异质信念、生存条件及市场影响力①

郑 敏

(中央财经大学中国精算研究院，北京 100081)

摘要: 通过构建异质信念下的资产定价模型，分析了异质信念对资产价格以及交易量的影响，并且给出了投资者在市场中的生存条件. 研究结果表明投资者对未来资产回报的预期越准确则对资产价格的影响越大，并可能最终占有整个市场而将其他投资者从市场中逐出. 但是这个选择过程是漫长的，当考虑短期投资定价问题时，异质信念是影响市场的重要因素，异质信念的存在是市场交易的基础，投资者财富和信念的变化影响着资产价格的变化，而此时如果只考虑预期较准确的投资者的作用，则有可能导致偏颇甚至错误的结论.

关键词: 异质信念; 市场生存; 资产定价; 交易量

中图分类号: F830.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007 - 9807(2015) 08 - 0073 - 10

0 引 言

完全理性和有效市场是传统金融理论中的核心假设. 在此假设下，非理性交易者会被理性交易者逐出市场，使得市场可以用一个典型代理人来代表. 此框架使得传统金融理论模型具有漂亮而简洁的结果，如(C) CAPM、APT、Black-Scholes 公式等等. 这种简洁也为实证分析、模型解释等提供了可操作性. 然而，在这样的框架下，金融市场中的许多异常现象无法得到满意的解释，包括巨额交易量、股票溢价、波动聚类、长期记忆、跟风、跟庄等等. Williams [1] 指出，要解决传统金融理论不能解释实际市场现象的问题需要放宽投资者具有同质性这一假设.

市场中的投资者实际具有很强的异质性. Frankel 和 Froot [2-3] 通过理论和实证分析，说明了多种类型的投资者(基本面分析者、技术分析者等) 存在于外汇市场中. Balduzzi 和 Yao [4] 通过对投资者消费积累的分析，检测了互异偏好对资产定价的重要性. 王凤荣和赵建 [5] 以我国股票市场的机构投资者信念为对象进行了实证研究，分析了市场中投资者的异质信念结构，得出我国股票市场存在着投资者信念与证券价格相互作用的结论. 在这样互异投资者存在的市场中，每个投资者是根据自己所获得的信息和经验做出对自己最佳的决策，因此不同投资者的最佳决策可能不同. 那么会问: 这些决策对市场价格有什么样的影响? 是否会有哪类投资者最终掌控整个市场而将其他投资者从市场中逐出?

对于互异投资者对市场的影响，在理论方面已经有了很多的研究结果，大体可以分成两个方向. 第一个方向是考虑投资者有相同的信息集，但是他们根据自己的经验会对相同的信息集有不同的诠释，被称为异质信念. 在这一思路下，异质信念对资产价格的影响已经得到了很好的研究，参见文献 [6 - 11] . 第二个方向是假设不同的投资者获得的信息有所不同，被称为异质信息. 投资者根据自己的信息和经验对未来市场的发展趋势给

① 收稿日期: 2013 - 03 - 28; 修订日期: 2013 - 12 - 27.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11101449; 11301562) ; 教育部人文社会科学重点研究基地基金资助项目(11JJD790004) ; 北京自然科学基金资助项目(9152016) ; 中央财经大学科研创新团队支持计划资助项目
作者简介: 郑 敏(1979—) ，女，山东郓城人，博士，副研究员，硕士生导师. Email: zhengm@ cufe-ins. sinanet. com

出自己的估计，进而做出对自己最佳的决策，参见文献[12-16]. 这一系列的研究说明投资者的互异性对资产价格的变化具有重要的影响. 在这一框架下建立起来的模型，能对金融市场中出现的异常现象给出很好的解释.

对于是否有某类投资者会掌控市场，不同的市场情况会有所不同. De Long，Shleifer 等[17]基于部分均衡模型，发现当非理性交易者对风险资产的回报方差持有不正确的估计时，他仍然可以通过持有回报率较高的投资组合，使得理性交易者最终被逐出市场. Sandroni[18]、Blume 和 Easley[19]在考虑持续消费的条件下，发现非理性消费者最终会被逐出市场，同时也不再影响市场价格. Kogan 等[8]在最优化最终消费的情况下，发现在含有理性消费者和非理性消费者的市场中，消费者是否能在市场中生存和其对价格的影响是相互独立的; 他们说明非理性消费者即使在他的财富可以被忽略的情况下，仍然可以对市场价格有重要的影响. Yan[20]考虑了纯交换经济，发现交易者是否能在市场中生存取决于他的生存指数(由交易者的预期精确度、耐心程度以及相对风险偏好系数决定) . 文献[20]指出只有生存指数较小的交易者才能在市场中生存并最终影响市场. Luo[21]考虑了在期货市场中的市场选择问题，并分析了保守投资者对市场有效性的影响. 张永杰[22]在存在两种投资品(即风险资产和无风险资产) 的市场中，通过世代交替的离散模型，解析地分析了套利限制、噪音交易者风险与特定系统性心理偏差三者共同作用下资产价格的动态特征; 并利用计算实验的方法研究了多种策略投资者的期望投资收益水平与投资绩效的关系. 可以看出现有的研究文献多侧重消费效用最大化(文献[17,20,21]除外) ，而忽略了财富积累对市场的影响. 另外文献[17,20,21]为离散模型，其中文献[20,21]假设投资者信念只能在有限个状态中相互转换，这不能反映投资者对实际市场信息的随时更新以及与市场的互动; 而文献[17]假设非理性交易者对风险资产的回报方差持有不正确的估计，但是根据文献[1]的结果，如果在数据充分多的情况下(特别是在连续时间下) ，交易者可以对回报方差做出精确的估计但是对回报的期望却不能估计准确. 那么会问如果考虑财富积累，并且交易数据足够多，而且投资者可以根据及时信息更新自己的信念，此时什么样的投资者在市场中能占有优势并影响市场价格? 这样的问题尚未看到研究成果，将是本文研究的重点.

