第 18 卷第 7 期
2015 年 7 月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 18 No. 7
Jul. 2015

含跳跃风险的公司贷款违约率测度①
——基于首达时模型的理论扩展

黄 苒[1]，唐齐鸣[2]
(1. 华中师范大学经济与工商管理学院，武汉 430079; 2. 华中科技大学经济学院，武汉 430074)

摘要: 在美国金融危机、欧债危机及国内各种突发事件的冲击下，我国各类公司均遭受了不同程度的损失，资产价值短时间内迅速下降，违约率急增. 而基于纯扩散过程的贷款违约率测度模型无法刻画公司资产价值的这种跳跃风险. 考虑到无论何时公司资产价值只要低于违约门限便可能违约的特性，本文以贷款违约率首达时模型为基础，从理论上探讨了违约门限为常数及可变时，跳跃风险对贷款违约率的影响. 为了使该概率测度可用于实证研究，本文还重点分析了跳跃因素引入后公司资产结构的变化，导出了公司权益价值和资产价值间的非线性关系，并给出了违约概率参数的估计方法.

关键词: 公司贷款违约率; 首达时模型; 跳跃风险; 违约门限
中图分类号: F224 文献标识码: A 文章编号: 1007 - 9807(2015)07 - 0093 - 10

0 引 言

关于公司信用风险和贷款违约率的研究模型主要分为结构模型和简约模型. 简约模型是将违约视为一个不可预期的泊松过程，并通过违约发生的强度来估计违约概率. 简约模型的设定较为灵活，不以公司的价值为违约条件，但它的缺点是无法解释公司违约背后的经济原因. 结构模型则将公司违约风险同公司资产价值相关联，并对公司资产价值及资产负债结构进行分析，把违约过程描述为公司价值恶化的直接结果. 结构模型建模的一个重要基础是期权定价理论，即把公司权益价值视为其资产价值的或有期权，从而可利用公司权益市场数据间接测度公司资产价值和违约风险. 结构模型从经济机制上探讨了公司发生违约的逻辑过程，其信息源具有数据广，结构丰富的特点，这是简约模型所不能比拟的. 所以，在实证研究中往往更推崇结构模型. 目前，国内基于结构模型的贷款违约率研究主要是对 Merton 系列模型的应用与拓展，其中又以对首达时模型的运用和再扩展最为广泛.

Merton [1] 将公司权益价值视为公司资产价值的欧式看涨期权，如果公司资产的市场价值在约定时点降至违约门限($D, D \leqslant K$) 之下时，公司对债务人发生违约. 但该模型默认的一种情况是: 即使公司资产价值在约定时点以前已低于应偿债务(甚至变为零)，只要它在约定时点处高于应偿债务，都不被认为违约. 这与事实显然不符.

Black 和 Cox [2] 则认为从当前开始到约定时点，公司价值随时可能降至违约门限以下而引发违约. 因此，应该在公司违约问题中引入一个安全契约，以保证公司价值一旦降至某个事先约定的水平，公司资产便全部移交给债权人. 这就是著名的首达时模型. 该模型是对 Merton 模型的扩展，考虑了违约既可能在约定时点发生，也可能在此之前发生的特性，所以也更接近现实世界中的实际情况. 但该模型的分析以及后续一些以首达时

① 收稿日期: 2012 - 10 - 31; 修订日期: 2014 - 08 - 01.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71201068); 华中师范大学青年教师创新资助项目(20205130023).
作者简介: 黄 苒(1978—)，女，湖北武汉人，博士，讲师，硕士生导师. Email: ccnu_hr@163.com

模型为基础所进行的扩展性研究(如 Zhou[3]、Fouque 等[4]、冯谦和杨朝军[5]及任学敏和边保军[6]等),仍假定资产价值变化符合纯扩散过程,已与现实情况越来越不一致.

尤其是上世纪九十年代以来,亚洲金融危机、美国金融危机、欧债危机以及暴雨、雪灾、地震等突发事件给中国及其他许多国家带来巨大冲击,进一步加深了各国金融市场的不稳定性,资产收益的正常波动和异常跳跃的双重性越来越凸显. Delianedis 和 Geske[7]发现亚洲金融危机前,公司债券的价格变化过程中跳跃现象偶有发生,但是危机中及危机后,异常跳跃显著增加. Eraker 等[8]发现金融危机后,美国股票市场的大幅波动从大约 20% 跳至 50%,而一旦到达这样一个高的水平后,波动均值需要经过一段时间后才能慢慢的再次回归到它的长期水平,也即波动中的跳跃因素对收益分布产生了持续的影响. Daal 等[9]则认为与美国等发达金融市场相比,中国、印度、泰国以及菲律宾等新兴金融市场由于制度和市场发展的不完善,更容易受到外部突发事件的冲击,其各类金融资产收益在金融危机时段呈现出更明显的跳跃特征. 唐齐鸣和黄苒[10]在研究中国上市公司违约风险时,对中国上市公司从 2002 年—2009 年股票收益率时间序列数据进行了分析,发现几乎所有样本公司的股票收益率在 2007 年全球金融危机、2008 年雪灾和地震期间都明显出现了不同于其他时段的大幅跳跃.

