单机下异构任务调度的解性质研究①

王长军，徐 琪，贾永基
(东华大学旭日工商管理学院，上海 200051)

摘要: 以单机为背景，重点针对具有正规型和非正规型时间效用函数的自利任务同时存在的情况，研究了异构任务(或代理)影响稀缺资源分配效率这一问题. 为此，建立了描述问题的非合作博弈模型，定义了 Nash 均衡调度与 Pareto 调度的概念，讨论了两者之间的关系，给出了判定 Nash 均衡调度是否为 Pareto 调度的充要条件，并定量分析了 Pareto 调度可能导致的系统全局性能恶化程度，即无秩序代价. 由此揭示资源分配问题中异构的自利资源使用者与资源提供方之间的冲突机理，并明确异构任务给资源分配效率带来的影响.

关键词: 非正规指标; 无秩序代价; 单机调度; 博弈理论; Pareto 调度
中图分类号: TP29 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007 - 9807(2015)07 - 0070 - 12

0 引 言

如何将有限资源在多个个体之间进行有效分配是一类基础问题. 传统上，常假设存在全局决策者，资源分配由全局决策者在某个系统性能指标的指引下，设计相应规则予以解决，独立个体的诉求并不被关注. 但在全局决策者或协调机制缺失的情况下，独立个体具有的自利性(selfishness)会导致个体之间对稀缺资源的竞争，竞争的均衡结果继而会影响最优系统性能指标的实现. 为深入研究这一影响程度，文献[1]以网络路由问题为背景，最早提出无秩序代价(price of anarchy，POA)，定量描述网络资源分配问题中由于个体自利性而导致的最差全局结果和全局决策者所期望的最优系统性能之间的差距. 因其能够刻画个体博弈结果(个体理性)和全局最优(集体理性)的冲突，所以，这一概念被广泛应用于社会经济[2-3]、管理[4-6]和工程[7-8]等领域.

在此类问题的诸多分支中，任务调度是 POA 应用研究成果最为丰富的领域之一. 任务调度问题，也称排序问题，研究如何将单个或者多个资源按时间顺序分配给等待处理的任务个体，并使某种性能指标得以优化. 此类问题中，当待处理任务来自具有不同要求的独立客户时[9]，每个客户会抢占能够最小化自身时间效用函数(time utility function，后简称“时效函数”)的资源段，从而会导致 POA.

随着资源物理属性的不同(如网络、道路、机器)，任务调度问题对应不同的现实背景(如网络路由[8,10]、交通管理[7,11]和生产调度[12,13])，在理论研究中也采取不同的模型. 文献[12]将现有研究所采用模型分为拥塞模型(congestion model)和排序模型(sequencing model). 前者指客户的独立性能指标除了与其自身任务的完成时间有关，还与处理该任务的资源所承担的总负荷相关，并且随着这两个量的增加而恶化，该模型能够较好反映网络路由等问题的基本特质. 后者中，客户时效只与其任务完成时间有关，而与在其后完成的

① 收稿日期: 2012 - 09 - 20; 修订日期: 2012 - 12 - 28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71172174; 71202066; 71371045); 教育部人文社科青年基金项目(13YJC630159); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目.
作者简介: 王长军(1976—)，男，安徽人，博士，副教授. Email: cjwang@ dhu. edu. cn

其它任务无关，这与运作管理问题的基本特点相吻合. 现有工作在承认任务个体自利性的基础上，基于这两种模型，遵循如下研究思路: 首先，定义个体竞争的均衡结果，即 Nash Equilibrium (NE)[14] 解概念，然后，多以单机、并行机描述资源情况，以 min-max 型的最小化最大完成时间 ($C_{\max}$) 或 min-sum 型的最小化完成时间之和 ($\sum C_i$) 为系统性能指标，定量分析各种特定机制产生的 NE 解具有的 POA.

基于拥塞模型，文献 [1] 最早采用非合作博弈研究了并行网络下的自利个体调度问题，网络资源分配的系统性目标则是平衡每条网络通道上的通信数据负荷. 论文定义了自利客户竞争资源的混合 NE，定量分析了 POA. 文献 [15] 以同速 (identical) 并行机为背景，分析了局部搜索 (local search) 算法所产生的 NE 集合的 POA，并将结论扩展到了恒速 (uniform) 机下. 文献 [1,15] 中的系统性能指标均为 $C_{\max}$. 基于排序模型，文献 [16,17] 以同速并行机为背景，分别研究了 SPT (Shortest Processing Time) 和 LPT (Longest Processing Time) 策略可导致的 POA. 文献 [18] 将结果推广到了恒速机下. 这些工作仍以 $C_{\max}$ 为系统优化目标. 文献 [19] 针对并行机，分析了系统性能指标分别为 $\sum C_i$ 和 $C_{\max}$ 下的 NE 调度集合的 POA. 文献 [20] 考虑了更多的情况.

总的来看，现有考虑个体自利性的任务调度研究，无论是拥塞模型，还是排序模型，均基于如下的重要假设: 假定个体具有正规型 (regular)[21] 时效函数，即客户时效随其任务完成时间的推迟而恶化，并且所有自利个体的时效是相同的. 对此，文献 [12,17,20] 等都曾明确指出过. 但在许多资源分配问题中，尤其是管理领域，个体不仅是自利的，常常也是异构的 (heterogeneous)，如文献 [22,23]. 最为典型的就是在运作管理中，自利的客户会因为其所需产品/服务对自身重要程度的不同，或者是其自身运营模式的不同，对于等待呈现出不同的敏感程度. 有的客户可能希望尽可能早收到所需产品或者服务，呈现出正规型的时效函数; 而有的客户则遵循准时化 (just in time, JIT) 的运营模式，希望供应方在一个时间点满足其需求，早或迟都会带来相应成本，其时效函数恰恰为非正规型 (non-regular，即客户时效函数不一定是其任务完成时间的增函数[21]). 简言之，面对有限资源，资源使用者不仅是自利的，而且是异构的，这与现有研究遵循的假设，即自利个体具有相同正规型时效函数[12,17,20]，并不一致.

为此，本文对单机下排序模型的 POA 相关问题展开研究，创新点在于: 一是不同于现有研究将自利个体同质化的假设，本文重点考虑自利个体具有异构时效函数的情况; 二是区别与现有研究多针对以完工时间主的系统性能指标的情况，本文兼顾了围绕延迟时间 L_i 的 min-max 型指标 ($L_{\max}$) 或 min-sum 型指标 ($\sum L_i$). 注意到异构客户的存在至少会带来两个重要的影响. 一是解集合的界定方面: 由于部分具有非正规型时效的客户希望其任务在一个时点，而非尽早完成，竞争的结果将导致现有研究中的 NE 解可能并非 Pareto 最优，两解集合之间的关系需要进行深入探究. 二是资源分配效率方面: 直观上，非正规型客户的存在会进一步恶化 POA，但恶化程度具体与哪些因素有怎样关系，还需做详细分析.

