体的序值，则总体偏好信息量最少的情形是每个主体都给出另一方某个主体的序值. 在此情形下，依据算法 1 的收敛条件，易知经过 $m(n-1) + (m-1)n$ 次迭代后，原问题转化为基于完全序值信息的双边匹配问题. 因此，依据定理 3，可知完全双边匹配存在，此时算法 1 终止. 进一步可知，针对总体偏好信息量介于最少与完全之间的双边匹配问题，算法 1 至多经过 $m(n-1) + (m-1)n - 1$ 次迭代终止. 因此，算法 1 至多经过 $m(n-1) + (m-1)n$ 次迭代收敛.　　证毕.

综上，求解基于不完全序值信息的双边匹配问题的算法及步骤如下:

算法 2

步骤 1　依据式(1)和式(2)，将不完全序值矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{m\times n}$ 转化为不完全满意度矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{m\times n}$;

步骤 2　依据式(3)和式(4)，建立 0 - 1 矩阵 $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_{ij}]_{m\times n}$;

步骤 3　依据式(5)，建立综合 0 - 1 矩阵 $\boldsymbol{\Delta} = [\delta_{ij}]_{m\times n}$;

步骤 4　基于综合 0 - 1 矩阵 $\boldsymbol{\Delta} = [\delta_{ij}]_{m\times n}$，构建优化模型(6);

步骤 5　求解优化模型(6)，并依据定理 1，判断是否存在完全双边匹配; 若存在，则转步骤 6，若不存在，则运用算法 1，建立新的双边匹配问题，转步骤 5′;

步骤 5′　依据式(1)和式(2)，构建新问题的不完全满意度矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{m\times n}$;

步骤 6　依据式(7)和式(8)，建立完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{\Psi}} = [\bar{\psi}_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\overline{\boldsymbol{\Omega}} = [\bar{\omega}_{ij}]_{m\times n}$;

步骤 7　依据完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{\Psi}} = [\bar{\psi}_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\overline{\boldsymbol{\Omega}} = [\bar{\omega}_{ij}]_{m\times n}$，建立多目标优化模型(9);

步骤 8　依据模型(9)，建立并求解优化模型

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(12.1)—模型(12.4),可得 $Z_G^{\max}$,$Z_G^{\min}$,$G = A, B$;

步骤 9 依据式(9a)—式(12a),建立优化模型(12);

步骤 10 求解优化模型(12),确定双边匹配结果.

5 算例分析

例 1 广州某服装中介公司提供买卖双边形成合理交易的匹配服务. 该服装中介公司在某一时段收到 4 个甲方主体(即买方 A_1, A_2, A_3, A_4)的需求信息和 6 个乙方主体(即卖方 $B_1, B_2, \cdots, B_6$)的供给信息. 通过该中介公司,甲方主体从服装价格、服装质量、服装款式及信誉等 4 个指标对乙方主体进行评价,给出不完全序值矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{4\times6}$,如表 1 所示; 乙方主体从出价、付款方式及信誉等 3 个指标对甲方主体进行评价,给出不完全序值矩阵 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{4\times6}$,如表 2 所示.

为了解决上述问题,下面给出使用该方法的计算过程.

步骤 1 依据式(1)与式(2),将不完全序值矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{4\times6}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{4\times6}$ 转化为不完全满意度矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{4\times6}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{4\times6}$,如表 3 和表 4 所示.