资产收益的大幅跳跃会使得公司资产价值瞬间偏离原有的扩散运动轨迹,违约风险在短时间内迅速变化. 虽然随着资产收益的新一轮平滑运动,违约风险会逐渐回归到某一均值水平,但耗时较长,且违约风险的均值水平也将发生明显改变. 因此,违约风险度量模型还应对跳跃变化予以关注,明确跳跃因素对公司违约风险及整体风险的影响. 放松资产价值变化符合纯扩散过程的假定,在纯扩散型违约风险度量模型中引入跳跃因素,将有助于提高风险度量的准确性,降低预测偏误. Das[11]认为跳跃过程能够捕捉到高斯扩散模型无法刻画的金融资产价格变化特征,他通过研究发现将跳跃过程引入到高斯扩散模型中会显著改善模型的拟合能力. Kiesel 和 Scherer[12]认为,和纯扩散模型相比,考虑了资产收益跳跃变化的信用风险模型能对贷款、债券、信用互换等金融工具的信用利差作出更合理的解释. Cremers 等[13,14]在研究公司债券违约利差时,发现现有的扩散型信用结构模型基本上都只能解释 20% –30% 的实测信用利差,通过引入跳跃风险溢酬能够使预测的信用利差更加接近实际的利差水平,而且跳跃因素的引入也有助于改善对信用利差波动和股票收益率波动的拟合度. Tang 和 Yan[15]也认为跳跃因素在违约分析中十分重要,考虑了跳跃因素后的信用模型能更好的解释信用利差的变化. 唐齐鸣和黄苒[10]在研究中发现当公司资产价值变化过程中存在跳跃现象时,采用纯扩散模型会低估公司的违约风险. 许友传和陈可桢[16]的研究则表明分析资产价值变化时,若不嵌入跳跃过程,可能严重低估地方债务的信用风险.

尽管近年来也有些研究关注了跳跃风险对公司违约率的影响[12,17–21],但总的来看,这些研究仍存在以下不足: 基于 Merton 模型的扩展研究,显然没有考虑公司在约定时点前也可能违约的特性; 基于首达时模型扩展的研究虽然考虑了公司在约定时点前可能违约的特性,也分析了跳跃因素对违约风险的影响,但模型相当复杂,甚至需要借助拉普拉斯变换或特殊算法才能求出模型的近似解. 更重要的是,这些模型隐含的假设前提是"公司总资产价值可以直接观测和度量". 模型过于复杂以及公司总资产价值无法被直接观测的事实,使得这些理论模型很难在实证中得以运用.

鉴于此,在将跳跃因素引入到首达时模型中时,本文试图构建一套从"权益资产价值变化"到"总资产价值变化"再到"违约风险测度"的违约风险度量方法. 该方法具有理论与实证相结合的特点,可用于贷款及债券等金融产品违约率的实证研究. 关于该方法的讨论将按如下顺序展开: 首先,从理论上对公司资产价值负向跳跃所引发的违约率变化进行测度; 随后,分析跳跃因素引入后公司资产结构变化,并导出公司权益价值和资产价值的非线性关系; 然后,利用公司权益市场的数据信息来间接估计公司资产价值和违约率相关参数. 最后,放松违约门限为常数的假定,分析违约门限可变时公司资产价值的跳跃变化对违约率的影响.

1　基于含跳跃风险首达时模型的违约率

Black 和 Cox 的首达时模型将公司资产价值变化视为一个随机过程，当该过程首次通过某个预先确定的界限时，“违约”即被触发[2]．首达时模型的核心内容包括两个方面: 1) 公司违约的定义: ①在约定时点 T，若公司资产价值降至总债务面值(K)以下时，公司权益价值为零．若公司资产价值比约定违约门限(D，$D\leqslant K$)还要小时，公司便发生违约，债务人仅能获得相当于公司资产价值的债务偿付．②在约定时间段(t，T)内，只要公司资产价值降至约定的违约门限(D，$D\leqslant K$)以下时，公司便发生违约，公司权益价值为零．债务人能获得的债务偿付等于违约时的公司资产价值．2) 将公司权益视为公司资产价值的障碍期权(向下敲出的欧式看涨期权)．因此，利用公司权益的数据信息可以间接估量公司资产价值及其违约率．由于首达时模型比原始的 Merton 模型更接近现实世界中公司违约的特性，本文后续分析将在首达时模型理论框架下展开．

1.1　公司资产价值的随机跳—扩散过程

假设公司融资结构仅包括银行贷款(K)和权益资产(S)，银行贷款和权益资产的市场价值共同构成公司的资产价值(A)．现假定资产价值 A 符合下述跳－扩散过程[10,22]

$$\frac{\mathrm{d}A_t}{A_t}=(\mu_A-\lambda_A(J_A-1))\mathrm{d}t+\sigma_A\mathrm{d}B_t+(J_A-1)\mathrm{d}N_t \tag{1}$$

其中 μ_A 为资产的期望收益率，σ_A 为资产价值未发生跳跃时的波动率，它们均为常数; B_t 为实际概率测度 P 下的标准布朗运动; N_t 服从参数为 λ_A 的泊松过程，用以描述资产价值的随机跳跃，其中 λ_A 为常数，即 $P(N_t=n)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_A t}(\lambda_A t)^n}{n!}(n=0,1,2\cdots)$; $J_A-1(0<J_A<1)$ 为资产价值发生跳跃时的变化率; B_t 和 N_t 相互独立．