1　问题描述和解定义

本节将建立对问题的基本描述，定义相应的解概念，并对不同解概念之间的关系进行初步分析.

1.1　变量定义与问题描述

以单机为研究背景，记 n 个客户为 $\{J_1, J_2, \cdots, J_n\}$，每个客户只有一个待处理任务，任务动态到达，其到达时间为 r_i，到达后等候处理的时间为 w_i，处理时间为 p_i，完成时间为 C_i，记 $P = p_1 + \cdots + p_n$，以上各量均为非负整数. 不考虑抢占，有 $r_i + w_i + p_i = C_i$. 每个自利客户希望最小化反映其等待成本的时间效用函数 $f_i(w_i)$. $f_i(w_i)$ 可能为正规型，典型的如 C_i; 也可能为非正规型，典型的如图 1 中的 JIT 指标，即最小化延迟时间 $L_i = |C_i - d_i|$，其中 d_i 为客户 J_i 所期望的最佳交期，显然有 $r_i + p_i \leqslant d_i$. 定义满足物理约束，包括到达约束、容量约束 (即单一资源在任一时刻只能处理一个客

户的任务）和非抢占约束的可行调度集合为 W^{valid}.

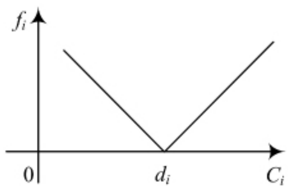


图 1　一种典型的非正规型时间效用函数示例

Fig. 1 Illustration of a typical non-regular time utility function

在如上变量基础上，参考传统的“$\alpha|\beta|\gamma$”式（如“$1|r_i|C_{max}$”）调度问题表达方式[21]和文献[20]，建立“资源|任务|系统”作为考虑自利任务个体的调度问题的表达方式. 其中，“资源”代表待分配的资源环境，如单机，并行机等. “任务”代表自利个体试图最优化的时效函数，记为 f_i；“系统”代表资源提供者期望实现的某个系统性全局指标. 具体如表 1 所示. 例如，$1|r_i=0, f_{1\leqslant i\leqslant n}=C_i|C_{max}$ 代表单机下，客户任务零时刻到达，自利客户具有正规型时效函数，而系统目标为最小化最大完成时间的问题. $1|f_{1\leqslant i\leqslant j}=C_i; f_{j+1\leqslant i\leqslant n}=|C_i-d_i||(\cdot)$ 则表示单机下，客户具有异构时效函数，而系统全局指标为任意的情况.

表 1　“资源|任务|系统”示意表

Table 1 Illustration of “resource|tasks|system”

资源	任务	系统
单机: 1 并行机: P_m …	正规型: $f_i=C_i$, … 非正规型: $f_i=\|C_i-d_i\|$, …	完成时间之和: $\sum C_i$ 最大完成时间: C_{max} 延迟时间之和: $\sum L_i$ 最大延迟时间: L_{max} …

1.2　解概念定义与关系分析

对于问题 $1|f_{1\leqslant i\leqslant j}=C_i; f_{j+1\leqslant i\leqslant n}=|C_i-d_i||(\cdot)$，给出相关解定义. 首先，如果存在策略组合 $w^*=(w_1^*, \cdots, w_n^*)$ $(w^*\in W^{valid})$，使其对于每一个客户 $J_i(i=1,\cdots,n)$，都满足：

$$f_i(w_1^*, \cdots, w_{i-1}^*, w_i^*, w_{i+1}^*, \cdots, w_n^*)\leqslant f_i(w_1^*, \cdots, w_{i-1}^*, w_i, w_{i+1}^*, \cdots, w_n^*). \tag{1}$$

且 $(w_1^*, \cdots, w_{i-1}^*, w_i, w_{i+1}^*, \cdots, w_n^*)\in W^{valid}$，不等式中至少有一个是严格小于，则 w^* 称为 Nash Equilibrium 调度，简称 NE 调度. 在这样的一个调度中，没有客户可以仅通过改变自身策略优化其性能. 记所有 w^* 组成的 NE 调度集合为 w^*，显然有 $w^*\in W^*\subset W^{valid}$. 文献[19]已在并行机下证明，只要 W^{valid} 不为空，NE 调度 w^* 总是存在的. 令文献[19]中并行机个数为 1，相同方法可以应用于本文，不再赘述.

NE 调度通常不唯一，在考虑了具有非正规时效函数的客户后，NE 调度会呈现出一些新的特点. 为此，引入支配（dominate）和 Pareto 调度的概念.

对于 W^{valid} 集合中的调度 $w^{Pareto}(=(w_1^{Pareto}, \cdots, w_n^{Pareto}))$ 和 $w(=(w_1,\cdots,w_n))$，如果满足

$$f_i(w_i^{Pareto})\leqslant f_i(w_i),\ i=1,\cdots,n \tag{2}$$

且其中至少有一个是严格小于，则称调度 w^{Pareto} 支配调度 w. 如果不存在可行调度支配 w^{Pareto}，则称 w^{Pareto} 为 Pareto 调度. 所有的 Pareto 调度组成集合 W^{Pareto}，且 $W^{Pareto}\subset W^{valid}$.

给出解定义后，针对客户时效函数为正规型和任意型的情况，可分别得到以下结论.

定理 1　对于 $1|f_{1\leqslant i\leqslant n}=C_i|(\cdot)$ 问题，有 $W^*=W^{Pareto}$.

证明

(a) 对于 $\forall$ Pareto 调度 $w^{Pareto}(=(w_1^{Pareto},\cdots, w_n^{Pareto}))$，如果它不是 NE 调度，则按 NE 调度定义，必定 $\exists i: f_i(w)<f_i(w^{Pareto})$，其中 $w=(w_1^{Pareto}, \cdots, w_{i-1}^{Pareto}, w_i, w_{i+1}^{Pareto}, \cdots, w_n^{Pareto})\in W^{valid}$. 由此可知，

调度 w 支配调度 w^{Pareto}. 可知 w^{Pareto} 不是 Pareto 调度，与假设条件相反. 所以，Pareto 调度 w^{Pareto} 必定也是 NE 调度.

