第18卷第7期 管理科学学报 Vol. 18 No. 7
2015年7月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Jul. 2015

交叉销售产品的报童模型与博弈分析①

周佳琪，张人千*
（北京航空航天大学经济管理学院，北京 100191）

摘要： 当产品间存在互补关联关系时，会出现交叉销售：顾客在购买一种产品的同时也会以一定可能性购买另一种关联产品；反过来，某产品也会因其关联产品的缺货而失去交叉销售机会. 本文考虑交叉销售，首先建立带缺货惩罚的单周期多产品集中决策报童模型，推导其最优订货量的一阶必要条件，并给出最优解的上下界. 考虑多个报童独立竞争决策，建立交叉销售产品的报童博弈模型，证明该博弈是超模博弈，并给出了一阶博弈均衡条件以及均衡解的唯一性条件和上下界. 分析了集中决策和分散博弈决策的差异，给出了博弈模型中需求相关系数对期望利润的影响规律. 通过计算研究讨论了交叉销售系数、需求相关系数以及缺货惩罚成本对订货量和期望收益的影响.

关键词： 交叉销售；报童模型；报童博弈；纳什均衡

中图分类号： F224.3；F253.4 **文献标识码：** A **文章编号：** 1007－9807(2015)07－0059－11

0 引 言

单周期报童决策问题已经有了广泛研究，比如带约束的报童问题、考虑行为决策的报童问题、供应链报童模型、以及需求具有外部性的多产品报童问题等[1－6]. 需求具有外部性的多产品报童模型大多关注替代品的集中决策库存问题[7－10]，也有学者通过博弈理论分析了竞争决策下的替代品报童问题[11－13]. 所谓替代品，是指如果一种产品缺货，则顾客就可能选购另一种类似产品作为初始选择的替代. 因此，替代品的需求会彼此抵消，文献[12]称之为“负外部性”.

而当产品之间蕴含某种互补关联关系时，往往会发生交叉销售. 所谓交叉销售，是指顾客在购买一种商品的同时，可能会附加选购与其相关的另一种产品[14]；或者一些产品由于某种内在的联系而被同时购买[15,16]，这也称为互补需求，或“正外部性”需求[12]. 文献[17－19]指出，如果一个交叉销售组合中的某产品缺货，那么该销售组合模式会被破坏而导致交叉销售机会的丧失，因此与之相关联产品的需求就会降低.

交叉销售的研究和应用多出现在市场营销、数据挖掘等领域. 在企业运作管理领域的研究多集中在呼叫中心(call center)的交叉销售管理上[20－22]，而有关交叉销售产品库存决策问题的研究还不多见. Xiao 等在库存分类中考虑了交叉销售，提出了基于损失收益的库存分类方法[23]. Zhang 等通过 EOQ 模型研究了存在交叉销售关系的两产品，在无限计划期下的确定性需求联合补货问题[24]. Zhang 又进一步将其模型推广到考虑多产品交叉销售的库存联合补货问题[25]. 程岩研究了在已知关联规则和库存水平的情况下，如何动态选择交叉销售产品组合以及确定合理的价格，赢得最大收益[26]. 朱国玮和周利通过分析潜在消费者的个性化特征和需求，提出了主动向顾客推荐商品的混合推荐算法，帮助他们找到所需

① 收稿日期：2012－11－13；修订日期：2013－11－08.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(71271010).
作者简介：张人千(1974—)，男，陕西商州人，博士，教授，博士生导师. Email：zhangrenqian@buaa.edu.cn

产品，实现交叉销售[27].

虽然交叉销售可能存在于多产品之间，但 Netessine 指出，以两产品之间的关联关系进行交叉销售管理，符合很多企业的营销实践[28]. 另外，文献[29]研究了需求具有时间序列关联关系的按单生产(make-to-order)订单选择问题，其中假设若在某时刻满足某个订单的需求，则该订单会以一定的概率在未来引致新订单的到达，这是一种动态交叉销售效果.

值得注意的是，如果产品需求存在正相关或互补关系，那么在实践上就可将这类产品打包形成捆绑销售(bundling)，其促销的效果也属于一种交叉销售. 然而，捆绑销售是将多产品的组合当做一个整体，在实质上相当于一个新的产品，且产品组合与被捆绑的单产品之间一般是竞争替代关系[28,30]，并不是互补关联关系.

与本文主题较为密切的工作是文献[12]关于产品具有正外部性的库存博弈问题的研究. 文献[12]的模型隐含着一个很强的假设，即：需要知道每种产品在没有交叉销售时的独立的"原始"需求. 然而，在多产品销售的实践上，容易获得的信息往往是包含交叉销售在内的总需求而非独立"原始"需求. 因此，本文假设产品的总需求已知，而非"原始"需求已知，这与文献[12]完全不同.

另外，虽然缺货惩罚已经广泛引入到了库存问题当中，但是在产品需求具有外部性的库存决策中考虑缺货惩罚的研究还不是很多. 文献[13]的报童博弈模型考虑了缺货惩罚，但研究的是替代品问题. 文献[24]提出的交叉销售产品的联合补货问题考虑了所谓"goodwill loss"，可看做是一种缺货惩罚，但其模型是确定性的，并不涉及报童问题.

本文研究交叉销售产品的报童决策，针对考虑缺货惩罚的交叉销售产品集中决策报童模型，推导了其一阶最优性必要条件，并给出了最优解的上下界. 针对分散竞争决策，推导了报童博弈的纯策略纳什均衡条件，给出了纯策略均衡解存在的唯一性条件和均衡订货量的上下界. 研究了交叉销售产品报童博弈模型的超模性质，给出了集中决策订货量大于分散决策订货量的前提条件. 证明了在联合正态分布需求下，若交叉销售产品间的需求相关系数变大，那么它们的博弈均衡利润会得到提升. 最后，通过算例分析了各决策参数对决策结果的影响.

1 有效需求模型

设有 n 个产品，其中产品 i 和产品 $j(i,j = 1,\cdots,n)$ 因交叉销售而相互关联，它们的总需求分别为 D_i 和 D_j. 所谓总需求是指所有产品都不缺货时各产品的需求，因而包含了因交叉销售所引致的那部分需求. 如果产品 j 缺货，那么类似$\{i,j\}$组合的交叉销售模式将被破坏，从而导致产品 i 的实际需求相对于其总需求 D_i 有所减少. 设单位产品 j 缺货所导致的产品 i 的需求减少量为 r_{ji}，称为交叉销售系数. 定义 $x^+ = \max(x,0)$，那么产品 i 的有效需求为

$$D_i^e = D_i - \sum_{j \neq i} r_{ji}(D_j - Q_j)^+ \tag{1}$$

其中，交叉销售系数 r_{ji} 可通过基于损失规则"$i \to \Diamond j$"的数据挖掘技术获得[19,23]：客户因产品 j 缺货而不会去购买产品 i 的概率可以计算为：$conf(i \to \Diamond j) = N(\{i,j\})/N(j)$，其中 $N(x)$ 表示包含产品或产品集 x 的交易记录数. 交叉销售系数 r_{ji} 就等于 $conf(i \to \Diamond j)$ 和包含产品集$\{i,j\}$的交易记录中产品 i 的平均数量之乘积.