根据半鞅的随机指数定理[23]知式(1)存在唯一的闭式解

$$A_T=A_t(J_A)^{N_{T-t}}\exp((\mu_A-\frac{1}{2}\sigma_A^2-\lambda_A\times(J_A-1))(T-t)+\sigma_A(B_T-B_t)) \tag{2}$$

由于布朗运动具有马尔科夫性，为了简化计算可令 $t=0$，$A_t=A_0$，$B_t=B_0=0$．因此，上式简化为

$$A_T=A_0(J_A)^{N_T}\exp((\mu_A-\frac{1}{2}\sigma_A^2-\lambda_A(J_A-1))T+\sigma_A B_T) \tag{3}$$

1.2　首达时模型框架下含跳跃风险的违约概率

在首达时模型框架下，假定在约定时间段 $(0,T)$ 内或在约定时点 T 上，只要公司资产价值降至约定的违约门限(D，$D\leqslant K$)以下时，公司便发生违约．

现令 $\tau_D^A=\inf\{u>t,A_u=D\}$ 为公司资产价值首次到达违约门限 D 的时间($D<A_0$ 且 $D<K$，K 为贷款总额)，因此 $\tau_D^A>T$ 表示在所考察时间区间内公司“未违约”．

再令 $m^A(T)=\min\limits_{0\leqslant u\leqslant T}((\mu_A-\frac{1}{2}\sigma_A^2-\lambda_A(J_A-1))u+\sigma_A B_u)$，显然有

$$A_0(J_A)^{N_T}\exp(m^A(T))>D\Leftrightarrow\tau_D^A>T \tag{4}$$

那么，公司发生“违约”的概率为②

$$\begin{aligned}P(\tau_D^A\leqslant T)&=1-P(\tau_D^A>T)\\&=1-\sum_{n=0}^{+\infty}P(N_T=n)\cdot\Phi\left(\frac{-\ln\frac{D}{A_0(J_A)^n}+(\mu_A-\frac{1}{2}\sigma_A^2-\lambda_A(J_A-1))T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right)+\\&\sum_{n=0}^{+\infty}P(N_T=n)\cdot\left(\frac{D}{A_0(J_A)^n}\right)^{\frac{2(\mu_A-\frac{1}{2}\sigma_A^2-\lambda_A(J_A-1))}{\sigma_A^2}}\cdot\Phi\left(\frac{\ln\frac{D}{A_0(J_A)^n}+(\mu_A-\frac{1}{2}\sigma_A^2-\lambda_A(J_A-1))T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

---

② 详细推导过程见附录 A.

2 公司资产结构分析和参数估计

由于公司资产价值本身不可观测，估计公司违约概率中的相关参数 A_0，λ_A，σ_A，J_A 和 μ_A 时，还需找到间接度量公司资产价值的方法. 首达时模型的另一个重要内容就是将公司权益视为公司资产价值的障碍期权(向下敲出的欧式看涨期权)，利用这一非线性关系便可间接估量不可观测的资产价值变化. 本文也延续这种分析思路，先导出公司权益价值和公司资产价值之间的非线性期权关系，再将之用于违约概率的参数估计.

现将"公司权益价值"视为"公司资产价值"的"含跳跃的向下敲出的欧式看涨期权". 为了在无套利条件下导出该期权定价公式，需要先找到实际概率测度 P 的等价鞅测度 Q(风险中性测度)，并求出公司资产在等价鞅测度 Q 下的随机微分方程形式.

现令 $Y=\dfrac{\mu_A-r}{\sigma_A}$($r$ 为无风险利率)，在 μ_A 和 σ_A 为常数的情况下，根据布朗运动的特性知道 $\Lambda=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\exp\left(-\int_t^T Y\mathrm{d}B_u-\dfrac{1}{2}\int_t^T (Y)^2\mathrm{d}u\right)$ 是一个鞅. 再根据 Girsanov 定理[23]，测度 Q 是实际概率测度 P 的等价鞅测度，且 $\mathrm{d}W_t=\mathrm{d}B_t+\dfrac{\mu_A-r}{\sigma_A}\mathrm{d}t$ 为测度 Q 下的标准布朗运动. 故作等价鞅测度变换，在 Q 测度下式(1)变形为

$$\frac{\mathrm{d}A_t}{A_t}=(r-\lambda_A J_A)\mathrm{d}t+\sigma_A\mathrm{d}W_t+(J_A-1)\mathrm{d}N_t \tag{6}$$

为了后续推导便利，再作测度变换以简化 A_T 表达式. 令 $H=\dfrac{r-\lambda_A(J_A-1)-\frac{1}{2}\sigma_A^2}{\sigma_A}$，作测度变换 $\Lambda^*=\dfrac{\mathrm{d}Q^*}{\mathrm{d}Q}=\exp\left(-\int_t^T H\mathrm{d}B_u-\dfrac{1}{2}\int_t^T (H)^2\mathrm{d}u\right)$. 仍由 Girsanov 定理知，$\mathrm{d}W_t^*=\mathrm{d}W_t+\dfrac{r-\lambda_A(J_A-1)-\frac{1}{2}\sigma_A^2}{\sigma_A}\mathrm{d}t$ 为测度 Q^* 下的标准布朗运动，故在测度 Q^* 下式(6)变形为

$$\frac{\mathrm{d}A_t}{A_t}=\frac{1}{2}\sigma_A^2\mathrm{d}t+\sigma_A\mathrm{d}W_t^*+(J_A-1)\mathrm{d}N_t \tag{7}$$