本文在连续时间框架下，考虑投资者对回报的期望有不同的估计，在最大化财富的情况下研究均衡定价以及投资者的市场生存问题. 本文与已有的文献相比主要有两点不同. 一是本文不考虑消费而采用财富效用最大化. 这主要是出于两方面的考虑: 第 1，一般性的效用最大化问题主要分为消费效用最大化和财富效用最大化(见文献[23]) 两类. 消费效用最大化往往跟个人投资者或者单一投资代理人相联系，因为个人投资者主要关心当下的生活消费水平. 但是实际的证券市场中有 70% 左右的投资者是机构投资者②，如银行、保险公司、投资信托公司、国家或者团体设立的退休基金等组织. 他们的直接目的不是提高消费效用，而是积累财富. 因此从财富效用最大化的角度来推导风险资产的均衡价格更符合实际. 第 2，从财富效用最大化出发也适用于固定投资期限的风险资产投资，如股指债券(参见文献[25]) 等. 在这类情况下，投资者侧重的是投资到期日的收益而非消费水平. 综合这两点可以看到从财富效用最大化的角度出发，不仅对经济学的理论方面有意义而且有助于对一些实际问题的解决. 本文第二点不同之处是在均衡框架下，考虑的是连续的自我反馈系统，也即投资者的投资决策决定了市场价格，反过来市场价格又影响着投资者的决策. 在这样的系统中，讨论了投资者在市场中的生存条件，强调了异质信念对资产价格的影响. 因为自我反馈系统使得价格和投资决策的关系不是

② 根据文献[24]所提供的数据，美国截至 2010 年，机构投资者的持股比例大约在 67% . 和发达国家相比，我国机构投资者的持股比例仍偏低，截至 2012 年底，我国专业机构投资者持有流通 A 股市值比例为 17.4% . 证监会正在大力发展机构投资者，研究推出符合机构投资者需求的品种和交易方式，在推进产品和业务创新过程中，鼓励机构投资者先行先试.

很清晰,所以本文通过构建一个虚拟代理人使得互异投资者在整体经济中的地位变得清晰. 特别地,在对数效用函数下,显式地给出了市场均衡价格,分析了互异投资者对均衡价格及交易量的影响.

1　异质信念模型

考虑连续时间的完备市场,记其中的完备概率空间为 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$. 在此概率空间中存在一个 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 适应的 N 维标准布朗运动

$$W(t) = (W_1(t), W_2(t), \cdots, W_N(t))^{\mathrm{T}}$$

假设此市场有 $N+1$ 个资产,其中 1 个是无风险资产,资产回报率(即利率)为 $r(t)$(由市场均衡决定),也就是说它的价格过程满足 $\mathrm{d}S_0(t) = r(t)S_0(t)\mathrm{d}t$,且 $S_0(0) = 1$; 其余 N 个为风险资产,资产价格(由风险资产未来红利的贴现来确定③)满足如下的随机微分方程

$$\mathrm{d}S_i(t) = S_i(t)\left(\mu_i(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}\mathrm{d}W_j(t)\right),$$
$$S_i(0) > 0, i = 1, 2, \cdots, N$$

其中 $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \cdots, \mu_N(t))^{\mathrm{T}}$ 是风险资产的增值回报率; $\sigma(t) = \{\sigma_{ij}(t)\}_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ 是 $N\times N$ 的矩阵,代表了风险资产的波动. 假设 $\sigma(t)$ 和 $\sigma^{-1}(t)$ 几乎处处可逆且一致有界.

考虑市场中存在 H 类投资者,每类投资者 $h(h = 1, 2, \cdots, H)$ 在时刻 t 有相同的信息集 F_t,并且可以观察到风险资产的瞬时回报 $\mathrm{d}S_t$. 文献[1]研究表明投资者可以根据自己所获得的信息精确估计出风险资产的波动水平 $\sigma(t)$; 但是不能精确估计出风险资产实际的增值回报率 $\mu(t)$. 为此假设不同投资者对风险资产的实际回报率 $\mu(t)$ 的估计不同④,记投资者 h 对风险资产回报率的估计为 $\mu^{\mathrm{h}}(t)$,那么投资者 h 经风险调整的估计误差为 $\varepsilon^{\mathrm{h}}(t) = \sigma^{-1}(t)(\mu^{\mathrm{h}}(t) - \mu(t))$. ε^{h} 度量了投资者 h 相对于实际市场的信念偏差程度,假设其满足 Novikov 条件

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T(\varepsilon^{\mathrm{h}}(t))^2\mathrm{d}t\right)\right] < \infty$$