式(1)考虑的交叉销售关系是最简单的两产品间的交叉销售. 这类交叉销售在一些产品数量较少的环境中是广泛存在的，如自动售货机；或者，也可见于需求关系比较简单的电子产品市场，例如，'数码相机→备用电池'，'数码相机→存储棒"等交叉销售关系.

因为 D_i^e 是实际有效需求，因此其每个样本点都必然大于零，对应的必要条件之一就是当所有 $Q_{j\neq i} = 0$ 时，$E[D_i^e] > 0$ 成立，这等价于下述假设：

假设1 $\mu_i - \sum_{j \neq i} r_{ji}\mu_j > 0$，对所有 i 都成立，其中 μ_i 是产品 i 的期望需求.

令 p_i 表示产品价格，c_i 表示单位成本，s_i 表示单件产品残值，则下述假设 2 和假设 3 是合理的.

假设2 $p_i > c_i > s_i$，对所有 i 都成立.

假设3 $r_{ii} = 0$，对所有 i 都成立.

此外，在 $Pr(\cdot)$ 和 $f(\cdot)$ 分别表示概率累积函

数和概率密度函数.

2 集中决策报童模型

假设单件产品 i 的缺货会导致 β_i 的惩罚成本,则 n 个产品的总期望收益可以表示为

$$\pi^c = \mathrm{E}\sum_{i=1}^{n}[p_i\min(Q_i,D_i^e) - c_iQ_i + s_i(Q_i - D_i^e)^+ - \beta_i(D_i^e - Q_i)^+] \tag{2a}$$

注意到 $\min(Q_i,D_i^e) = Q_i - (Q_i - D_i^e)^+$,通过简单的代数运算,上式变换为

$$\pi^c = \mathrm{E}\sum_{i=1}^{n}[(u_i - \beta_i)D_i^e - u_i(D_i^e - Q_i)^+ - o_i(Q_i - D_i^e)^+] \tag{2b}$$

其中 $u_i = p_i - c_i + \beta_i$, $o_i = c_i - s_i$,分别表示产品的单位缺货成本和超储成本.

注记 1　上述利润函数不一定是凹函数.

注记 2　从实际经济意义的角度出发,需要 $u_i > \sum_{j\neq i}\beta_j r_{ij}$ 成立. 本文将 $\sum_{j\neq i}\beta_j r_{ij}$ 称为外溢因子.

上述不等式右边表示产品 i 缺货 1 个单位而造成的其他 $n-1$ 种产品缺货惩罚的减少,称为外溢效应. 如果这个外溢效应大于产品 i 自己的单位缺货成本,那么产品 i 就应该越缺货越好,但这并不符合产品的正常特征. 所以,在实际经济意义上,应该有 $u_i > \sum_{j\neq i}\beta_j r_{ij}$.

定理 1　交叉销售产品集中决策报童模型最优解的一阶必要条件为

$$Pr(D_i^e < Q_i^c) - \sum_{j\neq i}\frac{u_j + o_j}{u_i + o_i}r_{ij}\cdot Pr(D_j^e < Q_j^c, D_i > Q_j^c) + \sum_{j\neq i}\frac{\beta_j}{u_i + o_i}r_{ij}\cdot Pr(D_i > Q_i^c) = \frac{u_i}{u_i + o_i} \tag{3}$$

即

$$Pr(D_i < Q_i^c) + \frac{u_i + o_i}{u_i - \sum_{j\neq i}\beta_j r_{ij} + o_i}\times Pr(D_i^e < Q_i^c < D_i) - \sum_{j\neq i}\frac{u_j + o_j}{u_i - \sum_{j\neq i}\beta_j r_{ij} + o_i}r_{ij}\cdot Pr(D_j^e < Q_j^c, D_i > Q_i^c) = \frac{u_i - \sum_{j\neq i}\beta_j r_{ij}}{u_i - \sum_{j\neq i}\beta_j r_{ij} + O_i} \tag{4}$$

其中 $i = 1,\cdots,n$, Q_i^c 表示集中决策时,产品 i 的最优订货量.

证明　式(2b) 第一项的一阶导数为[11,13]: $\dfrac{\partial \mathrm{E}\sum_i D_i^e}{\partial Q_i} = \sum_{j\neq i} r_{ij}\cdot Pr(D_i > Q_i)$. 引入 D_i^e 的分布 $Pr(D_i^e)$,则第二项类似有 $\dfrac{\partial}{\partial Q_i}\sum_i E(D_i^e - Q_i)^+ = -Pr(D_i^e > Q_i) + \sum_{j\neq i} r_{ij}Pr(D_j^e > Q_j, D_i > Q_i)$. 同理,第三项有 $\dfrac{\partial}{\partial Q_i}\sum_i \mathrm{E}(Q_i - D_i^e)^+ = Pr(D_i^e < Q_i) - \sum_{j\neq i} r_{ij}Pr(D_j^e < Q_j, D_i > Q_i)$. 令 $\dfrac{\partial\pi^c}{\partial Q_i} = 0$,得最优解的一阶必要条件如式(3),将 $Pr(D_i^e < Q_i) = Pr(D_i < Q_i) + Pr(D_i^e < Q_i < D_i)$ 代入,即可得式(4).　证毕.

式(4) 第一项是单产品报童问题的解; 第二项表示其他产品缺货导致产品 i 的有效需求 D_i^e 减小而使 Q_i^c 变小; 第三项说明产品 i 缺货会导致其他产品的有效需求 D_j^e 减小而影响总收益,所以产品 i 有动机提高订货量. 进一步,若存在缺货惩罚,则产品 i 缺货而导致的外溢效应会放大其他产品缺货对产品 i 的影响,也同时放大了产品 i 缺货对其他产品的影响: 因为外溢因子 $\sum_{j\neq i}\beta_j r_{ij}$ 减小了式(4) 左边第二项、第三项的分母. 此外,这种外溢效应还减小了产品 i 在集中决策下的最优服务水平: 即外溢因子减小了式(4) 等号右边的值.

定理 2　集中决策下产品 i 的最优订货量的下界 $\underline{Q_i^c}$ 和上界 $\overline{Q_i^c}$ 分别由式(5) 和式(6) 给出

$$Pr(D_i - \sum_{j\neq i} r_{ji}D_j < \underline{Q_i^c}) = \frac{u_i - \sum_{j\neq i}\beta_j r_{ij}}{u_i + o_i},\quad i = 1,\cdots,n \tag{5}$$

$$Pr(D_i < \overline{Q_i^c}) = \left(\frac{u_i}{u_i + o_i} + \sum_{j\neq i}\frac{u_j + o_j - \beta_j}{u_i + o_i}r_{ij}\right)\Big/\left(1 + \sum_{j\neq i}\frac{u_j + o_j - \beta_j}{u_i + o_i}r_{ij}\right),\quad i = 1,\cdots,n \tag{6}$$

证明　对任一个具体的样本值 $D_i(\omega)$, $i = 1,\cdots,n$,有 $\sum_{j\neq i} r_{ji}D_j(\omega) \geq \sum_{j\neq i} r_{ji}(D_j(\omega) - Q_j)^+$,其