解上述随机微分方程得

$$A_T=A_t\exp(\sigma_A(W_T^*-W_t^*)+N_{T-t}\cdot\ln J_A) \tag{8}$$

由于布朗运动具有马尔科夫性，为了简化计算仍令 $t=0$，$A_t=A_0$，$W_t^*=W_0^*=0$，则式(8)简化为

$$\begin{aligned}A_T&=A_t\exp(\sigma_A W_T^*+N_{T-t}\cdot\ln J_A)\\&=A_0(J_A)^{N_T}\exp(\sigma_A W_T^*)\end{aligned} \tag{9}$$

将"公司权益价值"视为"公司资产价值"的"含跳跃的向下敲出的欧式看涨期权"，总贷款额 K 则视为该期权执行价格. 若在约定时点 T，公司资产价值小于总贷款额 K，或在 $(0,T)$ 内，公司资产价值降至违约门限 D 以下，该期权价值都将为零. 因此有③

$$\begin{aligned}S_0&=f(A_0,t)=E^Q(\mathrm{e}^{-rT}(A_T-K)^+\cdot I_{(\tau_D>T)})\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_A T}(\lambda_A T)^n}{n!}\left(\mathrm{e}^{-rT-\frac{1}{2}H^2T}\int_a^{+\infty}\int_b^0(A_0(J_A)^n\mathrm{e}^{(\sigma_A+H)x}-K\mathrm{e}^{Hx})\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{x-2y}{T^{3/2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(x-2y)^2}{2T}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\&=K\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_A T}(\lambda_A T)^n}{n!}(\mathrm{I}_1-\mathrm{II}_1)-A_0\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_A T}(\lambda_A T)^n}{n!}(J_A)^n(\mathrm{III}_1-\mathrm{IV}_1)\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $a=\dfrac{\ln\dfrac{K}{A_0}-n\ln J}{\sigma_A}$，$b=\dfrac{\ln\dfrac{D}{A_0}-n\ln J}{\sigma_A}$，$H=\dfrac{r-\lambda_A(J_A-1)-\frac{1}{2}\sigma_A^2}{\sigma_A}$

$\mathrm{I}_1=\mathrm{e}^{-rT+2Hb}\Phi\left(\dfrac{2b+HT-a}{\sqrt{T}}\right)$，$\mathrm{II}_1=\mathrm{e}^{-rT}\Phi\left(\dfrac{HT-a}{\sqrt{T}}\right)$，

$\mathrm{III}_1=\mathrm{e}^{-rT+(H\sigma_A+\frac{1}{2}\sigma_A^2)T+2(H+\sigma_A)b}\Phi\left(\dfrac{2b+(H+\sigma_A)T-a}{\sqrt{T}}\right)$，

③ 详细推导过程见附录 B.

$\mathrm{IV}_1 = e^{-rT+(H\sigma_A+\frac{1}{2}\sigma_A^2)T}\Phi(\frac{(H+\sigma_A)T-a}{\sqrt{T}})$，$\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数.

另一方面，由于不存在无风险套利，利用 Ito 公式对 $S_0 = f(A_0, t)$ 进行变换可得

$$\sigma_S = \frac{A_t}{S_t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial A_t}\cdot\sigma_A = \frac{A_0}{S_0}\cdot\sigma_A\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_A T}(\lambda_A T)^n}{n!}(J_A)^n(\mathrm{III}_1-\mathrm{IV}_1) \tag{11}$$

此外，根据 Leland[24] 实证研究有 $\mu_A = \mu_S\times\frac{S_0}{A_0}$.

上述方程中的 S_0 为当前权益资产价值，σ_S 为权益资产价值未发生跳跃时的波动率，μ_S 为权益资产价值期望收益率，这些参数均可利用权益市场数据进行估计.

然后，通过公司权益价值和资产价值之间的多个非线性关系方程就可以推导资产价值变化的相关参数 A_0，λ_A，σ_A，J_A 和 μ_A. 当然，在只有三个方程的情况下 A_0，λ_A，σ_A，J_A 和 μ_A 的估计值并不唯一. 因此，在实证研究中可以采取 Vassalou 和 Xing[25] 推荐的程序迭代法从这几个方程中求出相关参数估计值; 亦或增加一些约束条件，如: 假设公司资产价值的跳跃变化和权益资产价值的跳跃变化具有类似的跳跃频率: $\lambda_S = \lambda_A$; 公司资产价值的跳跃幅度和权益资产价值的跳跃幅度之间的关系和它们的价值大小成反比 $\frac{J_A}{J_S} = \frac{S_0}{A_0}$.

3　含跳跃风险且违约门限可变时的违约率测度

前述分析的一个重要假设前提是“固定的违约门限”，但“固定的违约门限”往往不能反映公司经济状况和负债结构随时间、利率政策、税收政策等变化所发生的调整. 现考虑放松该假设条件，允许违约门限 D_t 随时间发生变化.

根据现有文献的研究成果，本文假定违约门限的变化方式有两种: 第一种是根据 Zhou[22] 的相关研究，将违约门限的变化过程设定为指数模型; 另一种是借鉴 Leland 和 Toft[26] 的研究，既考虑违约边界的内生变化，也兼顾利息、税率、无风险利率等因素对违约边界的外部影响.