投资者 h 在信念偏差 ε^{h} 下对市场中的概率测度的理解变为 $\mathrm{d}Q^{\mathrm{h}} = Z^{\mathrm{h}}(T)\mathrm{d}\mathbf{P}$,其中 $Z^{\mathrm{h}}(T)(\geqslant 0)$ 是 Radon-Nikodym 导数⑤,满足 $\mathrm{d}Z^{\mathrm{h}}(t) = Z^{\mathrm{h}}(t)(\varepsilon^{\mathrm{h}}(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{d}W(t)$. 在这样的主观概率测度 Q^{h} 下,风险资产的价格服从如下的过程

$$\mathrm{d}S_i(t) = S_i(t)\left(\mu_i^{\mathrm{h}}(t)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}\mathrm{d}W_j^{\mathrm{h}}(t)\right),$$
$$S_i(0) > 0, i = 1, 2, \cdots, N$$

其中 $W^{\mathrm{h}}(t) = (W_1^{\mathrm{h}}(t), W_2^{\mathrm{h}}(t), \cdots, W_N^{\mathrm{h}}(t))^T$ 是概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geqslant 0}, Q^{\mathrm{h}})$ 中的 N 维标准布朗运动. 由此可见,原本具有回报率 $\mu(t)$ 的风险资产,在投资者 h 的眼中回报率就变成了 $\mu^{\mathrm{h}}(t)$. 投资者 h 所做的一切决定都将基于这个他认为对的回报率.

假设投资者 h 在时刻 t 持有第 i 个资产($i = 0, 1, 2, \cdots, N$)的头寸为 $K_i^{\mathrm{h}}(t)$ 股. 不考虑交易成本和消费,那么投资者 h 的自融资总财富 $X^{\mathrm{h}}(t)$ 满足

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X^{\mathrm{h}}(t) &= \mathrm{d}\sum_{i=0}^{N}K_i^{\mathrm{h}}(t)S_i(t)\\ &= [r(t)X^{\mathrm{h}}(t) + (\pi^{\mathrm{h}}(t))^T(\mu(t) - \\ &\quad r(t)\mathbf{1})]\mathrm{d}t + (\pi^{\mathrm{h}}(t))^T\sigma(t)\mathrm{d}W(t)\\ &= [r(t)X^{\mathrm{h}}(t) + (\pi^{\mathrm{h}}(t))^T(\mu^{\mathrm{h}}(t) - \\ &\quad r(t)\mathbf{1})]\mathrm{d}t + (\pi^{\mathrm{h}}(t))^T\sigma(t)\mathrm{d}W^{\mathrm{h}}(t),\end{aligned}$$
$$X^{\mathrm{h}}(0) = x_0^{\mathrm{h}} > 0 \tag{1}$$

③　假设风险资产的红利过程 $\{\mathrm{d}_t\}_{t\geqslant 0}$ 外生给定,而实际风险资产的价格由其红利过程和利率过程来确定(即用未来红利的贴现值作为风险资产的价格). 因此,在此假设下,确定了利率水平,就确定了无风险债券和风险资产的价格. 而风险资产的增值回报率就由红利过程和利率水平来决定.

④　Simon[2] 认为投资者不可能具有完全理性. 他认为,人类在经济的舞台上,面对众多选择和决定,但是人储存和处理资讯的能力却十分有限. 许多人想要依理性来行事,但却只具有有限的理性(bounded rationality). 因此他们努力消化庞大的资讯,但是因为没有能力深入了解所有的可能性,于是往往选择了还算"差强人意"的解决方案,而非新古典经济学家主张的"最佳"解决方案. 这类投资者被称为有限理性投资者,本文所谈到的投资者除非特别说明否则均指有限理性投资者.

⑤　投资者 $h(h = 1, 2, \cdots, H, c)$ 对风险资产回报率的估计 μ^{h} 与 ε^{h}(或者 Z^{h})一一对应,因此在本文中 μ^{h}、ε^{h} 或者 Z^{h} 均被称为投资者 h 的信念.

式中,I 为单位向量; $\pi_i^h(t) = K_i^h(t) S_i(t)$ 为投资者 h 投资在风险资产 $i(i = 1,2,\cdots,N)$ 上的财富; $\pi^h(t) = (\pi_1^h(t),\pi_2^h(t),\cdots,\pi_N^h(t))^T$ 为投资者 h 的投资组合.

假设投资期限为 T. 每位投资者在自己的信念意义下,想要最大化自己的最终财富效用函数 $E^h(U^h(X_T^h)) = E(Z_T^h U^h X_T^h)$,这里 $E^h(\cdot)$ 和 $E(\cdot)$ 是分别基于投资者 h 的主观概率测度 Q^h 和实际市场概率测度 P 下的期望. 那么投资者 h 的最优化问题可以表示为

$$\max_{\{\pi^h(t)\}_{t\in[0,T]}} E(Z_T^h U^h(X_T^h))$$

其中 $X^h(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 满足式(1).

其最优投资组合记为 $\{\hat{\pi}^h(t)\}_{t\in[0,T]}$,相对应的最优财富记为 $\{\hat{X}^h(t)\}_{t\in[0,T]}$. 假设无风险资产的供给为零,那么供需均衡满足

$$\pi^*(t) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{h=1}^{H}\hat{\pi}_i^h(t) = \sum_{h=1}^{H}\hat{X}^h(t) =: X^*(t),t \in [0,T] \tag{2}$$

由此可以得到市场的均衡利率水平.