中 ω 表示一个随机路径. 因此 $D_i(\omega) - \sum_{j\neq i} r_{ji} D_j(\omega) \leqslant D_i(\omega) - \sum_{j\neq i} r_{ji}(D_j(\omega) - Q_j)^+$ 对所有样本点都成立，于是 $Pr(D_i - \sum_{j\neq i} r_{ji} D_j < Q_i^c) \geqslant Pr(D_i^e < Q_i^c)$. 进一步有

$$Pr(D_i - \sum_{j\neq i} r_{ji} D_j < Q_i^c) + \sum_{j\neq i} \frac{\beta_j}{u_i + o_i} r_{ij} Pr(D_i > Q_i^c) \geqslant Pr(D_i^e < Q_i^c) + \sum_{j\neq i} \frac{\beta_j}{u_i + o_i} r_{ij} Pr(D_i > Q_i^c).$$

再结合式(3)，有

$$\begin{aligned}
& Pr(D_i^e < Q_i^c) + \sum_{j\neq i} \frac{\beta_j}{u_i + o_i} r_{ij} Pr(D_i > Q_i^c) \geqslant \frac{u_i}{u_i + o_i} \\
& \Rightarrow Pr(D_i - \sum_{j\neq i} r_{ji} D_j < Q_i^c) + \sum_{j\neq i} \frac{\beta_j}{u_i + o_i} r_{ij} Pr(D_i > D_i^c) \geqslant \frac{u_i}{u_i + o_i} \\
& \Rightarrow Pr(D_i - \sum_{j\neq i} r_{ji} D_j < Q_i^c) - \sum_{j\neq i} \frac{\beta_j}{u_i + o_i} r_{ij} Pr(D_i < D_i^c) \geqslant \frac{u_i - \sum_{j\neq i} \beta_j r_{ij}}{u_i + o_i} \\
& \Rightarrow Pr(D_i - \sum_{j\neq i} r_{ji} D_j < Q_i^c) \geqslant \frac{u_i - \sum_{j\neq i} \beta_j r_{ij}}{u_i + o_i}
\end{aligned}$$

所以下界可由式(5) 给出.

又 $Pr(D_j^e < Q_j^c, D_i > Q_i^c) \leqslant Pr(D_i > Q_i^c)$ 以及 $D_i^e(\omega) < D_i(\omega) \Rightarrow Pr(D_i^e < Q_i^c) \geqslant Pr(D_i < Q_i^c)$，故可放松式(3)

$$\begin{aligned}
& Pr(D_i < Q_i^c) - \sum_{j\neq i} \frac{u_j + o_j}{u_i + o_i} r_{ij} Pr(D_i > Q_i^c) + \sum_{j\neq i} \frac{\beta_j}{u_i + o_i} r_{ij} Pr(D_i > Q_i^c) \leqslant \frac{u_i}{u_i + o_i} \\
& \Rightarrow Pr(D_i < Q_i^c) - \sum_{j\neq i} \frac{u_j + o_j - \beta_j}{u_i + o_i} r_{ij} \cdot Pr(D_i > Q_i^c) \leqslant \frac{u_i}{u_i + o_i} \\
& \Rightarrow Pr(D_i < Q_i^c) \leqslant \left(\frac{u_i}{u_i + o_i} + \sum_{j\neq i} \frac{u_j + o_j - \beta_j}{u_i + o_i} r_{ij}\right) \Big/ \left(1 + \sum_{j\neq i} \frac{u_j + o_j - \beta_j}{u_i + o_i} r_{ij}\right) < 1
\end{aligned}$$

于是上界可由式(6) 给出. 证毕.

3 竞争环境下的报童博弈

3.1 模型与均衡分析

假设所有报童各自独立决策订货量，但报童 i 的决策因交叉销售而受到其他 $n-1$ 个报童的影响，这样就形成了一个非合作博弈$(A_i, \pi_i^d, i = 1, \cdots, n)$ 问题，其中 $A_i \in [0, M]$ (M 是一个充分大的正数) 是每个参与者的可行策略空间，π_i^d 为参与者 i 的利润. 其他参与者的订货量简记为 Q_{-i}，则产品 i 的有效需求为 $D_i(Q_{-i})$. 参与者 i 的期望收益可以表示为

$$\pi_i^d(Q_i, Q_{-i}) = \mathrm{E}[p_i \min(Q_i, D_i^e) - c_i Q_i + s_i(Q_i - D_i^e)^+ - \beta_i(D_i^e - Q_i)^+]$$

并可改写为

$$\pi_i^d(Q_i, Q_{-i}) = \mathrm{E}[(u_i - \beta_i) D_i^e - u_i(D_i^e - Q_i)^+ - o_i(Q_i - D_i^e)^+]$$

对于分散决策报童模型，当其他产品的订货量已知为 Q_{-i} 时，产品 i 的最优反应函数为 $Q_i^d = \arg\max \pi_i(Q_i, Q_{-i}^d)$，以下简记为 $Q_i^d \equiv Br(Q_{-i})$. 易知 $\frac{\partial^2 \pi_i^d}{\partial Q_i^2} = -(u_i + o_i) \cdot fD_i^e(Q_i) < 0$，因此 $\pi_i^d(Q_i, Q_{-i})$ 是关于 Q_i 的凹函数，于是有定理 3.

定理 3 就交叉销售产品的报童博弈问题而言，下述命题成立:

(1) 该博弈是超模博弈;

(2) 该博弈的纯策略纳什均衡由以下一阶条件给出

$$Pr(D_i^e < Q_i^d) = Pr(D_i < Q_i^d) + Pr(D_i^e < Q_i^d < D_i) = \frac{u_i}{u_i + o_i}, \ i = 1, \cdots, n \quad (7)$$

证明　1) 首先,$A_i(i=1,\cdots,n)$ 的可行策略空间构成一个格 $S=\{x \mid x\in R^n, x\geqslant 0\}$ [12],且 S 是 R^n 的次格(Sublattice) [31]. 由于 $A_i\in[0,M]$ 是一个连续实区间,且 D_i^e 是连续的,因此 π_i^d 连续;又已知 π_i^d 在给定 Q_{-i} 下是关于 Q_i 的一元函数,所以 π_i^d 是关于 Q_i 的超模函数.

接着证明 π_i^d 对 Q_{-i} 的增差异性,即 $\partial^2\pi_i^d/(\partial Q_i\partial Q_j)>0$. 因为样本点 $D_i^e(\omega)$ 关于 Q_j 是递增的,这表明 $Pr(D_i^e<Q_i)$ 关于 Q_j 递减,所以 $\partial Pr(D_i^e<Q_i)/\partial Q_j<0$. 易知,$\partial\pi_i^d/\partial Q_i=u_i-(u_i+o_i)Pr(D_i^e<Q_i)$. 于是得证 $\partial^2\pi_i^d/(\partial Q_i\partial Q_j)>0$,即 π_i^d 关于 Q_{-i} 具有增差异性. 根据文献[31]关于超模博弈的定义可知,该博弈是超模的.

2) 令 $\partial\pi_i^d/\partial Q_i=0$,得到纯策略纳什均衡的一阶条件: $Pr(D_i^e<Q_i^d)=\dfrac{u_i}{u_i+o_i}$,可进一步写为 $Pr(D_i<Q_i^d)+Pr(D_i^e<Q_i^d<D_i)=\dfrac{u_i}{u_i+o_i}$,即式(7).　　证毕.

相比集中决策库存模型,竞争情形下的均衡条件式(7)缺少了式(4)中的第三项. 在竞争情形下,各产品只考虑自身收益最大化,因而均衡订货量偏离了集中决策的最优订货量.