(b) 对于 $\forall$NE 调度 w^* ($=(w_1^*,\cdots,w_n^*)$)，根据 NE 调度定义，对 $\forall i$，给定($w_1^*,\cdots,w_{i-1}^*,w_{i+1}^*,\cdots,w_n^*$)不变，考虑到各任务时效函数均为正规型，如果 J_i 希望通过减小其完成时间，以使其时效更优，则要么违反约束，要么推迟其它某个任务的完成时间. 所以，可行调度集合 W^{valid} 中不会存在支配 w^* 的调度，则 NE 调度 w^* 也是 Pareto 调度.

综上可得 $W^*=W^{Pareto}$.　　证毕.

定理 2　对于 $1\mid f_{1\leqslant i\leqslant j}=C_i;f_{j+1\leqslant i\leqslant n}=\mid C_i-d_i\mid\mid(\cdot)$ 问题，有 $W^{Pareto}\subset W^*$.

证明

(a) 同定理 1 中证明过程(a)，可知任一 Pareto 调度必定也是 NE 调度.

(b) 构造一个简单实例说明 NE 调度未必是 Pareto 调度. 假设单机两任务调度问题，任务零时刻到达，处理长度分别为 3 和 12. 异构 J_1 和 J_2 的优化目标分别是最小化 C_1 和 $\mid C_2-d_2\mid$，$d_2=15$. 图 2(a) 显示的调度 w^* 为 J_2 先处理，J_1 紧随 J_2 处理. 此时，两任务的时效分别为 $f_1=15$，$f_2=3$. 根据 NE 调度定义，显然 w^* 是一个 NE 调度，但这个调度不是 Pareto 调度. 这是因为存在调度 w' 如图 2(b)，具有 $f_1=3$，$f_2=0$. 显然，w' 支配 w^*.

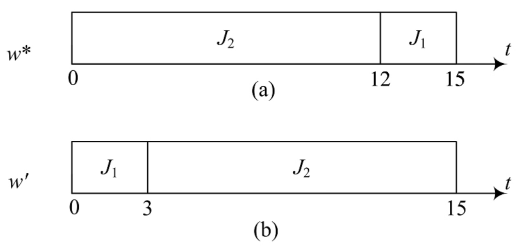


图 2　w^* 和 w' 调度图

Fig. 2 Illustration of schedules w^* and w'

综上可得 $W^{Pareto}\subset W^*$.　　证毕.

定理 1、2 明确了两种情况下 NE 调度与 Pareto 调度之间关系. 在现有研究(仅考虑同构正规型客户)中，Pareto 调度集合等同于 NE 调度集合，无需区别研究. 但在异构客户的情况下，Pareto 调度集合是 NE 调度集合的子集. 鉴于此，下文将从两个方面展开工作. 一是给出判断 NE 调度是否为 Pareto 调度的准则(见第 2 节)；二是分析 Pareto 调度集合的 POA(见第 3 节).

2　相关性质研究

为使研究能更加深入，下文基于一个特定的异构客户单机调度问题，其中 $J_1,\cdots,J_{n-1}$ 具有正规型时效，而 J_n 具有非正规型时效 $\mid C_n-d_n\mid$. 依照上一节中的表达方式，可记为 $1\mid f_{1\leqslant i\leqslant n-1}=C_i;f_n=\mid C_n-d_n\mid\mid(\cdot)$. 首先给出引理 1.

引理 1　对于问题 $1\mid f_{1\leqslant i\leqslant n-1}=C_i;f_n=\mid C_n-d_n\mid\mid(\cdot)$，不失一般性，假设在 NE 调度 w 中，任务 $J_1,\cdots,J_{n-1}$ 按处理顺序编号. 如果存在一个新的 NE 调度 w^* 支配原 NE 调度 w，记 J_n 在 w 和 w^* 中完成时间分别为 C_n 和 C_n^*，则必有 $C_n<C_n^*$ 和 $C_n<d_n$.

证明　因为 NE 调度 w^* 支配 NE 调度 w，所以，根据支配的定义，有 $\forall J_i: f_i(w_i^*)\leqslant f_i(w_i)$，且 $\exists J_j: f_j(w_i^*)<f_j(w_i)$.

对于 J_n，在两个 NE 调度 w^*、w 中的等待时间分别为 w_n^*、w_n. 两者间关系无非有三种：$w_n^*=w_n$，$w_n^*<w_n$，$w_n^*>w_n$.

如果 $w_n^*=w_n$，即 $f_n(w_i^*)=f_n(w_i)$ 成立，则必 $\exists J_i: w_i^*<w_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$，即至少有一个具有正规型指标的 J_i，能在其它所有任务指标不恶化并不违反物理约束的前提下，减少其完成时间. 则原调度 w 不是 NE 调度. 所以，必有 $w_n^*\neq w_n$.

如果 $w_n^*<w_n$，考虑到调度 w^* 支配原 NE 调度 w，所以对于任务 J_n，有 $f_n(w_i^*)\leqslant f_n(w_i)$，即 $\mid C_n^*-d_n\mid\leqslant\mid C_n-d_n\mid$. 由 $w_n^*<w_n$ 不难得 $C_n^*<C_n$. 由此可得 $C_n>d_n$. 那么，在调度 w 中，任务 J_n 前必定没有空闲，否则任务 J_n 总可以在其它所有任务指标不恶化并不违反物理约束的前提下，通过前移来减少其等待成本，则原调度 w 不是 NE 调度. 当任务 J_n 前没有空闲时，将等待时间从

w_n 缩短到 w_n^*，必定会违反物理约束，或者使得任务 $J_1, \cdots, J_{n-1}$ 中某个后移，恶化其指标. 则此情况下新生成的调度 w^* 不会支配调度 w.

所以，只可能有 $w_n^* > w_n$，即 $C_n < C_n^*$，于是有 $(C_n^* - d_n) > (C_n - d_n)$. 又因为有 $|C_n^* - d_n| \leqslant |C_n - d_n|$. 所以，必存在 $C_n - d_n < 0$，即 $C_n < d_n$.

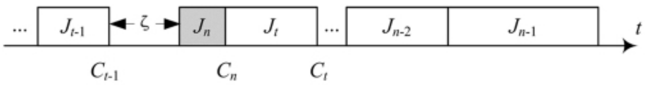
于是，原命题得证. 证毕.

在此基础上，引理 2 给出更紧的条件.

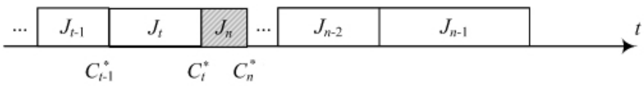
引理 2 对于问题 $1 | r_i = 0, f_{1 \leqslant i \leqslant n-1} = C_i; f_n = | C_n - d_n | | (\cdot)$，不失一般性，假设在 NE 调度 w 中，任务 $J_1, \cdots, J_{n-1}$ 按处理顺序编号，且 $C_{t-1} < C_n < C_t (1 \leqslant t \leqslant n-1)$. 如果 $d_n \geqslant \sum_{i=1}^{t} p_i + p_n$，则必存在一个新 NE 调度 w^* 支配原 NE 调度 w.