3.1　符合指数变化的违约门限

根据 Zhou[22] 的研究，预期需偿还债务通常符合含时间 t 的指数模型，所以可以用这种模型来描述违约门限的变化. 假设 $D_T = e^{\phi(T-t)}D_t$（D_t 为 t 时的违约门限且 $D_t\leqslant K$，K 为债务总面值），其中 ϕ 为变化率，它决定了违约门限与时间的关系. 当 ϕ 取负值时，考察时间区间 $(T-t)$ 越长，事前约定的违约门限越小. 当 ϕ 取正值时，考察时间区间 $(T-t)$ 越长，事前约定的违约门限越大. 但是 ϕ 的取值必须满足 $D_T\leqslant K$，即 $\phi\leqslant(\ln K-\ln D_t)/(T-t)$.

因此，当违约门限 D_T 可以随时间发生变化时，公司违约的概率为④

$$\begin{aligned}P(\tau_{D_T}\leqslant T) &= 1-P(\tau_{D_T}>T)\\ &= 1-\sum_{n=0}^{+\infty}P(N_T=n)\cdot\Phi\left(\frac{-\ln\frac{D_0}{A_0(J_A)^n}+(\mu_A+\phi-\frac{1}{2}\sigma_A^2-\lambda_A(J_A-1))T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right)+\\ &\quad\sum_{n=0}^{+\infty}P(N_T=n)\cdot\left(\frac{e^{\phi T}D_0}{A_0(J_A)^n}\right)^{\frac{2(\mu_A-\frac{1}{2}\sigma_A^2-\lambda_A(J_A-1))}{\sigma_A^2}}\cdot\Phi\left(\frac{\ln\frac{D_0}{A_0(J_A)^n}+(\mu_A+\phi-\frac{1}{2}\sigma_A^2-\lambda_A(J_A-1))T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

另一方面，公司权益和公司资产价值之间的非线性期权关系变为

$$S_0 = f(A_0,t) = K\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_A T}(\lambda_A T)^n}{n!}(\mathrm{I}_2-\mathrm{II}_2)-A_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_A T}(\lambda_A T)^n}{n!}(J_A)^n(\mathrm{III}_2-\mathrm{IV}_2) \tag{13}$$

其中 A_0 仍为 0 时的资产价值，K 仍表示公司总债务面值

④　详细推导过程见附录 C.

$$\mathrm{I}_2 = e^{-rT + \frac{2H\phi}{\sigma_A}T + 2Hb}\Phi\left(\frac{2b + \left(H - \frac{\phi}{\sigma_A}\right)T - a}{\sqrt{T}}\right),$$

$$\mathrm{II}_2 = e^{-rT}\Phi\left(\frac{HT - a}{\sqrt{T}}\right)$$

$$\mathrm{III}_2 = e^{-rT + \left(H\sigma_A + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)T + 2(H+\sigma_A)\left(b + \frac{\phi}{\sigma_A}T\right)} \times \Phi\left(\frac{2b + \left(H + \sigma_A - \frac{\phi}{\sigma_A}\right)T - a}{\sqrt{T}}\right)$$

$$\mathrm{IV}_2 = e^{-rT + \left(H\sigma_A + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)T}\Phi\left(\frac{(H + \sigma_A)T - a}{\sqrt{T}}\right)$$

其中 $H = \dfrac{r - \lambda_A(J_A - 1) - \frac{1}{2}\sigma_A^2}{\sigma_A}$，$a = \dfrac{\ln\frac{K}{A_0} - n\ln J}{\sigma_A}$

及 $b = \dfrac{\ln\frac{D}{A_0} - n\ln J}{\sigma_A}$

而利用 Ito 公式可知，公司权益价值波动率和公司资产价值波动率之间的关系变为

$$\sigma_S = \frac{A_t}{S_t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial A_t}\cdot\sigma_A = \frac{A_0}{S_0}\cdot\sigma_A \times \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_A T}(\lambda_A T)^n}{n!}(J_A)^n(\mathrm{III}_2 - \mathrm{IV}_2) \tag{14}$$

3.2 内生违约边界

根据 Leland 和 Toft 的研究[26]，违约边界的变化既可能是内生的，也可能受到利息、税率及无风险利率的外部影响，因此，还可以假设违约边界的变化符合以下变化方式

$$D_{L-T} = \frac{(C/r)\left((A/rT) - B\right) - (A\cdot K)/(rT) - \omega Cx/r}{1 + \alpha x - (1-\alpha)B} \tag{15}$$

其中 C 表示利息，ω 表示税率，r 表示无风险利率，K 为总债务面值，

$$A = 2ae^{-rT}\Phi(a\sigma_A\sqrt{T}) - 2z\Phi(z\sigma_A\sqrt{T}) - \frac{2}{\sigma_A\sqrt{T}}\varphi(z\sigma_A\sqrt{T}) + \frac{2e^{-rT}}{\sigma_A\sqrt{T}}\varphi(a\sigma_A\sqrt{T}) + (z - a)$$

$$B = -\left(2z + \frac{2}{z\sigma_A^2\sqrt{T}}\right)\Phi(z\sigma_A\sqrt{T}) - \frac{2}{\sigma_A\sqrt{T}}\varphi(z\sigma_A\sqrt{T}) + \frac{1}{z\sigma_A^2 T} + (z - a)$$

$$a = \frac{(r - \sigma_A^2/2)}{\sigma_A^2}, z = \frac{\left((a\sigma_A^2)^2 + 2r\sigma_A^2\right)^{1/2}}{\sigma_A^2}, x = a + z.$$

$\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数，$\varphi(\cdot)$ 为标准正态概率密度函数.