将式(7)改写为 $Pr(D_i^e<Q_i^d)=\dfrac{p_i-c_i+\beta_i}{p_i-s_i+\beta_i}=1-\dfrac{c_i-s_i}{p_i-s_i+\beta_i}$. 可以看到,当缺货惩罚 β_i 增大时,等式右边增大,因而 Q_i^d 有增大的倾向. 但另一方面,Q_i^d 增大导致 Q_j^e 增大,因而使得 Q_j^d 变大,通过相同的传递方式导致 D_i^e 变大从而使得 Q_i^d 更大. 所以,随着缺货惩罚增大,分散竞争决策的均衡订货量是增大的. 定理 4 进一步给出了均衡解的唯一性条件.

定理 4　如果交叉销售系数满足: $\sum_j r_{ji}<1$ 对任意 i 都成立,或 $\sum_i r_{ji}<1$ 对任意 j 都成立,则报童博弈存在唯一的纯策略纳什均衡.

证明　报童 i 的博弈均衡订货量 $Q_i^d=Br(Q_{-i})$,$i=1,\cdots,n$,是一个 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 映射. 若需证明 Q_i^d,$i=1,\cdots,n$ 具有唯一均衡解,就需要证明这个映射是可缩映射. 而当映射的 Jacobian 矩阵是收敛的,也即其谱半径不超过 1 时,该映射是可缩映射. 运用隐函数求导,式(7)的均衡条件对应的最优反应函数构成 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 映射,其 Jacobian 矩阵 $J_{n\times n}$ 元素为 [11]

$$J_{ij}=-\left(\frac{\partial^2\pi_i^d}{\partial Q_i\partial Q_j}\Big/\frac{\partial^2\pi_i^d}{\partial^2 Q_i}\right)=-\frac{r_{ji}f_{D_i^e|D_j>Q_j}(Q_i)Pr(D_j>Q_j)}{f_{D_i^e}(Q_i)},$$

同时令 $J_{ii}=0$

由矩阵理论,矩阵 J 的谱半径满足: $\rho(J)\leqslant\|J\|_1=\max_j\sum_i|J_{ij}|\leqslant\max_j\sum_i r_{ji}$,并且 $\rho(J)\leqslant\|J\|_1=\max_i\sum_j|J_{ij}|\leqslant\max_i\sum_j r_{ji}$. 因此当 $\sum_j r_{ji}<1$ 对任意 i 都成立,或 $\sum_i r_{ji}<1$ 对任意 j 都成立时,Jacobian 矩阵 J 的谱半径小于 1,从而矩阵是收敛的. 此时映射 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是可缩映射,因而博弈存在唯一的纳什均衡.　　证毕.

定理 5　产品 i 的博弈均衡订货量的下界 $\underline{Q_i^d}$ 和上界 $\overline{Q_i^d}$ 分别由以下两式给出

$$Pr\left(D_i-\sum_{j\neq i}r_{ji}D_j<\underline{Q_i^d}\right)=\frac{u_i}{u_i+o_i},\quad i=1,\cdots,n \tag{8}$$

$$Pr(D_i<\overline{Q_i^d})=\frac{u_i}{u_i+o_i},\ i=1,\cdots,n \tag{9}$$

证明　由 $Pr(D_i-\sum_{j\neq i}r_{ji}D_j<Q_i^d)\geqslant Pr(D_i^e<Q_i^d)$ 和式(7)得 $Pr(D_i-\sum_{j\neq i}r_{ji}D_j<Q_i^d)\geqslant\dfrac{u_i}{u_i+o_i}$; 另外,$Pr(D_i<Q_i^d)\leqslant Pr(D_i^e<Q_i^d)=\dfrac{u_i}{u_i+o_i}$,因此式(8)、(9)成立.　　证毕.

关于随机需求的相关系数 ρ_{ij} 和期望收益 π_i^d 间的关系,由下述定理 6 给出.

定理 6　设需求服从联合正态分布,且所有产品的订货量给定. 那么,若产品 i 和 j 的需求相关系数 ρ_{ij} 增大,则这两个产品的期望均衡收益变大,而其他产品的期望均衡收益变小. 即: 当 ρ_{ij}^1 变大为 ρ_{ij}^2 时,有 $\pi_k^d(\rho_{ij}^1)\leqslant\pi_k^d(\rho_{ij}^2)$ for $k=i,j$,以及 $\pi_k^d(\rho_{ij}^1)\geqslant\pi_k^d(\rho_{ij}^2)$ for $k\neq i,j$.

证明 首先证明产品 i 的期望收益 π_i^d 关于 $\{D_i, D_j\}$（给定其他产品需求为 $D_{-i,-j}$）是超模的. 求 π_i^d 关于 $\{D_i, D_j\}$ 的联合偏导 $\frac{\partial^2 \pi_i^d}{\partial D_i \partial D_j} = \frac{\partial}{\partial D_j}[-\beta_i + (u_i + o_i) Pr(D_i^e < Q_i)] = (u_i + o_i) \times \frac{\partial Pr(D_i^e < Q_i)}{\partial D_j}$. 当 D_j 变大时，D_i^e 变小（注意，订货量是给定的），则 $Pr(D_i^e < Q_i)$ 变大，说明 $\frac{\partial Pr(D_i^e < Q_i)}{\partial D_j} > 0$，即 $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial D_i \partial D_j} > 0$. 所以 π_i^d 关于 $\{D_i, D_j\}$ 是超模的. 同理，产品 j 的期望收益 π_i^d 关于 $\{D_i, D_j\}$ 也是超模的.

再证明 π_k^d 关于 D_{-k} 是次模的. 取利润函数 π_k^d 关于产品 $p(\neq k)$，$q(\neq k)$，的需求 $\{D_p, D_q\}$ 的偏导

$$\frac{\partial^2 \pi_k^d}{\partial D_p \partial D_q} = \frac{\partial}{\partial D_q}[\beta_k r_{pk} Pr(D_p > Q_p) - (u_k + o_k) r_{pk} \cdot Pr(D_k^e < Q_k, D_p > Q_p)] = -(u_k + o_k) r_{pk} \cdot \frac{\partial Pr(D_k^e < Q_k, D_p > Q_p)}{\partial D_p} \leqslant 0$$

根据文献[32]，对于服从联合正态分布的 n 维随机向量 $\underline{D}^1$ 和 $\underline{D}^2$（注，上标“2”不表示平方），当相关系数矩阵满足 $\sum^1 \leqslant \sum^2$，则对于任何的超模函数 $f(\cdot)$ 都有 $Ef(\underline{D}^1) \leqslant Ef(\underline{D}^2)$. 因此，当 ρ_{ij}^1 变大为 ρ_{ij}^2 时，由于 π_i^d 和 π_j^d 是超模的，所以有 $\pi_k^d(\rho_{ij}^1) \leqslant \pi_k^d(\rho_{ij}^2)$ for $k = i, j$; 而 π_k^d 关于 D_{-k} 是次模的，因此 $-\pi_k^d$ 关于 D_{-k} 是超模的，所以有 $-\pi_k^d(\rho_{ij}^1) \leqslant -\pi_k^d(\rho_{ij}^2)$，即 $\pi_k^d(\rho_{ij}^1) \geqslant \pi_k^d(\rho_{ij}^2)$ for $k \neq i, j$. 定理得证. 证毕.