表 1 甲方到乙方的不完全序值矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{4\times6}$

Table 1 Incomplete ordinal number matrix $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{4\times6}$ from side A to side B

甲方主体	乙方主体					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	3	1	5	2	ϕ	4
A_2	4	3	ϕ	1	2	ϕ
A_3	ϕ	1	3	4	5	2
A_4	2	4	1	3	ϕ	ϕ

表 2 乙方到甲方的不完全序值矩阵 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{4\times6}$

Table 2 Incomplete ordinal number matrix $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{4\times6}$ from side B to side A

甲方主体	乙方主体					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	3	2	ϕ	3	1
A_2	3	ϕ	3	1	2	4
A_3	ϕ	2	1	3	1	2
A_4	2	1	4	2	ϕ	3

表 3 不完全满意度矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{4\times6}$

Table 3 Incomplete satisfaction degree matrix $\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{4\times6}$

α_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	0.6	1	0.2	0.8	φ	0.4
A_2	0.25	0.5	φ	1	0.75	φ
A_3	φ	1	0.6	0.4	0.2	0.8
A_4	0.75	0.25	1	0.5	φ	φ

表 4 不完全满意度矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{4\times6}$

Table 4 Incomplete satisfaction degree matrix $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{4\times6}$

β_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	0.333 3	0.75	φ	0.333 3	1
A_2	0.333 3	φ	0.5	1	0.666 7	0.25
A_3	φ	0.666 7	1	0.333 3	1	0.75
A_4	0.666 7	1	0.25	0.666 7	φ	0.5

步骤 2 依据不完全满意度矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{4\times6}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{4\times6}$,运用式(3)与式(4),分别建立 0 − 1 矩阵 $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_{ij}]_{4\times6}$ 与 $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_{ij}]_{4\times6}$,如表 5 和表 6 所示.

表 5 0 − 1 矩阵 $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_{ij}]_{4\times6}$

Table 5 0 − 1 matrix $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_{ij}]_{4\times6}$

ψ_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	1	1	1	0	1
A_2	1	1	0	1	1	0
A_3	0	1	1	1	1	1
A_4	1	1	1	1	0	0

表 6 0 − 1 矩阵 $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_{ij}]_{4\times6}$

Table 6 0 − 1 matrix $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_{ij}]_{4\times6}$

ω_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	1	1	0	1	1
A_2	1	0	1	1	1	1
A_3	0	1	1	1	1	1
A_4	1	1	1	1	0	1

步骤 3 依据 0 − 1 矩阵 Ψ 与 Ω,运用式(5),建立综合 0 − 1 矩阵 $\Delta = [\delta_{ij}]_{4\times6}$,如表 7 所示.

步骤 4 基于综合 0 − 1 矩阵 $\Delta = [\delta_{ij}]_{4\times6}$,构建优化模型(6)

表 7 综合 0 − 1 矩阵 $\Delta = [\delta_{ij}]_{4\times6}$

Table 7 Compositive 0 − 1 matrix $\Delta = [\delta_{ij}]_{4\times6}$

δ_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	1	1	0	0	1
A_2	1	0	0	1	1	0
A_3	0	1	1	1	1	1
A_4	1	1	1	1	0	0

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\max F = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6}\delta_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{6}x_{ij} = 1, i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{4}x_{ij} \leqslant 1, j = 1,2,\cdots,6$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, i = 1,2,3,4; j = 1,2,\cdots,6$$

步骤 5　求解优化模型(6),可得 $F^{*} = 4$,因此,完全双边匹配存在.

步骤 6　依据式(7)和式(8),不完全满意度矩阵 $\widetilde{A} = [\alpha_{ij}]_{4\times6}$ 与 $\widetilde{B} = [\beta_{ij}]_{4\times6}$ 转化为完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{\Psi}} = [\bar{\psi}_{ij}]_{4\times6}$ 与 $\overline{\boldsymbol{\Omega}} = [\bar{\omega}_{ij}]_{4\times6}$,如表8和表9所示.