在此违约边界假设下，公司发生违约的概率为

$$P(\tau_D \leqslant T) = 1 - P(\tau_D > T)$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty}P(N_T = n)\cdot\Phi\left(\frac{-\ln\frac{D_{L-T}}{A_0(J_A)^n} + \left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1)\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right) +$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}P(N_T = n)\cdot\left(\frac{D_{L-T}}{A_0(J_A)^n}\right)^{\frac{2\left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1)\right)}{\sigma_A^2}}\cdot\Phi\left(\frac{\ln\frac{D_{L-T}}{A_0(J_A)^n} + \left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1)\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right) \tag{16}$$

4 结束语

随着我国金融市场与国际金融市场的融合程度越来越高，类似于美国金融危机和欧债危机的突发事件都将会对中国金融市场和各类公司造成较大的冲击. 同时，国内一些突发事件，如地震、雪灾等，也会使得各类资产的市场价值出现异常波动，公司的权益价值和资产价值短时间内迅速下降，尤其是规模较小的中小型公司的资产价值甚至会降至违约门限以下，其贷款违约概率和违约风险急剧增加. 这一特征是基于纯扩散过程的各类贷款违约概率测度模型所无法刻画的.

本文在首达时模型的基础上，对公司资产价值负向跳跃所引发的违约率变化进行了测度，并重点分析了跳跃因素引入后公司资产结构变化，导出了公司权益价值和资产价值的非线性关系，使得公司资产价值和公司违约概率可通过公司权益市场的数据信息来间接度量和确定. 该模型考虑了无论何时公司的价值只要

低于违约门限便可能发生违约的特性,既纳入了跳跃风险对公司违约概率的影响,也克服了现有模型过于复杂,难以应用于实证的缺点. 在完成基本模型的构建和分析后,本文还考虑了公司负债结构会随时间发生变化的特点,进一步讨论了违约门限可变时公司资产价值的跳跃变化对违约概率的影响.

在首达时模型中引入跳跃因子,考虑跳跃因素对违约风险的影响,将有助于对含有违约风险的金融资产更加合理的定价. 从"权益资产价值变化"到"总资产价值变化"再到"违约风险测度"的研究方法,也将有助于构建信用风险动态管理工具,使风险管理者可运用市场数据实时管理公司贷款或债券违约风险,监控公司资产价值跳跃变化对违约风险的影响,及时调整对公司违约风险的评估.

参 考 文 献:

[1] Merton R C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates [J]. Journal of Finance, 1974, 29(2): 449-470.

[2] Black F, Cox J C. Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions [J]. Journal of Finance, 1976, 31(2): 351-367.

[3] Zhou C S. An analysis of default correlations and multiple defaults [J]. Review of Financial Studies, 2001a, 14(2): 555-576.

[4] Fouque J P, Wignall B C, Zhou X. Modeling correlated defaults: First passage model under stochastic volatility [J]. Journal of Computational Finance, 2008, 11(3): 43-78.

[5] 冯　谦, 杨朝军. 具有债务减免设计的信用敏感型证券定价 [J]. 上海交通大学学报, 2006, 40(9): 1596-1599.
Feng Qian, Yang Zhaojun. Pricing the credit sensitive securities with debt-relief mechanic [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2006, 40(9): 1596-1599. (in Chinese)

[6] 任学敏, 边保军. 欧式信用价差期权的定价 [J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2010, 38(9): 1392-1396.
Ren Xuemin, Bian Baojun. Pricing European style credit spread option [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2010, 38(9): 1392-1396. (in Chinese)

[7] Delianedis R, Geske R. The components of corporate credit spreads: Default, recovery, tax, jumps, liquidity and market factors [R]. Los Angeles: UCLA, Anderson Graduate School of Management, 2001.

[8] Eraker B, Johannes M, Polson N. The impact of jumps in volatility and returns [J]. Journal of Finance, 2003, 58(3): 1269-1300.

[9] Daal E, Naka A, Yu J S. Volatility clustering, leverage effects and jump dynamics in the US and emerging Asian equity markets [J]. Journal of Banking & Finance, 2007, 31(9): 2751-2769.

[10] 唐齐鸣, 黄　苒. 中国上市公司违约风险的测度与分析——跳一扩散模型的应用 [J]. 数量经济技术经济研究, 2010, (10): 101-115.
Tang Qiming, Huang Ran. Jump-diffusion model based on default risk measurement and analysis for listed company in China [J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 2010, (10): 101-115. (in Chinese)

[11] Das S R. The surprise element: Jumps in interest rate [J]. Journal of Econometrics, 2002, 106(1): 27-65.

[12] Kiesel R, Scherer M. Dynamic credit portfolio modelling in structural models with jumps [R]. Ulm: University of Ulm, 2007.

[13] Cremers M, Driessen J, Maenhout P. Explaining the level of credit spreads-option-implied jump risk premia in a firm value model [J]. The Review of Financial Studies, 2008a, 21(5): 2209-2242.

[14] Cremers M, Driessen J, Maenhout P. Individual stock-option prices and credit spreads [J]. Journal of Banking & Finance, 2008b, 32(12): 2706-2715.