3.2 与集中决策报童模型的比较

在替代品报童模型中，分散决策的订货量必然大于集中决策的订货量. 但在交叉销售环境下，结论相反，见下述定理 7.

定理 7 设集中决策下有唯一最优订货量 Q_i^c，分散决策下均衡订货量为 Q_i^d. 若对所有 Q_i^c，有 $Pr(D_i^e(Q_{-i}) < Q_i^c) \geqslant \beta_i/(u_i + o_i)$ 成立，那么对所有产品来说，其各自的集中决策订货量大于分散决策订货量，即 $Q_i^c \geqslant Q_i^d$，$i = 1, \cdots, n$.

证明 用反证法. 记博弈决策下最大均衡解为 Q_i^d. 若 $Q_i^c \geqslant Q_i^d$ 并不是对所有的 i 都成立，那么可将产品集 $N = \{1, \cdots, n\}$ 分为两部分，即集合 $A: \{i \mid Q_i^c < Q_i^d\}$ 和集合 $B: \{i \mid Q_i^c \geqslant Q_i^d\}$. 下面首先证明满足定理 7 的条件时，$B \neq \phi$，然后证明 $A = \phi$. 为方便，$D_i^e(Q_{-i}^d)$ 和 $D_i^e(Q_{-i}^c)$ 分别简记为 D_i^{ed} 和 D_i^{ec}.

1）假设 $B = \phi$，也即 $A = N$，那么对所有 i 都有 $Q_i^c < Q_i^d$. 产品 i 的期望收益可表示为

$$\pi_i(Q_i, Q_{-i}) = E[(u_i - \beta_i) D_i^e(Q_{-i}) - u_i(D_i^e(Q_{-i}) - Q_i)^+ - o_i(Q_i - D_i^e(Q_{-i}))^+].$$

由于 π_i 关于 D_i^e 连续，而 $\partial \pi_i / \partial D_i^e = -\beta_i + (u_i + o_i) \cdot Pr(D_i^e < Q_i)$. 因此当给定 Q_i 时，若 $Pr(D_i^e(Q_{-i}) < Q_i) \geqslant \beta_i/(u_i + o_i)$ 成立，那么 $\partial \pi_i / \partial D_i^e \geqslant 0$，于是 π_i 关于 D_i^e 递增.

由假设可知 $Q_{-i}^c < Q_{-i}^d$，所以对随机需求的每个样本路径 ω，$D_i^{ec}(\omega)$ 都小于 $D_i^{ed}(\omega)$. 又因为在分散决策下，产品 i 的期望收益为 $\pi_i(Q_i^d, Q_{-i}^d) = \max Q_i \pi_i(Q_i, Q_{-i}^d)$. 所以对给定区间内的 Q_i 都有 $\pi_i(Q_i, Q_{-i}^c) < \pi_i(Q_i, Q_{-i}^d) \leqslant \pi_i(Q_i^d, Q_{-i}^d)$. 因此当 Q_i^c 满足 $Pr(D_i^e(Q_{-i}) < Q_i^c) \geqslant \beta_i/(u_i + o_i)$，有 $\pi_i(Q_i^c, Q_{-i}^c) < \pi_i(Q_i^c, Q_{-i}^d) < \pi_i(Q_i^d, Q_{-i}^d)$.

如果对所有 i，上述条件都满足，那么有 $\pi(Q^c) < \sum_i \pi_i(Q^d)$. 这说明竞争环境下的总期望收益大于集中决策下的最优总期望收益，这就出现了矛盾. 因此，$B \neq \phi$.

2）假设 $A \neq \phi$. 构造一个新的博弈：集合 B 中的产品固定地选择订货量 $\widetilde{Q_B^d} = Q_B^c$，同时集合 A 中的产品各自选择最优订货量 $\widetilde{Q_A^d}$. 这相当于只是关于集合 A 中产品的一个新的博弈，且仍然是超模的. 集合 A 中产品 i 的期望收益可表示为 $\widetilde{\pi}_i(Q_i, Q_{A\backslash\{i\}})$. 那么在给定 $Q_{A\backslash\{i\}}$ 的情况下，$\widetilde{\pi}_i(Q_i, Q_{A\backslash\{i\}})$ 对任何 Q_i 和 $\widetilde{Q}_B^d$ 都是差异递增的. 因此，博弈的最优解 $\widetilde{Q}_A^d$ 和 $\widetilde{Q}_B^d$ 也具有差异递增性质. 根据文献[31]的定理 4.2.2，该博弈最优解的上界 $\overline{Q_A^d}$ 关于 $\widetilde{Q_B^d}$ 递增. 又因为 $\widetilde{Q_B^d} = Q_B^c > Q_B^d$，所以 $\overline{Q_A^d} > Q_A^d > Q_A^c$.

进一步，若 $i \in A$，则 $\pi_i^c(Q_A^c, Q_B^c) = \pi_i^c(Q_i^c, Q_{A\backslash\{i\}}^c, Q_B^c)$，其中 $Q_{-i}^c = (Q_{A\backslash\{i\}}^c, Q_B^c)$. 为方便，将 $\pi_i^c(Q_A^c, Q_B^c)$ 简记为 π_i^c；同样，记 $\pi_i^d = \pi_i^d(\overline{Q_A^d}, \overline{Q_B^d}) =$

$\pi_i^d(\overline{Q_i^d},\overline{Q_{A\setminus\{i\}}^d},Q_B^c)$，其中$\overline{Q_{-i}^d}=(\overline{Q_{A\setminus\{i\}}^d},Q_B^c)$. 因为$\overline{Q_{-i}^d}>Q_{-i}^c$,，所以当 Q_i^c 满足 $Pr(D_i^e(Q_{-i})<Q_i^c)\geqslant\beta_i/(u_i+o_i)$ 时，有 $\pi_i^c(Q_i^c,Q_{-i}^c)<\pi_i^d(Q_i^c,Q_{-i}^d)<\pi_i^d(\overline{Q_i^d},\overline{Q_{-i}^d})$，因此，$\sum_{i\in A}\pi_i^d>\sum_{i\in A}\pi_i^c$.

同理可得，$i\in B$ 时，有 $\pi_i^d\geqslant\pi_i^c$，于是，$\sum_{i\in B}\pi_i^d>\sum_{i\in B}\pi_i^c$. 所以，$\pi^c(Q^c)<\sum_i\pi_i^d(\overline{Q^c})$，与 Q^c 是集中决策下的最优订货量矛盾，因此只能有 $A=\phi$，即意味着 $B=N$. 定理得证.　　证毕.

可以看出，若缺货惩罚 β_i 足够小，则定理 7 更容易成立，即集中决策订货量总是大于竞争决策订货量. 这是因为在很小的缺货惩罚下，任何产品销量增加导致的销售毛利的增量会大于其缺货惩罚的增量，所以此时通过集中决策提高所有产品的订货量对总体将是有利的.