表 8　完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{\Psi}} = [\bar{\psi}_{ij}]_{4\times6}$

Table 8 Complete satisfaction degree matrix $\overline{\boldsymbol{\Psi}} = [\bar{\psi}_{ij}]_{4\times6}$

$\bar{\psi}_{ij}$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	0.6	1	0.2	0.8	$-K$	0.4
A_2	0.25	0.5	$-K$	1	0.75	$-K$
A_3	$-K$	1	0.6	0.4	0.2	0.8
A_4	0.75	0.25	1	0.5	$-K$	$-K$

表 9　完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{\Omega}} = [\bar{\omega}_{ij}]_{4\times6}$

Table 9 Complete satisfaction degree matrix $\overline{\boldsymbol{\Omega}} = [\bar{\omega}_{ij}]_{4\times6}$

$\bar{\omega}_{ij}$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	0.333 3	0.75	$-K$	0.333 3	1
A_2	0.333 3	$-K$	0.5	1	0.666 7	0.25
A_3	$-K$	0.666 7	1	0.333 3	1	0.75
A_4	0.666 7	1	0.25	0.666 7	$-K$	0.5

步骤 7　依据完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{\Psi}} = [\bar{\psi}_{ij}]_{4\times6}$ 与 $\overline{\boldsymbol{\Omega}} = [\bar{\omega}_{ij}]_{4\times6}$,构建如下多目标优化模型(9)

$$\max Z_{\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6}\bar{\psi}_{ij}y_{ij}$$

$$\max Z_{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6}\bar{\omega}_{ij}y_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{6}y_{ij} = 1, i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{4}y_{ij} \leqslant 1, j = 1,2,\cdots,6$$

$$y_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, i = 1,2,3,4; j = 1,2,\cdots,6$$

步骤 8　依据模型(9),建立并求解模型(12.1)—模型(12.4),可得 $Z_{\mathrm{A}}^{\max} = 3.8$,$Z_{\mathrm{A}}^{\min} = 0.9$,$Z_{\mathrm{B}}^{\max} = 4$,$Z_{\mathrm{B}}^{\min} = 1.166\,6$.

步骤 9　不妨设 $w_{\mathrm{A}} = w_{\mathrm{B}} = 0.5$,则依据式(9a)-式(12a),可构建如下优化模型(12)

$$\min Z = 1.361 - \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{6}y_{ij} = 1, i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{4}y_{ij} \leqslant 1, j = 1,2,\cdots,6$$

$$y_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, i = 1,2,3,4; j = 1,2,\cdots,6$$

其中系数矩阵 $(c_{ij})_{4\times6}$,如表 10 所示.

表 10　系数矩阵 $(c_{ij})_{4\times6}$

Table 10 Coefficient matrix $(c_{ij})_{4\times6}$

c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	0.279 9	0.231 2	0.166 8	$-K'$	$-K'$	0.245 5
A_2	0.101 9	$-K'$	$-K'$	0.348 9	0.247	$-K'$
A_3	$-K'$	0.290 1	0.279 9	0.127 8	0.211	0.270 2
A_4	0.247	0.219 6	0.216 5	0.203 9	$-K'$	$-K'$

步骤 10　通过 Lingo 11.0 优化软件包编程求解优化模型(12),可得

$$X^{*} = [x_{ij}^{*}]_{4\times6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此,双边匹配结果为 $\mu^{*} = \mu_{\mathrm{D}}^{*} \cup \mu_{\mathrm{S}}^{*}$,其中 $\mu_{\mathrm{D}}^{*} = \{(A_1,B_1),(A_2,B_4),(A_3,B_2),(A_4,B_3)\}$,$\mu_{\mathrm{S}}^{*} = \{(B_5,B_5),(B_6,B_6)\}$;即 A_1 与 B_1 匹配,A_2 与 B_4 匹配,A_3 与 B_2 匹配,A_4 与 B_3 匹配,B_5 和 B_6 单身.

在本例中,若使用甲方最优或乙方最优的 G-S 算法,则可得匹配结果为 $\mu'^{*} = \mu_{\mathrm{D}}'^{*} \cup \mu_{\mathrm{S}}'^{*}$,其中 $\mu_{\mathrm{D}}'^{*} = \{(A_1,B_1),(A_2,B_4),(A_3,B_2),(A_4,B_3)\}$,$\mu_{\mathrm{S}}'^{*} = \{(B_5,B_5),(B_6,B_6)\}$. 此时 3 种方法获得的匹配结果相同.