[15] Tang D Y, Yan H. Market conditions, default risk and credit spreads [J]. Journal of Banking and Finance, 2010, 34(4): 743-753.

[16] 许友传，陈可桢. 资产跳跃情景下的地方融资平台风险压力测试[J]. 财经研究，2013，39(2)：26－36.
Xu Youchuan，Chen Kezhen. Stress test of credit risk for local financing platforms under the jumps in asset values[J]. Journal of Finance and Economics，2013，39(2)：26－36. (in Chinese)
[17] Kou S G，Wang H. First passage time of a jump diffusion process[J]. Advances in Applied Probability，2003，35(2)：504－531.
[18] Kou S G，Wang H. Option pricing under a double exponential jump diffusion model[J]. Management Science，2004，50(9)：1178－1192.
[19] 乌 画，等. 基于多元随机波动模型的信用风险衍生定价[J]. 管理科学学报，2010，13(10)：55－62.
Wu Hua，et al. Pricing credit risk with multivariate stochastic volatility model[J]. Journal of Management Sciences in China，2010，13(10)：55－62. (in Chinese)
[20] 张洪祥，毛志忠. 基于多维时间序列的灰色模糊信用评价研究[J]. 管理科学学报，2011，14(1)：28－37.
Zhang Hongxiang，Mao Zhizhong. Research of multidimensional time series credit evaluation based on gray-fuzz analysis model[J]. Journal of Management Sciences in China，2011，14(1)：28－37. (in Chinese)
[21] 柳卫静，等. 基于双指数跳扩散过程的公司债券定价[J]. 经济数学，2011，28(1)：77－80.
Liu Weijing，et al. Pricing corporate bonds based on a double exponential jump-diffusion process[J]. Mathematics in Economics，2011，28(1)：77－80. (in Chinese)
[22] Zhou C S. The term structure of credit spreads with jump risk[J]. Journal of Banking and Finance，2001b，25(11)：2015－2040.
[23] Klebaner F C. Introduction to Stochastic Calculus with Applications[M]. Second Edition. London：Imperial College Press，2005：21－112；211－236；267－285.
[24] Leland H E. Predictions of Default Probabilities in Structural Models of Debt[C]//The Credit Market Handbook：Advanced Modeling Issues. Hoboken，New Jersey：John Wiley & Sons Inc，2006：39－63.
[25] Vassalou M，Xing Y H. Default risk in equity returns[J]. Journal of Finance，2004，59(2)：831－868.
[26] Leland H E，Toft K B. Optimal capital structure，endogenous bankruptcy，and the term structure of credit spreads[J]. Journal of Finance，1996，51(3)：987－1019.

Assessing default rate of corporate loan in the first-passage time model with jump risk

HUANG Ran[1]，*TANG Qi-ming*[2]
1. School of Economics and Business Administration，Central China Normal University，Wuhan 430079，China；
2. School of Economics，Huazhong University of Science and Technology，Wuhan 430074，China

Abstract: Recently，Chinese corporations are constantly disturbed by external and internal unexpected events，such as US financial crisis，European debt crisis，snow disasters and earthquakes，which make the asset values plummet in a short time and thus cause the high default rates of corporate loans. Obviously，the existing diffusion-process based default models can not illustrate this kind of jump risk. This paper tries to introduce the jump factor into the First-Passage time model and discusses how jump risk impacts on corporate default rates when the default threshold keeps constant or changes. In addition，this paper analyzes the asset structure of corporations，derives the non-linear relation between equity value and asset value and provides the methods estimating the parameters in the model.

Key words: default rate of corporate loan；first-passage time model；jump risk；default threshold

附录 A:

第 1 节中求“公司违约概率”的推导过程.

因为公司“未违约”的概率是

$$
\begin{aligned}
P(\tau_D^A > T) &= P(A_0(J_A)^{N_T}\exp(m^A(T)) > D) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n)\cdot P(A_0(J_A)^n\exp(m^A(T)) > D \mid N_T = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n)\cdot P(\min_{0\leqslant u\leqslant T}((\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))u + \sigma_A B_u) > \ln\frac{D}{A_0} - n\ln J_A) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n)\cdot \Phi(\frac{-\ln\frac{D}{A_0} + n\ln J_A + (\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))T}{\sigma_A\sqrt{T}}) - \\
&\quad \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n)\cdot e^{\frac{2(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A-1))}{\sigma_A^2}(\ln\frac{D}{A_0} - n\ln J_A)}\cdot \Phi(\frac{\ln\frac{D}{A_0} - n\ln J_A + (\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))T}{\sigma_A\sqrt{T}}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n)\cdot \Phi(\frac{-\ln\frac{D}{A_0(J_A)^n} + (\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))T}{\sigma_A\sqrt{T}}) - \\
&\quad \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n)\cdot (\frac{D}{A_0(J_A)^n})^{\frac{2(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A-1))}{\sigma_A^2}}\cdot \Phi(\frac{\ln\frac{D}{A_0(J_A)^n} + (\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))T}{\sigma_A\sqrt{T}}) \qquad (A1)
\end{aligned}
$$

因此,公司发生“违约”的概率为

$$
\begin{aligned}
P(\tau_D^A \leqslant T) &= 1 - P(\tau_D^A > T) \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n)\cdot \Phi(\frac{-\ln\frac{D}{A_0(J_A)^n} + (\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))T}{\sigma_A\sqrt{T}}) + \\
&\quad \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n)\cdot (\frac{D}{A_0(J_A)^n})^{\frac{2(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A-1))}{\sigma_A^2}}\cdot \Phi(\frac{\ln\frac{D}{A_0(J_A)^n} + (\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))T}{\sigma_A\sqrt{T}}) \qquad (A2)
\end{aligned}
$$