证明 为产生支配原 NE 调度 w 的新 NE 调度 w^*，由引理 1，需要调度 w 中的 J_n 向后调整处理顺序. 由此，在 $J_i (0 \leqslant i < t)$ 时效不变的前提下，一方面使 $J_i (t \leqslant i \leqslant n-1)$ 的完成时间可能获得提前，一方面使 J_n 的完成时间更靠近 d_n，从而获得支配原调度 w 的 w^*.

根据引理 1，因为调度 w 中有 $C_n < d_n$，所以，调度 w 中的 J_n 之前可能具有空闲，记为 ζ，如图 3-(a) 所示. 显然，$p_i > \zeta \ (t \leqslant i \leqslant n-1)$.



(a)



(b)

图 3 NE 调度 w 与 w^* 示意图

Fig. 3 Illustration of NE schedule w and w^*

因为 $C_n < d_n$，所以有

$$C_n = \sum_{i=1}^{t-1} p_i + \zeta + p_n < d_n \tag{3}$$

此外，易有 J_n 在调度 w 中的时效为

$$f_n(w_n) = |C_n - d_n| = d_n - C_n = d_n - (\sum_{i=1}^{t-1} p_i + \zeta + p_n) \tag{4}$$

可以通过 J_n 与 J_t 的处理位置互换来向后调整 J_n 的处理顺序，如图 3(b) 所示. 则 J_n 在调度 w^* 中的时效为

$$f_n(w_n^*) = |C_n^* - d_n| = |\sum_{i=1}^{t} p_i + p_n - d_n| \tag{5}$$

为去除式(5) 中的绝对值号，如果有

$$d_n \geqslant \sum_{i=1}^{t} p_i + p_n \tag{6}$$

则式(5) 转化为

$$f_n(w_n^*) = |C_n^* - d_n| = d_n - (\sum_{i=1}^{t} p_i + p_n) \tag{7}$$

因为 $p_t > \zeta$，所以不难有

$$f_n(w_n) > f_n(w_n^*) \tag{8}$$

此外，对于其它具有正规型指标的任务，显然有

$$C_1 = C_1^*, \cdots, C_{t-1} = C_{t-1}^*, C_t < C_t^*, C_{t+1} \leqslant C_{t+1}^*, \cdots, C_{n-1} \leqslant C_{n-1}^* \tag{9}$$

所以，如果式(6) 成立，有 NE 调度 w^* 支配调度 w.

于是，原命题得证. 证毕.

以上两引理都给出了判断是否有调度支配 NE 调度的条件，其关键在于非正规任务 J_n 的最优交期 d_n 与其它变量的关系. 由分析过程可知，两引理给出的是充分而非必要条件. 在此基础上，定理 3 给出充要条件.

定理 3 对于问题 $1 | r_i = 0, f_{1 \leqslant i \leqslant n-1} = C_i; f_n = | C_n - d_n | | (\cdot)$，不失一般性，假设在 NE 调度 w 中，任务 $J_1, \cdots, J_{n-1}$ 按处理顺序编号，且 $C_{t-1} < C_n < C_t (1 \leqslant t \leqslant n-1)$. 记 ζ 为调度 w 中 J_n 之前可能具有的空闲，$\zeta = C_n - p_n - C_{t-1}$. 当且仅当不

等式$2d_n \geqslant \sum_{i=1}^{t-1} p_i + \sum_{i=1}^{t} p_i + 2p_n + \zeta$成立时，存在一个 NE 调度 w^* 支配调度 w.

证明　由引理 1，如果存在新的 NE 调度 w^* 支配原 NE 调度 w，则存在 $C_n < C_n^*$. 即在新调度 w^* 中，原调度 w 中 J_{t-1} 之后的排序 $J_n \to J_t \to \cdots \to J_{t+l} \to \cdots \to J_{n-1}$ 被打乱，且 J_n 不再是紧跟 J_{t-1} 之后处理. 注意到，任意两个正规型任务不会互换处理位置，因为这样必定会导致其中之一时效变差. 所以，如果支配 NE 调度 w 的新调度 w^* 存在的话，w^* 可以通过 J_n 与 $J_{t+l}(0 \leqslant l \leqslant n-t-1)$ 的处理位置交换而产生.

引理 2 证明了如 $d_n \geqslant \sum_{i=1}^{t} p_i + p_n$ 成立，则 w^* 存在. 为此，此处关注 $d_n < \sum_{i=1}^{t} p_i + p_n$ 的情况，此时，对于 J_n 与 $J_{t+l}(0 \leqslant l \leqslant n-t-1)$ 的处理位置交换而形成的新调度来说，无论是不是 Pareto 调度，只要它是 NE 调度，任务必定的连续处理，不存在空闲.

分析任意一个 $J_{t+l}(0 < l \leqslant n-t-1)$ 与 J_n 互换位置处理的情况. 对于 $\forall J_{t+l}(0 \leqslant l \leqslant n-t-1)$，显然有，$p_{t+l} > \zeta$. 否则，$J_{t+l}$ 总可以在不影响其它任务的情况下提前到 J_n 之前处理，则原调度 w 就不是 NE 调度. 对于 J_n 与 J_{t+l} 互换后生成新的 NE 调度 w^*，记 $J_i(0 \leqslant i \leqslant n)$ 在 w^* 中的完成时间为 C_i^*. 如前所述，由于新调度 w^* 中不存在空闲，则有

$$C_n^* = \sum_{i=1}^{t+l} p_i + p_n \tag{10}$$

所以，如果 J_n 与 J_{t+l} 交换后生成调度为原调度的 Pareto 调度，则应当有

$$f_n(w_n^*) = | C_n^* - d_n | \leqslant f_n(w_n) = | C_n - d_n | \tag{11}$$

其中 因为 $d_n < \sum_{i=1}^{t} p_i + p_n < \sum_{i=1}^{t+l} p_i + p_n$，所以有

$$f_n(w_n^*) = | C_n^* - d_n | = \sum_{i=1}^{t+l} p_i + p_n - d_n \tag{12}$$

由引理 1，因为 $C_n \leqslant d_n$，所以

$$f_n(w_n) = | C_n - d_n | = d_n - \sum_{i=1}^{t-1} p_i - p_n - \zeta \tag{13}$$

若要 J_n 与 J_{t+l} 互换后生成新的 NE 调度 w^* 支配原调度，则需满足

$$\sum_{i=1}^{t+l} p_i + p_n - d_n \leqslant d_n - \sum_{i=1}^{t-1} p_i - p_n - \zeta \tag{14}$$