从以上的模型框架可以看出,本文考虑的是自我反馈系统: 投资者的投资决策决定了市场价格,反过来市场价格又影响着投资者的决策. 以下将具体分析不同投资者的信念对此系统的影响和作用. 为了使模型的结果更清晰,假设 $N = 1$,即市场中只有 1 个风险资产和 1 个无风险资产,并且市场中的投资者均采用对数效用函数⑥. 进而投资者 h 的最优化问题可以表示为

$$\max_{\{\pi^h(t)\}_{t\in[0,T]}} E(Z_T^h \ln X_T^h)$$

其中

$$dX^h(t) = [r(t)X^h(t) + \pi^h(t)(\mu(t) - r(t))]dt + \pi^h(t)\sigma(t)dW(t), X^h(0) = x_0^h > 0$$

结合均衡条件(2),可以得到此市场的均衡利率水平为

$$r(t) = \mu(t) - \sigma(t)\left(\sigma(t) - \sum_{h=1}^{H}\frac{\hat{X}^h(t)}{X^*(t)}\varepsilon^h(t)\right)$$

2 生存状况分析

在以上的模型框架下,考虑了异质信念的存在,但是异质信念是否对市场有影响?不同的学者有着不同的看法. Friedman[27] 认为异质信念最终会消失,因为非理性投资者会一直输钱,最后被理性预期者逐出市场,所以非理性投资者对市场价格没有影响,最终市场只有理性预期者的存在,进而可以用一个理性代理人来描述整个市场,即自然选择成立. 在最优化最终消费的框架下研究了自然选择问题,他们发现理性消费者最终会将非理性消费者逐出市场但是非理性消费者对价格的影响依然存在. 在本文的模型框架下,投资者最大化最终财富而且市场中只有有限理性投资者,那么要问什么样的有限理性投资者可以在市场中生存并最终对市场有所影响?为了简化分析,考虑两个人(记为 A、B) 的经济.

首先给出投资者生存的定义.

定义 1 所谓投资者 h 被逐出市场是指

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\hat{X}_T^h}{\hat{X}_T^{h'}} = 0 \text{ a.s.} \tag{3}$$

这里 $h,h' = A,B$ 且 $h \neq h'$.

如果投资者没有被逐出市场,就称此类投资者可以在市场中生存.

在本文的模型框架下,可以得到如下结论⑦.

命题 1 假设市场中存在两类投资者,他们持有常数信念,即 $\varepsilon^h(h = A,B)$ 为常数. 那么当且仅当 $|\varepsilon^A| = |\varepsilon^B|$ 时,两类投资者都可以在市场中生存. 当 $|\varepsilon^A| \neq |\varepsilon^B|$ 时,只有一类投资者可以在市场中生存,特别地当且仅当 $|\varepsilon^A| > |\varepsilon^B|$ 时,投资者

⑥ 本文采用对数效用函数是为了简化模型,进而可以解析地分析投资者信念对资产价格的影响. 如果采用其他的效用函数,如指数效用函数或者均值 - 方差效用函数等,本文中的结论不一定成立(感谢评审指出此点),而且可能没有显示解. 在这样的情况下,可能需要采用数值的方法来进行求解. 数值的方法,一方面不够精确,另一方面也容易隐藏投资者信念与资产价格之间的相互关系,进而影响本文的初衷. 因此退而求其次,选用对数效用函数,通过显示解可以全面分析投资者的信念偏差对市场以及自己的财富积累的影响. 而对于更一般的效用函数,将作为未来的研究方向.

⑦ 此结论是在常数信念下给出的,对于一般的时时更新的信念,在此模型框架下也是可以研究的. 由于篇幅的限制,这里主要对常数信念的情况进行分析.

B 可以在市场中生存,此时投资者 A 不再影响市场价格,即

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\mu(t)-\sigma(t)(\sigma(t)-\varepsilon^{B}(t))}{r(t)}=1 \text{ a. s.} \tag{4}$$

从命题 1 可以看出,在本文的框架下,只有对风险资产回报有更精确估计的投资者才能在市场中生存⑧. 实际上,更精确的估计使得投资者获得更稳健的财富积累,进而可以在市场中生存. 这在一定程度上解释了为什么机构投资者要比散户赚钱,一个很重要的因素就是机构投资者能更全面地分析数据,所以他们能对风险资产有更精确的预期,进而赚钱更稳健. 另外,如式(4),当具有更精确估计的投资者或者说机构投资者赚得钱越来越多时,他们对市场价格的影响也会越来越大,进而操控了整个市场. 然而这种一家独大的市场是不健康的,因而加强对散户的教育,特别是普及挖掘市场中信息的技巧就显得很迫切. 只有改变散户的被动处境,才能更好地减少市场操控、完善市场机制、活跃市场环境.

通过以上分析看到市场选择了信念偏差偏小的投资者最终留在市场中,然而这种选择过程有多快是人们更关心的,因为如文献[20]所表明,只有这种选择过程足够快,异质信念对市场才会影响很小甚至是没有影响,进而可以用极限情况(即生存者的市场)来近似市场状态. 如果这种选择过程非常缓慢,虽然信念偏差较大的投资者最终被逐出市场,但是他们对市场价格的影响还是不能被忽略的. 因此,下面要分析在本文的模型框架下,信念偏差较小的投资者多快能将信念偏差较大的投资者逐出市场.