附录 B:

第 2 节中“公司权益价值”与“公司资产价值”之间的非线性期权关系的推导过程.

$$
\begin{aligned}
S_0 &= f(A_0, t) = E^Q(e^{-rT}(A_T - K)^+\cdot I_{(\tau_D > T)}) \\
&= E^{Q^*}(e^{-rT}\frac{(A_T - K)^+}{\Lambda^*}\cdot I_{(\tau_D > T)}) \\
&= E^{Q^*}(e^{-rT}\cdot e^{HW_T^* - \frac{1}{2}H^2T}(A_T - K)^+\cdot I_{(\tau_D > T)})\ (H = \frac{r - \lambda_A(J_A - 1) - \frac{1}{2}\sigma_A^2}{\sigma_A}) \\
&= e^{-rT - \frac{1}{2}H^2T}E^{Q^*}(e^{HW_T^*}(A_0(J_A)^{N_T}e^{\sigma_A W_T^*} - K)^+\cdot I_{(\tau_D > T)}) \\
&= e^{-rT - \frac{1}{2}H^2T}E(E^{Q^*}(e^{HW_T^*}(A_0(J_A)^n e^{\sigma_A W_T^*} - K)^+\cdot I_{(\tau_D > T)} \mid N_T = n)) \qquad (B1)
\end{aligned}
$$

令 $m^*(T) = \min_{0\leqslant u\leqslant T} W_u^*$ **,则** $A_0(J_A)^{N_T}\exp(\sigma_A m^*(T)) > D \Leftrightarrow \tau_D > T$. **现取** $a = \frac{\ln\frac{K}{A_0} - n\ln J}{\sigma_A}$, $b = \frac{\ln\frac{D}{A_0} - n\ln J}{\sigma_A}$ **,则式 (B1) 变形为**

$$
\begin{aligned}
S_0 &= f(A_0, t) = E^Q(e^{-rT}(A_T - K)^+\cdot I_{(\tau_D > T)}) \\
&= e^{-rT - \frac{1}{2}H^2T}E(E^{Q^*}(e^{HW_T^*}(A_0(J_A)^n e^{\sigma_A W_T^*} - K) : W_T^* > a, m^*(T) > b \mid N_T = n))\ (\text{令 } x = W_T^* \text{ 和 } y = m^*(T)) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_A T}(\lambda_A T)^n}{n!}(e^{-rT - \frac{1}{2}H^2T}\int_a^{+\infty}\int_b^0 (A_0(J_A)^n e^{(\sigma_A + H)x} - Ke^{Hx})\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{x - 2y}{T^{3/2}}\cdot e^{-\frac{(x-2y)^2}{2T}}dxdy)
\end{aligned}
$$

$$= K \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda_A T}(\lambda_A T)^n}{n!}(\mathrm{I}_1 - \mathrm{II}_1) - A_0 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda_A T}(\lambda_A T)^n}{n!}(J_A)^n(\mathrm{III}_1 - \mathrm{IV}_1) \tag{B2}$$

其中 $\mathrm{I}_1 = e^{-rT+2Hb}\Phi(\frac{2b + HT - a}{\sqrt{T}})$，$\mathrm{II}_1 = e^{-rT}\Phi(\frac{HT - a}{\sqrt{T}})$，

$\mathrm{III}_1 = e^{-rT+(H\sigma_A + \frac{1}{2}\sigma_A^2)T + 2(H+\sigma_A)b}\Phi(\frac{2b + (H + \sigma_A)T - a}{\sqrt{T}})$，

$\mathrm{IV}_1 = e^{-rT+(H\sigma_A + \frac{1}{2}\sigma_A^2)T}\Phi(\frac{(H + \sigma_A)T - a}{\sqrt{T}})$，$\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布.

附录 C:

第 3 节中求“公司违约概率”的推导过程.

为了简化表达式，此处令 $t = 0$. 因此，公司违约的概率为

$$\begin{aligned}
P(\tau_{D_T} \leqslant T) &= 1 - P(\tau_{D_T} > T) \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n) \cdot \Phi\left(\frac{-\ln \frac{e^{\phi T} D_0}{A_0 (J_A)^n} + (\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) + \\
&\quad \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n) \cdot \left(\frac{e^{\phi T} D_0}{A_0 (J_A)^n}\right)^{\frac{2(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))}{\sigma_A^2}} \cdot \Phi\left(\frac{\ln \frac{e^{\phi T} D_0}{A_0 (J_A)^n} + (\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n) \cdot \Phi\left(\frac{-\ln \frac{D_0}{A_0 (J_A)^n} + (\mu_A + \phi - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) + \\
&\quad \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_T = n) \cdot \left(\frac{e^{\phi T} D_0}{A_0 (J_A)^n}\right)^{\frac{2(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))}{\sigma_A^2}} \cdot \Phi\left(\frac{\ln \frac{D_0}{A_0 (J_A)^n} + (\mu_A + \phi - \frac{1}{2}\sigma_A^2 - \lambda_A(J_A - 1))T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right)
\end{aligned} \tag{C1}$$