4　模型求解

4.1　有效需求近似

基于一阶条件求解订货量需要计算有效需求的概率值 $Pr(D_i^e<Q_i)$ 和 $Pr(D_j^e<Q_j,D_i>Q_i)$，其中的多重积分将引起计算上的困难. 考虑用有效需求 D_i^e 的近似估计，以避免多重积分[13]. 为此，令 $\gamma_i(Q_i)=\mathrm{E}[\min(D_i,Q_i)]/E[D_i]$ 代表产品 i 的期望服务水平. 对于正态分布，有

$$\begin{aligned}\gamma_i(Q_i)&=\mathrm{E}[D_i-(D_i-Q_i)^+]/E[D_i]\\&=(\mu_iPr(D_i<Q_i)+Q_iPr(D_i\geqslant Q_i)-\\&\quad\sigma_i^2f_{D_i}(Q_i))/\mu_i\end{aligned}\tag{10}$$

产品 i 的有效需求 D_i^e 可由新的随机变量 $\hat{D}_i^e$ 来估计

$$D_i^e\approx\hat{D}_i^e=D_i-\sum_{j\neq i}r_{ji}D_j\{1-\gamma_j(Q_j)\}\tag{11}$$

易知 $\hat{D}_i^e$ 是 D_i^e 的无偏估计并且也服从正态分布. 其期望和方差可分别由下面两式计算

$$\hat{\mu}_i^e=\mu_i-\sum_{j\neq i}r_{ji}\mu_j\{1-\gamma_j)\tag{12}$$

$$\begin{aligned}(\hat{\sigma}_i^e)^2&=\sigma_i^2+\sum_{j\neq i}[r_{ji}\sigma_j(1-\gamma_j)]^2-\\&\quad2\sum_{j\neq i}\rho_{ji}r_{ji}\sigma_i\sigma_j(1-\gamma_j)+2\rho_{jk}r_{jk}\sigma_j\sigma_k\times\\&\quad(1-\gamma_j)(1-\gamma_k)\end{aligned}\tag{13}$$

其中 ρ_{ji} 表示产品 j 和产品 i 的需求相关系数.

4.2　求解算法

1) 集中决策模型的逐点搜索算法

集中决策报童模型的目标函数并不一定是凹的，为了得到全局最优解，本文在定理 2 给出的最优订货量的上下界之间，采用逐点搜索的方法求解. 所设定的搜索精度为 1，每一订货量$\{Q_i\}_{1,\cdots,n}$下，产品有效需求的期望和方差由式(12)、(13)确定，从而可计算并确定最优的总期望收益.

2) 博弈模型的迭代求解算法

分散决策的库存博弈问题可采取迭代算法来获得均衡订货量[13,31]. 给定每个产品的初始订货量 $Q_i^0=F_{D_i}^{-1}[u_i/(u_i+o_i)]$. 在其他产品订货量已知时，产品的有效需求可由式(12)、(13)确定，然后由式(7)计算博弈订货量 $Q_i^k=F_{\hat{D}_i^e}^{-1}[u_i/(u_i+o_i)]$. 在新的订货量下，重复上述过程，直到一阶均衡条件的误差足够小(本文设定容许误差为 0.1)，对应的博弈订货量就作为近似均衡订货量.

5　计算研究

5.1　算例概况

本文的算例中，假设各产品的随机需求服从联合正态分布，考察下述参数对决策结果的影响: 交叉销售系数、需求相关系数和缺货惩罚成本. 所设计的算例包括两产品和三产品的情况，其中参数取值包括对称(所有产品的对应参数都相同)和非对称(各产品参数不同)两种情形. 另外，在所有算例中，令 $\sum_j r_{ji}<1$ 和 $\sum_i r_{ji}<1$，从而保证分散竞争决策下各产品有唯一的博弈均衡订货量.

5.2　计算结果

1) 交叉销售的影响

图 1 上半部分展示了一组两产品问题的订货量比较，算例参数分别为$\{\mu_1,\sigma_1,u_1,o_1,\beta_1\}=\{100,50,250,150,30\}$ 和 $\{\mu_2,\sigma_2,u_2,o_2,\beta_2\}=\{100,20,50,40,20\}$，其中交叉销售系数 $r_{21}=0.1$，r_{12} 以 0.1 的步长从 0 变化到 1. 图 1 的下半部分，$r_{12}=0.3$，r_{21} 以 0.1 的步长从 0 变化到 1.

当 $r_{ij}=0$ 时，两模型的订货量是一致的. 但随

着 r_{ij} 增大，可以看到 Q_1^d 和 Q_2^d 总是关于 r_{12} 或者 r_{21} 递减的. 但是 Q_1^c 关于 r_{12} 或者 r_{21} 递增，而 Q_2^c 关于 r_{21} 递增，关于 r_{12} 递减. 各算例的共同规律为:

现象 1 集中决策最优订货量 Q_i^c 关于 r_{ij} 递增，但对 r_{ji} 并不一定具有递增关系; 而竞争决策的均衡订货量 Q_i^d 总是关于 r_{ij} 或 r_{ji} 递增.

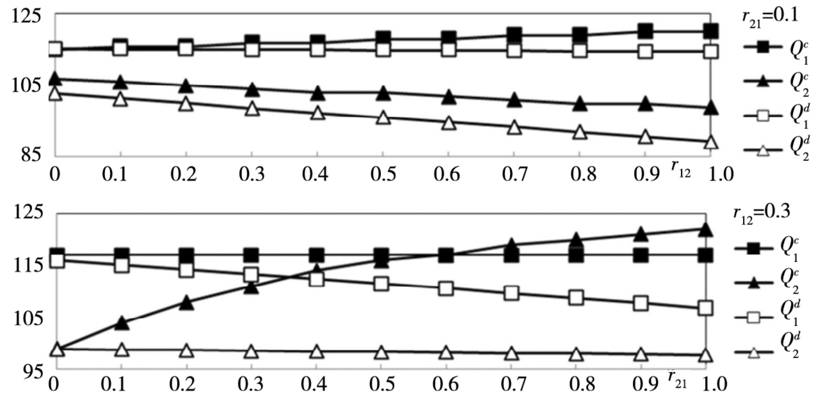

图 1 订货量 vs. 交叉销售系数

Fig. 1 Order quantities vs. cross-selling coeffients

图 2 给出了图 1 中各算例的期望收益. 该图说明，每个产品不管是集中决策下的最优期望收益还是分散决策下的均衡期望收益，关于交叉销售系数是递减的.

现象 2 在集中决策和分散决策的报童问题中，交叉销售关系会降低期望收益.

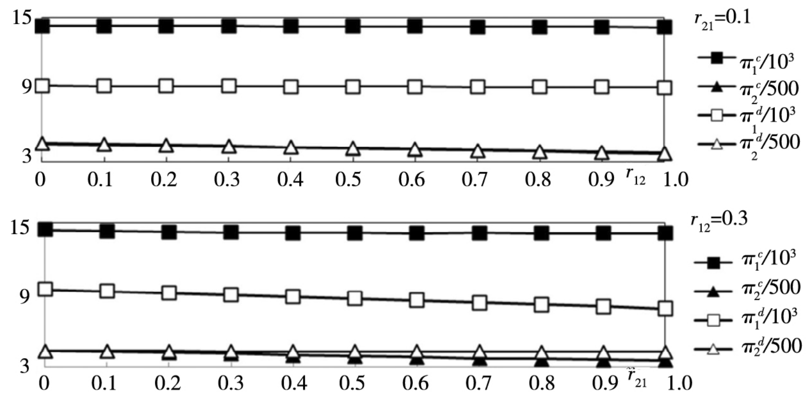

图 2 期望收益 vs. 交叉销售系数

Fig. 2 Expected profits vs. cross-selling coefficients

上述现象符合式(12) 的理论推断: 交叉销售系数越大，有效需求的不确定性(方差) 越大，即在需求期望值一定的情况下，需求不确定性变大，因此会导致利润降低.