为阐明本文提出方法的意义,进一步给出如下分析.

例 2　某软件公司拟在 6 个岗位($A_1,A_2,\cdots,A_6$)招聘员工,该公司的人力资源部门经过初步筛选让 9 个求职者($B_1,B_2,\cdots,B_9$)进入最终的考核环节. 每个岗位所在部门的决策者从性格、专业技能、创造力、责任心以及团队合作等5个指标对各个求职者进行主观评价,给出关于求职者的不完全序值评价矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{6\times9}$,如表11所示;每个求职者从薪水和福利、发展前

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

景、性格爱好以及工作环境等4个指标对各个岗位进行主观评价，给出关于不同岗位的不完全偏好序向量 $T = [t_{ij}]_{6\times9}$，如表12所示；最后由某专门经营人力资源配置的中介公司进行决策.

为了解决该问题，下面简略说明使用所提方法的计算过程.

表 11 不完全序值矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{6\times9}$

Table 11 Incomplete ordinal number matrix $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{6\times9}$

岗位	求职者								
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9
A_1	ϕ	ϕ	1	4	3	ϕ	ϕ	2	ϕ
A_2	3	7	4	2	1	5	ϕ	ϕ	6
A_3	ϕ	1	ϕ	ϕ	4	ϕ	ϕ	2	3
A_4	2	3	ϕ	6	1	7	4	ϕ	5
A_5	5	3	7	4	9	1	2	6	8
A_6	4	ϕ	2	1	3	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ

表 12 不完全序值矩阵 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{6\times9}$

Table 12 Incomplete ordinal number matrix $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{6\times9}$

岗位	求职者								
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9
A_1	4	3	ϕ	ϕ	2	5	1	ϕ	4
A_2	ϕ	4	2	3	5	2	ϕ	3	ϕ
A_3	3	1	4	1	3	3	4	2	1
A_4	2	5	1	2	1	4	2	5	2
A_5	1	6	3	4	ϕ	1	5	4	3
A_6	4	3	ϕ	ϕ	2	5	1	ϕ	4

步骤 1 – 3 依据式(1)与式(2)，将不完全序值矩阵 $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{6\times9}$ 与 $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]_{6\times9}$ 转化为不完全满意度矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{6\times9}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{6\times9}$. 依据式(3)与式(4)，分别建立0–1矩阵 $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_{ij}]_{6\times9}$ 与 $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_{ij}]_{6\times9}$. 依据式(5)，建立综合0–1矩阵 $\boldsymbol{\Delta} = [\delta_{ij}]_{6\times9}$，如表13所示.

表 13 综合 0 – 1 矩阵 $\boldsymbol{\Delta} = [\delta_{ij}]_{6\times9}$

Table 13 Compositive 0 – 1 matrix $\boldsymbol{\Delta} = [\delta_{ij}]_{6\times9}$

δ_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9
A_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
A_2	0	1	1	1	1	1	0	0	0
A_3	0	1	0	0	1	0	0	1	1
A_4	1	1	0	1	1	1	1	0	1
A_5	1	1	1	1	0	1	1	1	1
A_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0

步骤 4 – 5 依据综合0–1矩阵 $\boldsymbol{\Delta} = [\delta_{ij}]_{6\times9}$，构建优化模型(6). 求解模型(6)，可得 $F^* = 5$，$m = 6$，$F^* < m$. 依据定理1可知，完全双边匹配不存在. 因此，下面须运用算法1.