即

$$0 \geqslant \sum_{i=1}^{t-1} p_i + \sum_{i=1}^{t+l} p_i + 2p_n + \zeta - 2d_n \tag{15}$$

特别的，当 $l = 0$ 时，即 J_n 和 J_t 互换，如互换后产生的调度支配原调度，则应满足

$$0 \geqslant \sum_{i=1}^{t-1} p_i + \sum_{i=1}^{t} p_i + 2p_n + \zeta - 2d_n \tag{16}$$

显然，若式(15) 成立，则式(16) 必定成立. 换言之，如果 J_n 和任意一个 $J_{t+l}(0 < l \leqslant n-t-1)$ 互换生成的调度可以支配原调度的话，那么，J_n 和 J_t 互换也一定可以生成支配原调度的新调度. 反之，如果 J_n 和 J_t 互换也无法得到支配原调度的新调度，即式(16) 不成立，那么任意两任务的互换都不会有效，即原调度已经是 Pareto 调度.

于是，原命题得证.　　证毕.

对定理 3，有两点需要说明. 首先，如式(16) 成立，通过 J_n 和 J_t 互换可得支配原调度 w 的新调度 w^*，这只能说明 w 不是 Pareto 调度，并不能说明 w^* 一定就是 Pareto 调度. 第二，即便 w^* 是 Pareto 调度，但 w^* 也可能不是唯一的支配 w 的调度. 依据定理 3，可通过重复运用 J_n 和 J_t 的互换生成支配原调度的新调度 w^*，直至获得一个 Pareto 调度. 所以，定理 3 也给出了将非 Pareto 调度的 NE 调度转化为 Pareto 调度的方法.

3　Pareto 调度的无秩序代价分析

定理 2 指出，在考虑了具有非正规型时效函数的客户之后，Pareto 调度集合将是 NE 调度集合的精炼子集，其它非 Pareto 调度的 NE 调度将受到 Pareto 调度的支配. 定理 3 继而揭示了如何获得 Pareto 调度. 为此，本节重点关注更加有效的 Pareto 调度集合，定量分析其 POA，以衡量在全局决策者缺失下可能导致的系统性能恶化程度.

3.1　POA 分析

记系统全局性能指标为 $M: = M(w)$. 本节考虑如表 1 中的四种最常见的系统指标. 其中，考虑到延迟时间 L_i 可能为 0，继而使所得的 POA 无意

义. 为此,借鉴文献[24]的做法,采用完成—交货时间 $L_i = C_i + q_i$ 替代延迟时间,其中非负的 q_i 代表在交货之前所需的额外处理或者运输时间. 由此,四种系统指标分别为

$$M_1 = \sum C_i,\ M_2 = C_{\max},\ M_3 = \sum L_i = \sum (C_i + q_i),$$
$$M_4 = L_{\max} = \max_i L_i = \max_i (C_i + q_i) \quad (17)$$

其中后两者在本领域研究中较少被讨论. 对于“$1 \mid r_i = 0, f_{1\leqslant i\leqslant n-1} = C_i; f_n = \mid C_n - d_n \mid \mid M_i$”问题的任一调度实例 σ,有相应的 Pareto 调度 w^{Pareto} 和最小化 M_i 的调度 $w_i^{opt}(i = 1, 2, 3, 4)$. 记 J_i 在调度 w^{Pareto} 中的完成时间和完成—交货时间分别为 C_i^{Pareto} 和 L_i^{Pareto}. Pareto 调度的无秩序代价 POA 是指在某个系统指标的最优调度衡量下,整个 Pareto 调度集合 W^{Pareto} 的性能范围,即

$$POA_i = \max_{\sigma} \max_{w^{Pareto}} \frac{M_i(w^{Pareto})}{M_i(w_i^{opt})},$$
$$(i = 1, 2, 3, 4) \quad (18)$$

不难发现,Pareto 调度无外乎会有以下三种情况:

情况 1 调度中任务连续处理;

情况 2 在任务 J_n 之前有空闲 $\zeta(>0)$,且 J_n 是最后完成的任务. 此时,显然有

$$C_n^{Pareto} = d_n = P + \zeta > P \quad (19)$$

情况 3 在任务 J_n 之前有空闲 $\zeta(>0)$,且 J_n 之后仍有任务处理. 对于 Pareto 调度,由定理 3,应满足

$$2d_n < \sum_{i=1}^{t} p_i + \sum_{i=1}^{t-1} p_i + 2p_n + \zeta < \sum_{i=1}^{t} p_i +$$
$$\sum_{i=1}^{t-1} p_i + 2p_n + p_t = 2\sum_{i=1}^{t} p_i + 2p_n \quad (20)$$

继而有

$$C_n^{Pareto} < d_n < \sum_{i=1}^{t} p_i + p_n < P \quad (21)$$

分别针对每种系统全局指标分析每种情况下的 POA,且最终的 POA 取三种情况中的最大值.

(a) $M_1 = \sum C_i$

在这一系统指标下,有最优调度 w_1^{opt},记 J_i 在最优调度中的完成时间为 C_i^{opt},显然有

$$C_1^{opt} \geqslant p_1; C_2^{opt} \geqslant p_2; \cdots; C_n^{opt} \geqslant p_n \quad (22)$$

相加可得

$$M_1(w_1^{opt}) = \sum C_i^{opt} \geqslant p_1 + p_2 + \cdots + p_n = P \quad (23)$$

情况 1 因为任务连续处理,所以,在 NE 调度 w^* 中,任意 J_i 完成时间 C_i^* 都满足

$$C_i^* \leqslant p_1 + p_2 + \cdots + p_n = P \quad (24)$$

则

$$M_1(w^{Pareto}) = \sum C_i^{Pareto} \leqslant n(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = nP \quad (25)$$

结合式(23),有

$$M_1(w^{Pareto}) / M_1(w_1^{opt}) \leqslant n \quad (26)$$

情况 2 因为任务 J_n 最后完成,所以有

$$C_i^{Pareto} \leqslant (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}), 1 \leqslant i \leqslant n-1 \quad (27)$$

结合式(19),有

$$\sum C_i^{Pareto} \leqslant (n-1)(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + d_n \quad (28)$$

再结合式(23),有

$$M_1(w^{Pareto}) / M_1(w_1^{opt}) \leqslant ((n-1)(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + d_n) / P \leqslant (n-1) + d_n / P \quad (29)$$