2) 需求相关性

图 3 以一个对称三产品问题给出了订货量和期望收益与需求相关系数的关系，其中 $\{\mu_i, \sigma_i, u_i, o_i, \beta_i\} = \{200, 100, 300, 50, 30\}$，$r_{ij} = r = 0.2, 0.5, 0.8$. 这里变动产品 1 和产品 2 的需求相关系数 ρ_{12}，观察各产品订货量、期望收益的变化.

产品 1 和产品 2 的需求相关性变大使他们的订货量降低而期望收益变大，但是产品 3 的期望收益却变小了. 这验证了定理 6 的结论，归纳为现象 3.

现象 3 需求相关系数增大将使所有产品的订货量减小; 而对于分散决策问题，某两个产品需求相关系数增大，则这两个产品的期望收益变大，但其他产品(当 $n > 2$ 时) 的期望收益将减小.

3) 缺货惩罚

图 4 给出了在不同缺货惩罚成本下，订货量和期望收益与交叉销售系数之间的关系. 其中 $\{\mu_i, \sigma_i, p_i, c_i, s_i\} = \{200, 200, 400, 130, 80\}$，$\beta_i = \beta = 30, 60, 120$，$r_{ij} = r$ 以 0.1 的步长从 0 变化到 1. 图 4 的观察结果归纳为现象 4.

现象 4　如果缺货惩罚成本变大，那么集中决策和分散决策的报童都通过增加订货量以降低缺货成本，但集中决策通过共担风险总能获得比分散决策更大的收益.

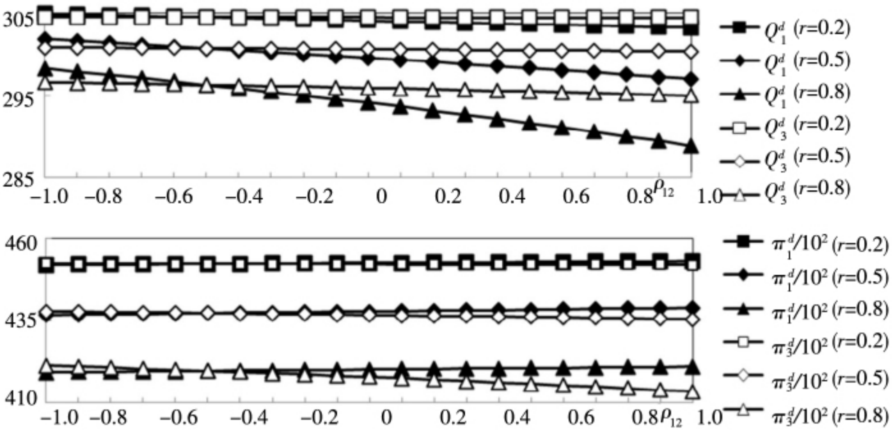

图 3　对称三产品的订货量和期望收益 vs. 需求相关系数

Fig. 3　Order quantities and expected profits vs. demand correlation coefficients of triple symmetry products

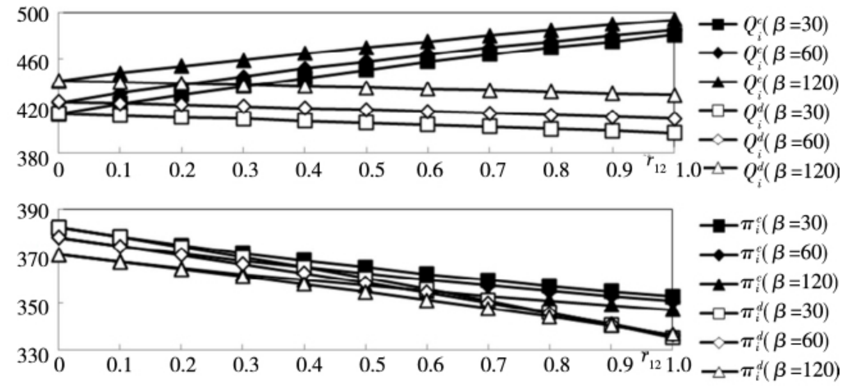

图 4　不同缺货惩罚下订货量和期望收益 vs. 交叉销售系数

Fig. 4　Order quantities and expected profits vs. cross-selling coefficients unuder different shortage penalities

6　结束语

本文考虑缺货惩罚，研究了交叉销售产品报童问题的集中决策和分散博弈决策模型，推导了集中决策最优解的一阶必要条件以及竞争决策下的纯策略纳什均衡条件，并给出了解的上下界，讨论了两种模型的解的关系. 通过算例研究印证了所得到的理论结果，并进一步给出了交叉销售、需求相关性和缺货惩罚对交叉销售产品报童模型集中决策和分散竞争决策的影响.

后续研究工作可以考虑如下几点: (1) 在市场营销和经济学上，假设产品需求是价格的函数符合实际情况. 已经有学者研究了需求受价格影响的替代品报童博弈问题[33]，但在交叉销售环境下，价格依赖型需求的报童决策问题还需要做更进一步的研究. (2) 交叉销售产品的集中决策总利润优于分散竞争决策的总利润，那么促成不同产品之间的合作销售，在实践上有重要意义. 但若交叉销售的产品由不同主体经营，则各经营主体将必然关心合作销售的超额利润如何分配，这就形成了一个值得研究的合作博弈问题. (3) 文献[34] 研究了正态分布情况下不考虑缺货惩罚时交叉销售产品集中决策报童模型的求解算法. 但是对本文提出的考虑缺货惩罚、以及任意随机需求分布下决策模型的求解算法问题，还需要给予进一步的关注.

最后，本文所建立的模型，适用于产品之间存在静态两两交叉销售关系时的决策. 对于更一般的交叉销售，如产品集之间存在交叉销售关系，以及跨时间段的动态交叉销售效果，本文的研究还没有涉及，这或可成为以后的研究方向之一.

参 考 文 献:

[1] Khouja M. The single-period (news-vendor) problem: Literature review and suggestions for future research [J]. Omega, 1999, 27(5) : 537 – 553.