1) 由于

$$\min\{p_1, p_2, \cdots, p_6, q_1, q_2, \cdots, q_9\} = 4,$$

$$p_1 = p_3 = p_6 = q_1 = q_3 = q_4 = q_9 = 4$$

因此，中介告知岗位 A_1, A_3, A_6 的决策者和求职者 B_1, B_3, B_4, B_9 给出更多偏好；

2) 不妨假定岗位 A_1, A_3, A_6 的决策者和求职者 B_1, B_3, B_4, B_9 都同意重新给出更多偏好，新的序值向量信息分别给出如下

$$R_1' = [\phi, \phi, 1, 4, 3, 5, \phi, 2, \phi],$$
$$R_3' = [\phi, 1, \phi, 5, 4, \phi, \phi, 2, 3],$$
$$R_6' = [4, \phi, 2, 1, 3, 6, 5, \phi, \phi],$$
$$T_1' = [4, \phi, 3, 2, 1, 5]^{\mathrm{T}},$$
$$T_3' = [6, 2, 4, 1, 3, 5]^{\mathrm{T}},$$
$$T_4' = [5, 3, 1, 2, 4, 6]^{\mathrm{T}},$$
$$T_9' = [4, \phi, 1, 2, 3, 5]^{\mathrm{T}}$$

其中 R_i' 表示岗位 A_i 的决策者给出的关于求职者的序值向量，T_j' 表示岗位求职者 B_j 给出的关于岗位的序值向量.

3) 依据式(1)—式(5)，重新构建关于新问题的优化模型(8). 求解模型(6)，可得 $F^* = 6$. 因此，依据定理1可知，完全双边匹配存在.

步骤 5′ – 7 依据式(1)和式(2)，构建关于新问题的不完全满意度矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = [\alpha_{ij}]_{6\times9}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\beta_{ij}]_{6\times9}$. 依据式(7)和式(8)，构建完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{\Psi}} = [\psi_{ij}]_{6\times9}$ 与 $\overline{\boldsymbol{\Omega}} = [\omega_{ij}]_{6\times9}$. 依据完全满意度矩阵 $\overline{\boldsymbol{\Psi}} = [\psi_{ij}]_{6\times9}$ 与 $\overline{\boldsymbol{\Omega}} = [\omega_{ij}]_{6\times9}$，构建多目标优化模型(9).

步骤 8 – 9 依据模型(9)，建立并求解模型(12.1)—模型(12.4)，可得 $Z_{\mathrm{A}}^{\max} = 5.857\ 1$，$Z_{\mathrm{A}}^{\min} = 1.415\ 9$，$Z_{\mathrm{B}}^{\max} = 5.833\ 3$，$Z_{\mathrm{B}}^{\min} = 1.300\ 1$. 不妨设 $w_{\mathrm{A}} = w_{\mathrm{B}} = 0.5$，则依据式(9a)—式(12a)，可构建优化模型(12)，其中系数矩阵 $(c_{ij})_{6\times9}$，如表14所示.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 14　系数矩阵$(c_{ij})_{6\times9}$

Table 14 Coefficient matrix $(c_{ij})_{6\times9}$

c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9
A_1	$-K'$	$-K'$	0.131	0.081 8	0.155 8	0.044 6	$-K'$	$-K'$	$-K'$
A_2	$-K'$	0.071 2	0.156 2	0.17	0.134 6	0.136 5	$-K'$	$-K'$	$-K'$
A_3	$-K'$	0.222 9	$-K'$	0.132 8	0.111 2	$-K'$	$-K'$	0.178 3	0.177 8
A_4	0.184 7	0.117 2	$-K'$	0.124 1	0.222 9	0.060 2	0.152 6	$-K'$	0.136 5
A_5	0.172 8	0.106	0.111 1	0.130 2	$-K'$	0.222 9	0.122 1	0.094 2	0.091 2
A_6	0.078 4	$-K'$	0.130 6	0.131	0.119 2	$-K'$	0.103 7	$-K'$	$-K'$

步骤 10　通过求解优化模型(12)，可得双边匹配结果为$\mu^* = \mu_D^* \cup \mu_S^*$，其中$\mu_D^* = \{(A_1,B_5),(A_2,B_4),(A_3,B_2),(A_4,B_1),(A_5,B_6),(A_6,B_3)\}$，$\mu_S^* = \{(B_7,B_7),(B_8,B_8),(B_9,B_9)\}$.