情况 3 显然有

$$C_i^{Pareto} \leqslant d_n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}),$$
$$1 \leqslant i \leqslant n-1 \quad (30)$$

结合式(21),有

$$\sum C_i^{Pareto} \leqslant (n-1)(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + nP < (2n-1)P \quad (31)$$

再结合式(23),有

$$M_1(w^{Pareto}) / M_1(w_1^{opt}) \leqslant (2n-1)P/P = 2n-1 \quad (32)$$

综合三种情况下的结果,即式(26)、(29)、(32),有

$$POA_1 = \max\{n, (n-1) + d_n/P, 2n-1\} = \max\{(n-1) + d_n/P, 2n-1\} \quad (33)$$

(b) $M_2 = C_{\max}$

因任务零时刻到达,易知最优的 $C_{\max}$ 为

$$M_2(w_2^{opt}) = P \quad (34)$$

情况 1 因为任务连续处理,则显然有

$$M_2(w^{Pareto}) / M_2(w_2^{opt}) = P/P = 1 \quad (35)$$

情况 2 此情况下 J_n 最后完成且前有空闲,由式(19),易有

$$M_2(w^{Pareto}) / M_2(w_2^{opt}) = d_n / P \quad (36)$$

情况 3 类似式(30)

$$M_2(w^{Pareto}) \leqslant d_n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) \quad (37)$$

所以有

$$M_2(w^{Pareto})/M_2(w_2^{opt}) \leqslant (d_n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}))/P \leqslant 1 + d_n/P \quad (38)$$

结合式(21),有

$$M_2(w^{Pareto})/M_2(w_2^{opt}) \leqslant 2P/P = 2 \quad (39)$$

综合三种情况下的结果,即式(35)、(36)、(39),有

$$POA_2 = \max\{1, d_n/P, 2\} = \max\{d_n/P, 2\} \quad (40)$$

(c) $M_3 = \sum L_i$

记 $\sum_i q_i = Q$,J_i 在最优调度 w_3^{opt} 中的完成—交货时间为 L_i^{opt},显然有

$$M_3(w_3^{opt}) = \sum_i L_i^{opt} \geqslant \sum_i (p_i + q_i) = P + Q \quad (41)$$

情况 1 因为任务连续处理,所以,在 Pareto 调度 w^{Pareto} 中,L_i^{Pareto} 满足

$$L_i^{Pareto} = C_i^{Pareto} + q_i \leqslant (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) + q_i = P + q_i \quad (42)$$

则

$$M_3(w^{Pareto}) = \sum L_i^{Pareto} \leqslant nP + Q \quad (43)$$

结合式(41),有

$$M_3(w^{Pareto})/M_3(w_3^{opt}) \leqslant (nP + Q)/(P + Q) \leqslant n \quad (44)$$

情况 2 此情况下 J_n 最后完成,则对于其它任务,存在

$$L_i^{Pareto} \leqslant (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + q_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \quad (45)$$

再结合式(19),有

$$M_3(w^{Pareto}) = \sum L_i^{Pareto} \leqslant (n-1)(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + d_n + Q \quad (46)$$

于是有

$$\begin{aligned} M_3(w^{Pareto})/M_3(w_3^{opt}) &\leqslant ((n-1)(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + d_n + Q)/(P + Q) \\ &\leqslant ((n-1)P + d_n + Q)/(P + Q) \\ &\leqslant ((n-1)P + d_n)/P \\ &= (n-1) + d_n/P \end{aligned} \quad (47)$$

情况 3 此时有

$$L_i^{Pareto} \leqslant d_n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + q_i < P + (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + q_i, 1 \leqslant i \leqslant n-1 \quad (48)$$

再结合式(21),有

$$\sum L_i^{Pareto} \leqslant (n-1)(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + nP + Q = (2n-1)P + Q \quad (49)$$

所以有

$$M_3(w^{Pareto})/M_3(w_3^{opt}) \leqslant ((2n-1)P + Q)/(P + Q) \leqslant 2n - 1 \quad (50)$$

综合三种情况下的结果,即式(44)、(47)、(50),有

$$POA_3 = \max\{n, (n-1) + d_n/P, 2n-1\} = \max\{(n-1) + d_n/P, 2n-1\} \quad (51)$$

(d) $M_4 = L_{\max}$

记 $p_i + q_i$ 最大的任务为 J_k. 首先给出最优调度 w_4^{opt} 性能值的两个下界:

$$M_4(w_4^{opt}) \geqslant p_k + q_k, M_4(w_4^{opt}) \geqslant P \quad (52)$$

情况 1 因为任务连续处理,则显然有

$$M_4(w^{Pareto}) \leqslant P + p_k + q_k \quad (53)$$

由此

$$M_4(w^{Pareto})/M_4(w_4^{opt}) \leqslant 2 \quad (54)$$

情况 2 因 J_n 最后完成且前有空闲,显然有

$$M_4(w^{Pareto}) \leqslant d_n + p_k + q_k \quad (55)$$

所以

$$POA_4 = M_4(w^{Pareto})/M_4(w_4^{opt}) \leqslant 1 + d_n/P \quad (56)$$

情况 3 使得 $L_{\max}$ 最差的情况显然是 J_k 最后完成,注意到此情况下最后完成的任务不是 J_n,于是有

$$M_4(w^{Pareto}) = L_k \leqslant \zeta + P + q_k \quad (57)$$

因为 $\zeta < p_k$,所以有

$$M_4(w^{Pareto}) < P + p_k + q_k \quad (58)$$

所以

$$M_4(w^{Pareto})/M_4(w_4^{opt}) \leqslant (P + p_k + q_k)/M_4(w_4^{opt}) \leqslant 2 \quad (59)$$

综合三种情况下的结果,即式(54)、(56)、(59),有

$$POA_4 = \max\{2, 1 + d_n/P, 2\} = \max\{1 + d_n/P, 2\} \quad (60)$$

3.2 紧界验证

以上针对四种不同系统性能指标，给出了 Pareto 调度集合的 POA. 但仍需要验证该 POA 是否为紧界. 类似地，仍按以上三种情况进行讨论.

不难发现，无论对于哪种系统指标，情况 1 的 POA 界总小于情况 2、3，故其是否为紧界不会影响整个 POA 界是否为紧，无需对其讨论.

情况 2 下的 POA 界总包含“d_n/P”项，且由式（19）可知有 $d_n = P + \zeta > P$. 因此，只需构造具有足够大 d_n 的实例，则 J_n 会无限后移. 由此不难验证以上情况 2 中的 POA 界均为紧.