用投资者 A 被逐出市场的情形(即 $|\varepsilon^{A}|>|\varepsilon^{B}|$)来进行说明. 为了消除初始财富的影响,假设投资者 A 和 B 在时刻 0 拥有相同的财富. 对于对数效用函数,不难计算投资者的最优财富比为

$$\frac{\hat{X}_t^{A}}{\hat{X}_t^{B}}=\exp\left\{-\frac{(\varepsilon^{A})^2-(\varepsilon^{B})^2}{2}t+(\varepsilon^{A}-\varepsilon^{B})W_t\right\} \tag{5}$$

可以看出,此财富比以指数速度收敛,似乎可以说此财富比收敛速度足够快. 但是如果考虑此财富比第一次击中 $b\in(0,1)$ 的期望时间,记为 τ_b,则

$$\tau_b=\mathrm{E}\left(\inf\left\{t:\frac{\hat{X}_t^{A}}{\hat{X}_t^{B}}=b\right\}\right)=\frac{2\ln b}{(\varepsilon^{B})^2-(\varepsilon^{A})^2} \tag{6}$$

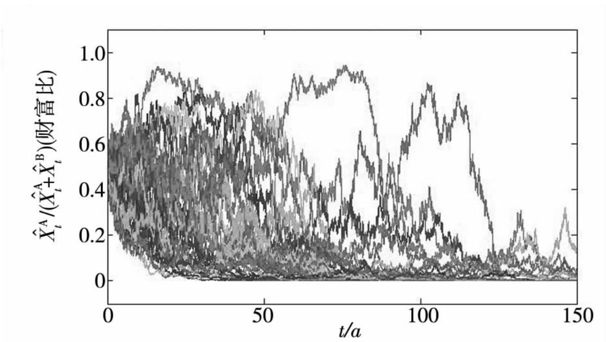
由式(6)可知,只有当两类投资者信念偏差大于 0.5 时,财富比的半衰期 $\tau_{0.5}$ 才小于 5 年;如果两类投资者的信念偏差只有 0.05,那么 $\tau_{0.5}$ 大于 500 年.

特别地,当 $\varepsilon^{A}=-0.3$,$\varepsilon^{B}=0$ 时,也即投资者 B 是理性投资者,他知道风险资产的实际回报. 在这种条件下,虽然投资者 A 一直错误估计风险资产的回报,但是其财富比的半衰期 $\tau_{0.5}$ 仍然大于 15 年,$\tau_{0.1}$ 甚至需要大于 100 年. 另外需要指出,定义 1 是用财富比例来定义投资者是否被逐出市场,但是财富比例趋于零,不代表财富趋于零. 事实上,即使投资者不能在市场中生存,但是他的财富仍然可以趋于无穷大,因此投资者的财富比 $\hat{X}_t^{A}/\hat{X}_t^{B}$ 可以在大范围内波动. 为了给出更清晰的收敛过程,计算 $\hat{X}_t^{A}/(\hat{X}_t^{A}+\hat{X}_t^{B})$ 以限制收敛过程在[0,1]. 本文做了 400 次模拟. 在 $T=15$, 25, 50, 75 时刻,分别计算了投资者 A 的最优财富占总财富的比例和均衡利率水平,并给出相应的密度分布,见图 1.

从图 1(a)中,可以看到投资者 A 的财富比例在所有的模拟中均以指数速度收敛到 0,进而市场均衡利率(见图 1(c))最终只由投资者 B 的信念来决定. 但是不难看出此收敛速度仍然很慢. 图 1(b)显示,甚至到 75 年后,投资者 A 仍然有 30% 的概率持有超过 10% 的总财富. 在这样的市场环境中,如果考虑短期的投资组合与资产定价问题,

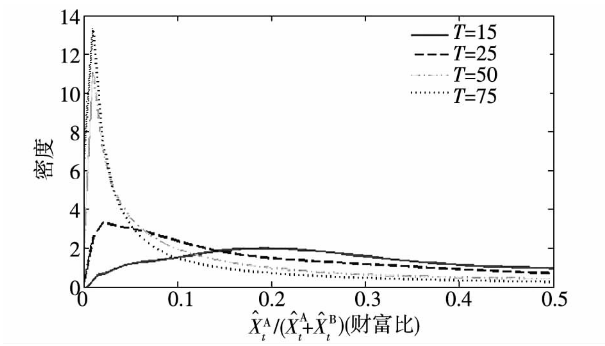
⑧　由于本文考虑的是自我反馈系统:投资者根据所获得的公开信息以及自己的信念对资产回报做出他自己认为对的估计并据此进行投资决策,此决策会影响市场价格;市场价格反过来又会影响投资者的投资决策. 因此谁的信念最精确实际上是事后确定的. 投资者事先不知道,也不关心自己的预测精确度是多少;他只在意在自己的信念 μ^{h} 下(注意:这里不是在信念偏差 ε^{h} 下)是否能使他的最终财富效用最大化. 事后($t\to\infty$)看到有类投资者在市场中存活了下来,他就是预测精度较高(即信念偏差 ε^{h} 较小)的投资者. 非常感谢评审指出这点.

忽略异质信念对均衡利率的影响则可能得出错误的结论. 特别地，在 50 年内，如果仅用投资者 B 的信念来确定均衡价格，那么会造成超过 30% 的误差，见图 1(d). 因此，除非投资者的信念偏差非常大，即 $|\varepsilon^B| - |\varepsilon^A|$ 非常大，否则忽略投资者 A 的存在将不能反映真实的市场情况. 对实际市场来讲，也就是说虽然小型投资者(如散户)在整个投资过程中，由于其在信息处理等方面处于劣势，进而使其财富的增长有限，但是他仍然对整个市场有重要的影响，如果忽略小型投资者的投资行为而一味关心大型机构投资者的投资则会有所偏颇甚至造成严重的错误. 因此在制定相关政策的时候，应该考虑小型投资者的利益和行为，很好地引导他们的行为将有助于稳定市场并加快市场的发展.