在本例中，若使用甲方最优(即岗位最优)的 G-S 算法，则可得匹配结果为$\mu'^* = \mu_D'^* \cup \mu_S'^*$，其中$\mu_D'^* = \{(A_2,B_4),(A_3,B_2),(A_4,B_5),(A_5,B_6)\}$，$\mu_S'^* = \{(A_1,A_1),(A_6,A_6),(B_1,B_1),(B_3,B_3),(B_7,B_7),(B_8,B_8),(B_9,B_9)\}$. 若使用乙方最优(即求职者最优)的 G-S 算法，则可得匹配结果为$\mu''^* = \mu_D''^* \cup \mu_S''^*$，其中$\mu_D''^* = \{(A_2,B_4),(A_3,B_2),(A_4,B_5),(A_4,B_5),(A_4,B_5)\}$，$\mu_S''^* = \{(A_1,A_1),(B_1,B_1),(B_3,B_3),(B_8,B_8),(B_9,B_9)\}$.

表 15 给出了这 3 种决策方法的匹配结果，表明用这 3 种决策方法获得的匹配结果不相同. 针对原问题，其不存在完全双边匹配，此时通过岗位最优的 G-S 算法只能获得由 4 个元素构成的匹配主体对集合μ_D，通过求职者最优的 G-S 算法只能获得由 5 个元素构成的匹配主体对集合μ_D；通过这两种方法获得的单身主体对集合μ_S既包含岗位主体，又包含求职者主体，因此双边主体都会产生补充更多的序值偏好的动机. 使用本文提出的方法，则首先运用算法 1，将原问题进行转化，使得新问题存在完全双边匹配，然后通过求解新问题可获得完全双边匹配结果μ^*. 这就说明了，对于不存在完全双边匹配的原问题，使用 G-S 等算法不能获得完全双边匹配结果，而使用本文提出的方法可以获得完全双边匹配结果，这就是本文提出方法的主要创新点所在.

表 15　三种决策方法的匹配结果μ^*

Table 15 Matching result μ^* of the three decision methods

双边匹配决策方法	匹配结果$\mu^* = \mu_D^* \cup \mu_S^*$	
	μ_D^*	μ_S^*
本文提出的方法	$(A_1,B_5),(A_2,B_4),(A_3,B_2),(A_4,B_1),(A_5,B_6),(A_6,B_3)$	$(B_7,B_7),(B_8,B_8),(B_9,B_9)$
岗位最优的 G-S 算法	$(A_2,B_4),(A_3,B_2),(A_4,B_5),(A_5,B_6)$	$(A_1,A_1),(A_6,A_6),(B_1,B_1),(B_3,B_3),(B_7,B_7),(B_8,B_8),(B_9,B_9)$
求职者最优的 G-S 算法	$(A_2,B_4),(A_3,B_2),(A_4,B_5),(A_5,B_6),(A_6,B_7)$	$(A_1,A_1),(B_1,B_1),(B_3,B_3),(B_8,B_8),(B_9,B_9)$

6　结束语

本文基于双边主体满意度的视角，研究了完全双边匹配的概念及存在性，构建了获得完全双边匹配结果的优化模型，提出了求解基于不完全序值信息的双边匹配问题的算法，主要结论如下.

1）给出的完全双边匹配的概念及存在性分析，丰富并发展了双边匹配的相关理论，为进一步开展双边匹配理论与方法的研究奠定了良好基础.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2）给出的完全双边匹配不存在情形下的交互式算法能够有效将原问题进行转化使得新问题存在完全双边匹配.