重点针对四种不同系统指标，验证情况 3 下的 POA 是否为紧. 为此，构造如下实例.

实例 1 系统性能指标是完成时间之和. 考虑一个静态单机，2 个客户的实例. 任务 1 具有正规型时效函数，处理长度为 p；任务 2 具有非正规型时效函数，处理长度为 ε，最优交期 $d_2 = p$. 其中，ε 为一任意小正数.

对上实例，系统最优调度为任务 2、1 依次处理，则

$$M_1(w_1^{opt}) = \varepsilon + (\varepsilon + p) = 2\varepsilon + p \tag{61}$$

给出如下 NE 调度：在 $p - \varepsilon$ 时刻开始任务 2，随后紧接着处理任务 1. 由定理 3，这是一个 Pareto 调度. 显然该 Pareto 调度符合情况 3 的要求，即在任务 2 前有空闲，且其后仍有任务处理. 则

$$M_1(w^{Pareto}) = (p - \varepsilon) + (p - \varepsilon + p) = 3p - 2\varepsilon \tag{62}$$

因此，有

$$POA_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3p - 2\varepsilon}{2\varepsilon + p} = 3 = 2n - 1 \tag{63}$$

实例 2 系统性能指标是最大完成时间. 实例 2 同实例 1，系统最优调度和 Pareto 调度也与上实例相同，易有

$$M_2(w_2^{opt}) = \varepsilon + p; M_2(w^{Pareto}) = p - \varepsilon + p = 2p - \varepsilon \tag{64}$$

因此，有

$$POA_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2p - \varepsilon}{\varepsilon + p} = 2 \tag{65}$$

实例 3 系统性能指标是交货 — 完成时间之和. 同实例 1，并假设所有任务的交货时间为任意小的正整数. 系统最优调度和 Pareto 调度亦同实例 1，不难验证此实例能够达到 POA 界 $2n - 1$.

实例 4 同实例 3，不难验证此实例能够达到 POA 界 2.

综合式（33）、（40）、（51）、（60）以及紧界验证，得到定理 4：

定理 4 对于“$1 \mid r_i = 0, f_{1 \leqslant i \leqslant n-1} = C_i; f_n = \mid C_n - d_n \mid \mid M_i$”问题，系统性能指标分别为完成时间之和、最大完成时间、完成 — 交货时间之和、最大完成 — 交货时间，其 Pareto 调度集合的无秩序代价 POA 分别满足：$POA_1 = \max\{(n-1) + d_n/P, 2n-1\}$，$POA_2 = \max\{d_n/P, 2\}$，$POA_3 = \max\{(n-1) + d_n/P, 2n-1\}$，$POA_4 = \max\{1 + d_n/P, 2\}$.

类似以上过程，也可对只考虑正规型客户的问题“$1 \mid r_i = 0, f_{1 \leqslant i \leqslant n} = C_i \mid M_i$”展开分析. 由定理 1，其 NE 调度集合和 Pareto 调度集合相同. 此外，NE 调度必定是连续处理的. 所以，其 POA 就是上文分析中情况 1 的结果. 由此不难得定理 5：

定理 5 对于“$1 \mid r_i = 0, f_{1 \leqslant i \leqslant n} = C_i \mid M_i$”问题，系统性能指标分别为完成时间之和、最大完成时间、完成 — 交货时间之和、最大完成 — 交货时间，其 NE 调度集合的无秩序代价 POA 分别满足：$POA_1 = n$，$POA_2 = 1$，$POA_3 = n$，$POA_4 = 2$.

4 结论与分析

对以上结果进行分析，可得以下结论：

（1）客户的自利性会导致资源分配效率的下降，这正是博弈理论中个体理性与集体理性的冲突，恶化的程度反映为解集合的无秩序代价. 如要提高资源分配效率，有必要设计合适的机制引导客户可能具有的策略性行为. 这将是该领域研究的重点之一.

（2）考虑非正规时效客户将使问题变得更加复杂. 通过定理 1、2 可知，异构客户的无序竞争将导致 NE 调度不再是 Pareto 最优. 对部分客户来说，这是无序竞争导致的双输结果. 所以，对这一问题下的机制设计提出了新的要求，即机制至少应当保证竞争结果是 Pareto 调度. 定理 3 给出了判定 NE 调度是否为 Pareto 调度充要条件，由此不难给出将非 Pareto 调度的 NE 调度转换为 Pareto

调度的方法，并有望结合到对此类问题的机制设计中.

(3) 对比定理4、5，无论哪种系统目标，异构客户情况下的POA都大于同构客户的情况.究其原因，无论是min-max，还是min-sum型系统目标，资源提供者总希望客户能充分利用资源.而考虑非正规型客户后，客户的自利性可能致使调度中存在空闲，如3.1中的情况2和3，造成了有限资源的浪费，继而导致POA急剧恶化.特别是情况2，非正规型客户所期望的最优交期 d_n 越大，调度中的空闲越大，导致的POA也就越差.因此，非正规型客户的存在进一步加大了个体和全局优化目标之间的冲突.这一情况下的机制设计将是未来研究的难点.

(4) 在定理4给出的POA界中，大量出现了 d_n/P 项，有必要对其蕴含的理论和现实意义做进一步分析.注意到出现 d_n/P 项是情况2，其中，在交期 d_n 驱使下，非正规型客户 J_n 任务最后完工，且之前有空闲.所以，J_n 的存在并不影响其它正规型客户的排序.理论研究中，需要考虑这一情况下的POA，且由于存在 d_n/P 项，则 d_n 越大，其导致的POA越差.但在实际运作中，由于非正规型客户 J_n 并不参与正规型客户对于供应资源的抢夺，则无需在资源分配的当前规划中考虑 J_n，完全可将其放入下一个规划时域.由此，从应用角度出发，此类问题的机制设计工作重点需要考虑的是情况1和3.

(5) 从系统指标的角度观察定理4、5.由定理5，在同构客户情况下，当系统指标为min-sum型时，其POA大于min-max情况.这与文献[19,20]等对其它同构客户问题的研究发现一致.值得一提的是，定理4在异构客户的情况下发现了相同的规律.究其原因，是因为min-max关注的是完成最迟或者完成—交货最迟的客户，而之前客户的处理顺序对最终的系统性能影响不大，由此，不同的排序对系统性能的影响也就较小.而在min-sum型指标下，关注的是所有客户的完成时间或者完成—交货时间之和，不同的排序都会影响最终的系统性能.由此导致了min-sum型系统性能指标下的POA较大.因此，min-sum型系统性能指标下机制设计，无论在同构客户，还是异构客户的情况下，都是未来研究的难点.