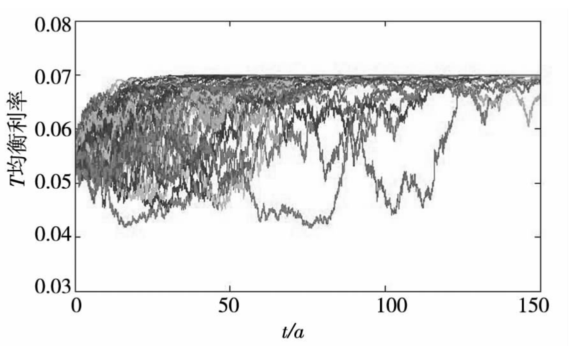
(a) 投资者 A 在总财富中占的比例

(a) Time series of the optimal wealth ratio of agent A



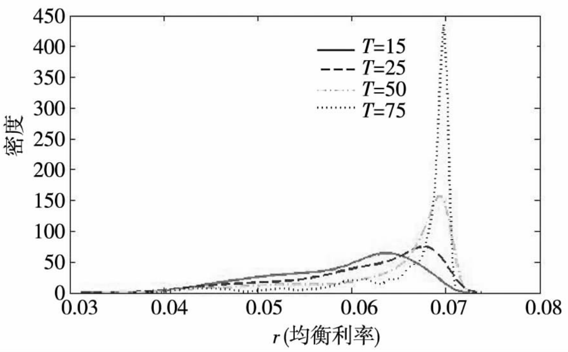
(b) 投资者 A′的财富密度函数

(b) Densities of agent A′s optimal wealth ratio



(c) 均衡利率水平

(c) Time series of the equilibrium interest rate



(d) 均衡利率对应的密度函数

(d) Densities of the equilibrium interest rate

图 1 当 $\varepsilon^A = -0.3$，$\varepsilon^B = 0$ 时，财富与均衡利率的收敛速度以及相应的密度函数.

Fig 1 Convergence speed and the corresponding density functions as $\varepsilon^A = -0.3$，$\varepsilon^B = 0$.

3 市场影响力分析

由上一节的分析可以知道，当考虑短期投资定价问题时，应该考虑所有投资者的投资行为和信念，因为他们都会对市场产生重要的影响. 在本节就着重分析不同投资者对市场的影响. 为了凸显互异投资者在整体经济中的地位，构建一个虚拟代理人. 构建代理人的好处是在此代理人的信念和均衡下，代理人经济和原来的互异投资者经济能产生相同的均衡价格，进而可以更清晰地分析不同投资者在市场中的角色和作用.

命题 2 (虚拟代理人经济及均衡) 如果代理人选取效用函数 $U^c(x) = x_0^* \ln(x)$ 其中 $x_0^* = \sum_{h=1}^{H} x_0^h$，且其信念为

$$Z_T^c = \exp\left(\int_0^T -\frac{1}{2}(\varepsilon^c(t))^2 \mathrm{d}t + \varepsilon^c(t)\mathrm{d}W(t)\right)$$

其中 $\varepsilon^c(t) = \sum_{h=1}^{H} \frac{\hat{X}^h(t)}{X^*(t)} \varepsilon^h(t)$，那么此代理人经

济与原来的互异投资者经济产生相同的市场均衡利率水平

$$r(t) = \mu(t) - \sigma(t)(\sigma(t) - \varepsilon^c(t)) \quad (7)$$

从命题 2 可以看出,在对数效用函数下,虚拟代理人的效用函数还是对数函数,而虚拟代理人的信念偏差 ε^c 是所有投资者信念偏差的财富加权平均. 与完全理性投资者经济相比较,完全理性投资者没有信念偏差,因此其均衡利率水平可以表示为 $R(t) = \mu(t) - \sigma^2(t)$; 而互异投资者经济的利率水平依赖于所有投资者的平均信念偏差 ε^c. 当 $\varepsilon^c > 0$ 时,说明市场信念是乐观的,此时互异投资者经济的利率水平就会高于完全理性投资者经济的 $R(t)$. 这是因为在这种条件下投资者会更倾向于投资在风险资产上从而降低了对无风险资产的投资,所以需要较高的无风险利率水平来避免市场过热,维持市场的平衡. 反之,当 $\varepsilon^c < 0$ 时,互异投资者经济的利率水平就会低于完全理性投资者经济的 $R(t)$, 进而促进投资者在风险市场的投资,有利于市场繁荣. 此现象的出现是因为市场中存在不同信念的投资者,他们之间的相互作用使得市场可以通过对利率水平的调整来达到调整经济的目的,而完全理性投资者经济则无法刻画这种调整. 另外可以将 $r(t)$ 表示成

$$r(t) = \sum_{h=1}^{H} \frac{\hat{X}^h(t)}{X^*(t)} r^h(t) \quad (8)$$

其中 $r^h(t) = \mu(t) - \sigma(t)(\sigma(t) - \varepsilon^h(t))$ 为第 h 类投资者经济(即此经济体中的所有投资者的信念偏差均为 ε^h)的均衡利率水平. 由式(8)可以看出互异投资者经济的利率水平是个有界函数,即 $\min_h\{r^h(t)\} \leq r(t) \leq \max_h\{r^h(t)\}$; 而且整体经济的利率水平是 H 类投资者经济的均衡利率水平的财富加权平均. 这说明投资信念的偏差对整体经济均衡有重要的影响. 投资者信念的变化会影响整体经济均衡. 即使当 μ,σ 和 $\{\varepsilon^h\}$ 都是常数时,由式(7)可知每类投资者的财富在整体经济中的变化也会使互异投资者经济的利率水平发生变化. 这种现象在单一投资者经济(包括完全理性投资者经济)中是看不到的. 此结果与文献[28]一致.