3）对于不存在完全双边匹配的原问题，使用已有的 G-S 等算法不能获得完全双边匹配结果，而使用本文提出的方法可以获得完全双边匹配结果，这也是本文方法的主要贡献所在.

4）本方法能够有效地解决基于不完全序值信息的双边匹配问题，丰富并发展了双边匹配方法研究的相关成果，为进一步研究基于混合序值信息的双边匹配问题提供了新思路和新途径.

此外，本方法具有概念清晰、实用有效等特点，有助于中介、企业或组织等对现实生活中的双边匹配问题做出判断，对双边匹配理论与方法等的实际应用具有较强的指导价值.

参 考 文 献:

[1] Cechlárováa K, Manloveb D F. The exchange-stable marriage problem[J]. Discrete Applied Mathematics, 2005, 152(1/3): 109 – 122.

[2] 张振华，汪定伟. 电子中介中的交易匹配研究[J]. 控制与决策，2005，20(8)：917 – 920.
Zhang Zhenhua, Wang Dingwei. Research on matching problem of electronic broker[J]. Control and Decision, 2005, 20(8): 917 – 920. (in Chinese)

[3] 樊治平，陈 希. 电子中介中基于公理设计的多属性交易匹配研究[J]. 管理科学，2009，22(3)：83 – 88.
Fan Zhiping, Chen Xi. Research on multi-attribute trade matching problem in electronic broker based on axiomatic design[J]. Journal of Management Science, 2009, 22(3): 83 – 88. (in Chinese)

[4] 魏立佳. 中国高考录取与博士生录取的机制设计[J]. 经济学(季刊)，2009，9(1)：349 – 362.
Wei Lijia. A design for college and graduate school admission[J]. China Economic Quarterly, 2009, 9(1): 349 – 362. (in Chinese)

[5] Clark M, Rothstein J, Schanzenbach D W. Selection bias in college admissions test scores[J]. Economics of Education Review, 2009, 28(3): 295 – 307.

[6] Biró P, Fleiner T, Irving R W, et al. The college admissions problem with lower and common quotas[J]. Theoretical Computer Science, 2010, 411(34/36): 3136 – 3153.

[7] Drigas A, Kouremenos S, Vrettaros S, et al. An expert system for job matching of the unemployed[J]. Expert Systems with Applications, 2004, 26(2): 217 – 224.

[8] Dursun M, Karsak E E. A fuzzy MCDM approach for personnel selection[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(6): 4324 – 4330.

[9] 陈 林，朱卫平. 基于二手市场与理性预期的房地产市场机制研究[J]. 管理科学学报，2011，14(2)：61 – 70.
Chen Lin, Zhu Weiping. Research on real estate market mechanism in the second-hand market and rational expectation[J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(2): 61 – 70. (in Chinese)

[10] Elitzur R, Gavious A. A multi-period game theoretic model of venture capitalists and entrepreneurs[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 144(2): 440 – 453.

[11] Sørensen M. How smart is smart money? A two-sided matching model of venture capital[J]. The Journal of Finance, 2007, 62(6): 2725 – 2762.

[12] Gale D, Shapley L. College admissions and the stability of marriage[J]. American Mathematical Monthly, 1962, 69(1): 9 – 15.

[13] Alkan A, Gale D. Stable schedule matching under revealed preference[J]. Journal of Economic Theory, 2003, 112(2): 289 – 306.

[14] Roth A E. Common and conflicting interests in two-sided matching markets[J]. European Economic Review, 1985, 27(1): 75 – 96.

[15] Sasaki H, Toda M. Two-sided matching problems with externalities[J]. Journal of Economic Theory, 1996, 70(1): 93 – 108.

[16] McVitie D G, Wilson L B. Stable marriage assignment for unequal sets[J]. Bit Numerical Mathematics, 1970, 10(3): 295 – 309.

[17] Teo C P, Sethuraman J, Tan W P. Gale-Shapley stable marriage problem revisited strategic issues and applications[J].