[2] 鲁其辉，朱道立. 多产品竞争环境中最优供货决策 [J]. 管理科学学报，2005，8(6) : 43 – 50.
Lu Qihui, Zhu Daoli. Optimal ordering decision in multi-products competition environment [J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(6) : 43 – 50. (in Chinese)

[3] 周艳菊，邱菀华，王宗润. 损失约束下多产品报童问题的求解方法研究 [J]. 控制与决策，2007，22(9) : 1005 – 1010.
Zhou Yanju, Qiu Wanhua, Wang Zongrui. Solving approach to multi-product newsvendor model with loss constraint [J]. Control and Decision, 2007, 22(9) : 1005 – 1010. (in Chinese)

[4] 周艳菊，邱菀华，王宗润. 不同约束下多产品报童问题解的比较研究 [J]. 系统工程与电子技术，2008，30(1) : 97 – 103.
Zhou Yanju, Qiu Wanhua, Wang Zongrui. Comparative analysis of the solutions for multi-product newsvendor problem with different constraints [J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(1) : 97 – 103. (in Chinese)

[5] 崔 崟，陈 剑，肖勇波. 行为库存管理研究综述及其前景展望 [J]. 管理科学学报，2011，14(6) : 96 – 108.
Cui Yin, Chen Jian, Xiao Yongbo. Behavioral inventory management: Research overview and prospects [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(6) : 96 – 108. (in Chinese)

[6] 黄 松，杨 超，张 曦. 考虑战略顾客行为时的供应链性能分析与协调 [J]. 管理科学学报，2012，15(2) : 47 – 58.
Huang Song, Yang Chao, Zhang Xi. Supply chain performance analysis and coordination with consideration of strategic customer behavior [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(2) : 47 – 58. (in Chinese)

[7] 秦军昌，王 渊，王刊良. 基于随机替代关系的单周期可替代品库存模型 [J]. 工业工程与管理，2010，15(1) : 17 – 20.
Qin Junchang, Wang Yuan, Wang Kanliang. A study on single-period inventory model for substitutable items with stochastic substituting relation [J]. Industrial Engineering and Management, 2010, 15(1) : 17 – 20. (in Chinese)

[8] Dutta P, Chakraborty D. Incorporation one-way substitution policy into newsboy problem with imprecise customer demand [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 200(1) : 99 – 110.

[9] Parlar M, Goyal S K. Optimal ordering decisions for two substitutable products with stochastic demands [J]. OPSEARCH, 1984, 21(1) : 1 – 15.

[10] Bassok Y, Anupindi R, Akella R. Single-period multiproduct inventory models with substitution [J]. Operations Research, 1999, 47(4) : 632 – 642.

[11] Netessine S, Rudi N. Centralized and competitive inventory models with demand substitution [J]. Operations Research, 2003, 51(2) : 329 – 335.

[12] Netessine S, Zhang F. Positive vs. negative externalities in inventory management: Implications for supply chain design [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2005, 7(1) : 58 – 73.

[13] Huang D, Zhou H, Zhao Q H. A competitive multi-product newsboy problem with partial product substitution [J]. Omega, 2011, 39(3) : 302 – 312.

[14] Shen Z J M, Su X M. Customer behavior modeling in revenue management and auctions: A review and new research opportunities [J]. Production and Operations Management, 2007, 16(6) : 713 – 728.

[15] Agrawal R, Imilienski T, Swami A. Mining association rules between sets of items in large database [C]. Proceedings of SIGMOD, New York City, Association for Computing Machinery (ACM) , 1993: 207 – 216.

[16] Anand S S, Hughes J G, Bell D A, et al. Tackling the cross-sales problem using data mining [C]. Proceedings of PAKDD 97, Singapore, World Scientific Publishing Co. , 1997: 331 – 343.

[17] Brijs T, Swinnen G, Vanhoof K, et al. Using association rules for product assortment decisions: A case study [C]. Proceedings of KDD, New York City, Association for Computing Machinery (ACM) , 1999: 254 – 260.

[18] Wang K, Su M T. Item selection by "Hub-Authority" profit ranking [C]. Proceedings of SIGKDD02, New York City, Association for Computing Machinery (ACM) , 2002: 652 – 657.

[19] Wong R C, Fu A W, Wang K. Data mining for inventory item selection with cross-selling consideration [J]. Data Mining and Knowledge Discovery, 2005, 11(1) : 81 – 112.

[20] Byers R E, So K C. A mathematical model for evaluating cross sales policies in telephone service centers [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2007, 9(1) : 1 – 8.

[21] Aksin O Z, Armony M, Mehrotra V. The modern call center: A multi-disciplinary perspective on operations management research [J]. Production and Operations Management, 2007, 16(6): 665 - 688.

[22] Gurvich I, Armony M, Maglaras C. Cross-selling in a call center with a heterogeneous customer population [J]. Operations Research, 2009, 57(2): 299 - 313.

[23] Xiao Y Y, Zhang R Q, Kaku I. A new approach of inventory classification based on loss profit [J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(8): 9382 - 9391.

[24] Zhang R Q, Kaku I, Xiao Y Y. Deterministic EOQ with partial backordering and correlated demand caused by cross-selling [J]. European Journal of Operational Research, 2011, 210(3): 537 - 551.

[25] Zhang R Q. An extension of partial backordering EOQ with correlated demand caused by cross-selling considering multiple minor items [J]. European Journal of Operational Research, 2012, 220(3): 876 - 881.

[26] 程 岩. 电子商务中基于 Q 学习的动态交叉销售方法 [J]. 管理科学学报, 2008, 11(3): 106 - 113.
Cheng Yan. Q-learning-based dynamic cross-selling approach in e-commerce [J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(3): 106 - 113. (in Chinese)

[27] 朱国玮, 周 利. 基于遗忘函数和邻域最近邻的混合推荐研究 [J]. 管理科学学报, 2012, 15(5): 55 - 64.
Zhu Guowei, Zhou Li. Hybrid recommendation based on forgetting curve and domain nearest neighbor [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(5): 55 - 64. (in Chinese)

[28] Netessine S, Savin S, Xiao W Q. Revenue management through dynamic cross-selling in e-commerce retailing [J]. Operations Research, 2006, 54(5): 893 - 913.

[29] 张人千. 考虑时间序列关联的订单选择决策比较研究 [J]. 管理科学学报, 2009, 12(3): 44 - 55.
Zhang Renqian. Comparative study of order selection decision considering time series association [J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(3): 44 - 55. (in Chinese)

[30] Ernst R, Kouvelis P. The effects of selling packaged goods on inventory decisions [J]. Management Science, 1999, 45(8): 1142 - 1155.

[31] Topkis D M. Supermodularity and Complementarity [M]. Princeton: Princeton University Press, 1998.

[32] Muller A, Scarsini M. Some remarks on the supermodular order [J]. Journal of Multivariate Analysis, 2000, 73(1): 107 - 119.

[33] Zhao X, Atkins D R. Newsvendors under simultaneous price and inventory competition [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2008, 10(3): 539 - 546.

[34] Zhang R Q, Zhang L K, Zhou W H, et al. The multi-item newsvendor model with cross-selling and the solution when demand is jointly normally distributed [J]. European Journal of Operational Research, 2014, 236(1), 147 - 159.

Newsvendor model and game analysis of cross-selling products

*ZHOU Jia-qi, ZHANG Ren-qian**

School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract: Cross-selling emerges when complementary associations exist among products: A customer who has purchased a product may be willing to purchase another associated product with a certain probability; otherwise, the cross-selling opportunity of a stocked product can also dimish because of the shortage of its associated products. In this paper, a single-period multi-product centralized newsvendor model considering cross-selling and shortage penalty is formulated. The first-order necessary conditions and the upper and lower bounds of the optimal order quantity are given. For multiple newsvendors who make decisions individually and competitively, the newsvendor non-cooperative game of cross-selling product is modeled, which is proved supermodular. The first-order conditions, the uniqueness conditions and the bounds of the Nash equilibrium are developed. The difference between the decisions of the two models is presented and the analysis shows how the correlation of demand influences the expected profit. Finally, a computational study is conducted to observe the impacts of cross-selling, demand correlation, and shortage penalty on the order quantities and expected profits.

Key words: cross-selling; newsvendor model; newsvendor game; Nash equilibrium