在命题 2 给出的均衡利率水平下可以对或有资产进行定价.

命题 3(资产定价) 假设或有资产在 T 时刻的回报为 P_T(P_T 关于 F_T 可测), 那么在 $t(t < T)$ 时刻的资产价格为

$$\begin{aligned} P_t &= \widetilde{\mathrm{E}}\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s\right) P_T \,\middle|\, F_t\right] \\ &= \sum_{h=1}^{H} \frac{\hat{X}^h(t)}{X^*(t)} \widetilde{E}^h\left[\exp\left(-\int_t^T r^h(s)\,\mathrm{d}s\right) P_T \,\middle|\, F_t\right] \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\widetilde{E}(\cdot)$ 和 $\widetilde{E}^h(\cdot)$ 分别为基于实际市场的风险中性鞅测度 $\mathrm{d}\widetilde{Q} = M_T \mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 和第 h 类投资者经济中的风险中性鞅测度 $\mathrm{d}\widetilde{Q}^h = M_T^h \mathrm{d}\boldsymbol{P}$ 下的期望, 这里

$$M_T = \exp\left(-\int_0^T \frac{1}{2}(\theta(s))^2 \mathrm{d}s - \int_0^T \theta(s)\,\mathrm{d}W_s\right),$$

$$M_T^h = \exp\left(-\int_0^T \frac{1}{2}(\theta^h(s))^2 \mathrm{d}s - \int_0^T \theta^h(s)\,\mathrm{d}W_s\right)$$

其中 $\theta = \sigma^{-1}(\mu - r)$, $\theta^h = \sigma^{-1}(\mu - r^h)$.

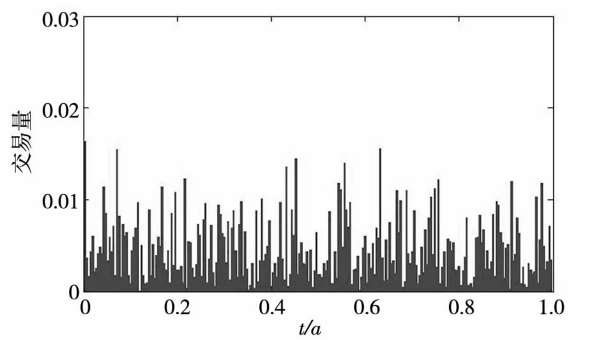
式(9)说明类似虚拟代理人信念和均衡利率,或有资产的价格也具有财富加权平均的特征. Detemple 和 Murthy[15] 指出,这种特征常常出现在代理人经济中. 因此通过研究代理人经济,并且通过与单一投资者经济比较,可以更好地理解互异投资者经济与单一投资者经济的共性与不同,并且能突出互异投资者在整体经济中的作用. 下面从借贷款和交易量两方面来分析互异投资者经济中独有的特征.

命题 4(借贷准则) 如果投资者 h 的信念低于所有投资者的平均信念(也就是虚拟代理人的信念), 即 $\varepsilon^h(t) < \varepsilon^c(t)$, 那么投资者 h 愿意借款给他人; 反之, 投资者 h 需要向他人借款.

命题 4 说明如果投资者 h 的信念低于所有投资者的平均信念,那么投资者 h 相对其他投资者是保守的、悲观的,因此他愿意借款给别人而不是去投资. 反之,当投资者 h 的信念高于所有投资者的平均信念时,投资者 h 是乐观的、激进的,他愿意借钱投资在风险资产上. 当投资者的信念变化时,投资者会在借款人和贷款人这两种角色中变化,并且借贷款的数额也会发生变化. 这种借贷款人角色的转变也暗含了市场交易的存在. 这些现象在传统的单一投资者经济中是看不到的. 换句

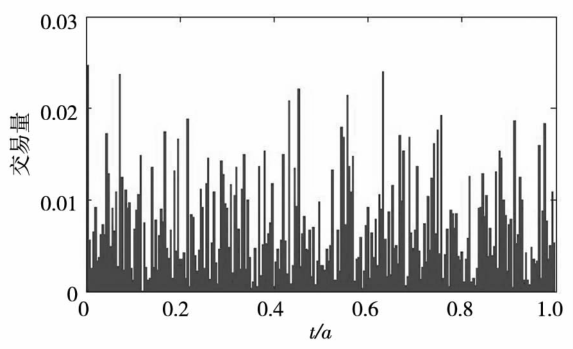
话说，异质信念是产生交易的基础. 但是与 Harris 和 Raviv[29]、Scheinkman 和 Xiong[30] 的结论不同，他们的结论说明交易的产生只来自于异质信念的变化; 而从本文的结论可以看出，即使异质信念不发生变化，只要存在互异的信念，由于投资者财富的波动也会有交易的发生. 另外这种交易量的大小与投资者信念差异的大小密切相关，见图 2. 为了更好地说明这种情况，考虑简单情形 $H = 2$，即两个人(记为 A、B) 的经济. 如果用投资者持有风险资产的头寸变化作为交易量的度量，可以得到如下结论.