5　结束语

参与有限资源分配的客户不仅是自利的，常常也是异构的.自利且异构的客户将给资源分配的有效性带来重要影响.本文以单机为资源背景，针对同构客户和异构客户两种情况，分析了NE调度集合与Pareto调度集合之间的关系，继而给出了判定是否存在Pareto调度支配NE调度的条件，给出了Pareto调度集合的POA.研究发现，在异构客户的情况下，Pareto调度是NE调度集合的一个精炼子集，但即便是Pareto调度，其导致的全局系统性能也劣于同构客户的情况.此外，无论是同构客户还是异构客户的情况，当系统目标为min-sum型时，个体目标和系统目标的冲突会更大.后续研究除了在其它情况(包括各种异构客户组合情况、各种资源环境背景)下继续进行相关POA分析之外，还需要针对分析结果指出的重点难点问题，设计合适的竞争机制引导客户的策略性行为，实现资源的有效分配.

参考文献:

[1] Koutsoupias E, Papadimitriou C. Worst-case equilibria [C]. Proc. 16th Int. Symp. on Theoret. Aspects of Comput. Sci., STACS, Springer-Verlag, 1999: 404-413.

[2] Moulin H. The price of anarchy of serial, average and incremental cost sharing [J]. Economic Theory, 2008, 36(3): 379-405.

[3] Andelman N, Feldman M, Mansour Y. Strong price of anarchy [J]. Games and Economic Behavior, 2009, 65(2): 289-317.

[4] Georgia P, Sun W. Price of anarchy for supply chains with partial positive externalities [J]. Operations Research Letters, 2012, 40(2): 78-83.

[5] Georgia P, Guillaume R. The price of anarchy in supply chains: Quantifying the efficiency of price-only contracts [J]. Management Science, 2007, 53(8): 1249 – 1268.

[6] 刘天亮，陈　剑，辛春林. 凸需求情形下分权供应链运作效率及福利分析 [J]. 管理科学学报，2011, 14(1): 61 – 68, 96.

Liu Tianliang, Chen Jian, Xin Chunlin. Analysis on social welfare andoperational efficiency in decentralized supply chains with convex demand [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(1): 61 – 68, 96. (in Chinese)

[7] Han D R, Yang H. The multi-class, multi-criterion traffic equilibrium and the efficiency of congestion pricing [J]. Transportation Research, Part E: Logistics and Transportation Review, 2008, 44(5): 753 – 773.

[8] Flammini M, Monaco G, et al. Selfishness, collusion and power of local search for the ADMs minimization problem [J]. Computer Networks, 2008, 52(9): 1721 – 1731.

[9] Pedro C C, Arantza E, et al. Job scheduling, cooperation, and control [J]. Operations Research Letters, 2006, 34(1): 22 – 28.

[10] Roughgarden T. The price of anarchy is independent of the network topology [J]. Journal of Computer and System Sciences, 2003, 67(2): 341 – 364.

[11] George K, Kim T Y, et al. On the degradation of performance for traffic networks with oblivious users [J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2011, 45(2): 364 – 371.

[12] Heydenreich B, Müller R, et al. Games and mechanism design in machine scheduling: An introduction [J]. Production and Operations Management, 2007, 16(4): 437 – 454.

[13] 刘　鹏，周晓晔，衣　娜. 带有减少线性恶化效应的双代理调度问题 [J]. 系统工程学报，2011, 26(3): 387 – 392.

Liu Peng, Zhou Xiaoye, Yi Na. Two-agent scheduling problems with decreasing linear deterioration [J]. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(3): 387 – 392. (in Chinese)

[14] Owen G. Game Theory [M]. Third Edition. San Diego: Academic Press Inc, 1995.

[15] Schuurman P, Vredeveld T. Performance guarantees of local search for multiprocessor scheduling [J]. INFORMS Journal on Computing, 2007, 19(1): 52 – 63.

[16] Immorlica N, Li L, et al. Coordination mechanisms for selfish scheduling [J]. Theoretical Computer Science, 2009, 410(17): 1589 – 1598.

[17] Christodoulou G, Koutsoupias E, Nanavati A. Coordination mechanisms [J]. Theoretical Computer Science, 2009, 410(36): 3327 – 3336.

[18] Kovacs A. New approximation bounds for LPT scheduling [J]. Algorithmica, 2010, 57(2): 413 – 433.

[19] 王长军，贾永基，徐　琪，等. 并行机下独立任务调度的无秩序代价分析 [J]. 管理科学学报，2010, 13(5): 44 – 50, 81.

Wang Changjun, Jia Yongji, Xu Qi, et al. Price of anarchy analysis for scheduling selfish tasks on parallel machines [J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(5): 44 – 50, 81. (in Chinese)

[20] Lee K B, Leung Joseph Y-T, Pinedo M L. Coordination mechanisms for parallel machine scheduling [J]. European Journal of Operational Research, 2012, 220(2): 305 – 313.

[21] Pinedo M L. Scheduling: Theory, Algorithms and Systems [M]. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

[22] 叶涛锋，达庆利. 面向批量订货和多需求类的生产与库存配给 [J]. 管理科学学报，2012, 15(1): 33 – 42.

Ye Taofeng, Da Qingli. Production and inventory rationing with multiple batch demand classes [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(1): 33 – 42. (in Chinese)

[23] Chen Yingju. Optimal selling scheme for heterogeneous consumers with uncertain valuations [J]. Mathematics of Operations Research, 2011, 36(4): 695 – 720.

[24] Hall L A. Approximation Algorithm for Scheduling [M] \\In: Hochbaum D. (Eds.), Approximation Algorithms for NP-Hard Problems. Boston: PWS Publishing, 1996: 1 – 45.

Properties of solution for heterogeneous tasks scheduling on single machine

WANG Chang-jun, *XU Qi*, *JIA Yong-ji*

Glorious Sun School of Business and Management, Donghua University, Shanghai 200051, China

Abstract: The influence of heterogeneous selfish tasks (or agents) on the efficiency of single machine resources allocation is studied, in which regular tasks and non-regular tasks exist simultaneously. Hence, non-cooperative game is introduced to modeling such problems, and corresponding Nash equilibrium schedule and Pareto schedule are defined. The relationship between two solution concepts is investigated and a sufficient and necessary condition is given to judge whether a Nash equilibrium schedule is a Pareto schedule or not. The Price of Anarchy of Pareto schedule which quantitatively measures the loss of the system's global optimum is analyzed. The results reveal the conflict mechanism among resource users and resource providers, and explain the influence of heterogeneous selfish tasks (or agents) on the efficiency of resources allocation.

Key words: non-regular objective; price of anarchy; single machine scheduling; game theory; Pareto schedule