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Management Science, 2001, 47(9): 1252 – 1267.

[18] Korkmaz I, Gökçen H, Çetinyokuş T. An analytic hierarchy process and two-sided matching based decision support system for military personnel assignment [J]. Information Sciences, 2008, 178(14): 2915 – 2927.

[19] Vande Vate J H. Linear programming brings marital bliss [J]. Operations Research Letters, 1989, 8(3): 1 – 23.

[20] Manlove D F, Irving R W, Iwama K, et al. Hard variants of stable marriage [J]. Theoretical Computer Science, 2002, 276(1/2): 261 – 279.

[21] Halldórsson M M, Iwama K, Miyazaki S, et al. Randomized approximation of the stable marriage problem [J]. Theoretical Computer Science, 2004, 325(3): 439 – 465.

[22] Iwama K, Miyazaki S, Yamauchi N. A $(2 - c/\sqrt{N})$-approximation algorithm for the stable marriage problem [J]. Algorithmica, 2008, 51(3): 342 – 356.

[23] 乐　琦, 樊治平. 基于累积前景理论的双边匹配决策方法 [J]. 系统工程学报, 2013, 28(1): 38 – 46.
Yue Qi, Fan Zhiping. Decision method for two-sided matching based on cumulative prospect theory [J]. Journal of Systems Engineering, 2013, 28(1): 38 – 46. (in Chinese)

[24] 乐　琦. 基于累积前景理论的具有不确定偏好序信息的双边匹配决策方法 [J]. 系统科学与数学, 2013, 33(9): 1061 – 1070.
Yue Qi. Decision method for two-sided matching with uncertain preference ordinal information based on cumulative prospect theory [J]. Journal of System Science and Mathematical Sciences, 2013, 33(9): 1061 – 1070. (in Chinese)

[25] 乐　琦. 基于累积前景理论的具有不完全序值信息的双边匹配决策方法 [J]. 运筹与管理, 2013, 22(4): 26 – 32.
Yue Qi. Decision method for two-sided matching with incomplete ordinal number information based on cumulative prospect theory [J]. Operations Research and Management Science, 2013, 22(4): 26 – 32. (in Chinese)

[26] Gale D. The two-sided matching problem. Origin, development and current issues [J]. International Game Theory Review, 2001, 3(2/3): 237 – 252.

[27] 樊治平, 乐　琦. 基于完全序值信息的严格双边匹配决策方法 [J]. 管理科学学报, 2014, 17(1): 21 – 34.
Fan Zhiping, Yue Qi. A method for two-sided matching decision-making with ordinal numbers [J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(1): 21 – 34. (in Chinese)

[28] Cohon J L. Multiobjective Programming and Planning [M]. New York: Academic Press, 1978.

[29] Kuhn H W. The Hungarian method for the assignment problem [J]. Naval Research Logistic Quarterly, 1955, 2(1/2): 83 – 97.

Decision method for two-sided matching based on incomplete ordinal number information

YUE Qi[1,2], *FAN Zhi-ping*[1]

1. School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110819, China;
2. School of Information Management, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang 330013, China

Abstract: The two-sided matching problem has always been concerned by the scholars in the fields of economic management and so on. A novel decision method is proposed to solve the two-sided matching problem based on incomplete ordinal number information from the point of view of complete two-sided matching. In this paper, the two-sided matching problem is firstly described, and the concept of complete two-sided matching is introduced. Then, the existence of complete two-sided matching is investigated. Furthermore, the methods for two-sided matching in the condition that complete two-sided matching exists and doesn't exist are presented respectively. On this basis, the algorithm for solving the two-sided matching problem based on incomplete ordinal numbers is developed. The result of complete two-sided matching can be obtained by using the algorithm. The example analysis illustrates the feasibility and validity of the proposed method.

Key words: two-sided matching; incomplete ordinal number; complete two-sided matching; existence; optimization model

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net