命题 5(交易量) 假设市场中存在两类投资者，他们持有常数信念，即ε^h($h = $A，B) 为常值. 那么市场交易量随投资者的信念差异 (即 | $\varepsilon^A - \varepsilon^B$ |) 的增大而增大.



(a) 当$\varepsilon^A - \varepsilon^B = 0.1$ 时，风险资产的交易量

(a) Trading volumes of the risky asset at $\varepsilon^A - \varepsilon^B = 0.1$



(b) 当$\varepsilon^A - \varepsilon^B = 0.2$ 时，风险资产的交易量

(b) Trading volumes of the risky asset at $\varepsilon^A - \varepsilon^B = 0.2$

图 2 交易量与投资者信念差异的关系

Fig. 2 Relationship between trading volumes and belief differences between different agents

4 结束语

本文讨论了在异质信念条件下的资产定价、交易量以及投资者的市场生存问题. 投资者的预期决定了他们的投资决策，他们的投资决策影响着市场的需求，进而影响着市场价格的变化; 而反过来市场价格的变化又影响着投资者的预期，因此这是一个自我反馈系统. 在这样的系统中，投资者对市场价格预期的精确程度直接影响着投资者的盈利水平. 本文发现，投资者对价格变化的预期越精确，说明其对市场把握得越好，进而使得他的投资回报较高并最终可以将其他投资者逐出市场. 然而这个淘汰过程是漫长的. 当考虑短期投资决策行为以及对价格的影响时，如果只关心对市场信息把握较好的投资者(如大型机构投资者) 的行为，而忽略其余投资者(如散户) 的存在，那么可能得出错误的结论，进而使得市场运作面临巨大的风险. 事实上，本文的研究显示当考虑短期问题时，所有的投资者对市场的价格均有影响，影响的权重由其财富占总财富的比例来确定; 另外市场交易的发生是由于异质信念的存在，异质信念是交易的基础，信念的互异性越强交易量就越大. 因此，在实际金融市场中，应该综合考虑所有投资者的投资行为和决策，并通过教育和引导对市场信息把握不好的投资者(如散户) 来减少市场波动、稳定市场，进而促进市场机制的健康发展.

参 考 文 献:

[1] Willams J T. Capital asset prices with heterogeneous beliefs [J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2) : 219 – 239.

[2] Frankel J A, Froot K A. Understanding the US Dollars in the Eighties: The Expectations of Chartists and Fundamentalists [R]. NBER, 1987.

[3] Frankel J A, Froot K A. Chartists, fundamentalists and trading in the foreign exchange market [J]. American Economic

Review (Papers and Proceedings) , 1990, 80(2) : 181 – 185.
[4] Balduzzi P, Yao T. Test heterogeneous-agent models: An alternative aggregation approach [J]. Journal of Monetary Economics, 2007, 54(2) : 369 – 412.
[5] 王凤荣, 赵　建. 基于投资者异质性信念的证券定价模型——对我国股票市场价格的实证检验 [J]. 经济管理, 2006, (18) : 41 – 46.
Wang Fengrong, Zhao Jian. Pricing model based on heterogeneity beliefs: An empirical study on China's stock market prices [J]. Economic Management, 2006, (18) : 41 – 46. (in Chinese)
[6] Lux T. Herd behaviour, bubbles and crashes [J]. Economic Journal, 1995, 105(431) : 881 – 896.
[7] Brock W, Hommes C. Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1998, 22(8/9) : 1235 – 1274.
[8] Kogan L, Ross S A, Wang J, et al. The price impact and survival of irrational traders [J]. Journal of Finance, 2006, 61(1) : 195 – 229.
[9] Chiarella C, He X, Zheng M. An analysis of the effect of noise in a heterogeneous agent financial market model [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2010, 35(1) : 148 – 162.
[10] 张　维, 张永杰. 异质信念、卖空限制与风险资产价格 [J]. 管理科学学报, 2006, 9(4) : 58 – 64.
Zhang Wei, Zhang Yongjie. Heterogeneous beliefs, short-selling constraints and the asset prices [J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(4) : 58 – 64. (in Chinese)
[11] Zheng M, Wang D, He X. Asymmetry of technical analysis and market price volatility [J]. China Finance Review, 2009, 3(2) : 61 – 89.
[12] Grossman S, Stiglitz J. On the impossibility of informationally efficient markets [J]. American Economic Review, 1980, 70(3) : 393 – 408.
[13] Grundy B, Mc Nichols M. Trade and revelation of information through prices and direct disclosure [J]. Review of Financial Studies, 1989, 2(4) : 495 – 526.
[14] Wang J. A model of competitive stock trading volume [J]. Journal of Political Economy, 1994, 102(1) : 127 – 167.
[15] Detemple J, Murthy S. Intertemporal asset pricing with heterogeneous beliefs [J]. Journal of Economic Theory, 1994, 62(2) : 294 – 320.
[16] Angeletos G, Werning I. Crises and prices: Information aggregation, multiplicity and volatility [J]. American Economic Review, 2006, 96(5) : 1720 – 1736.
[17] De Long J, Shleifer A, Summers L, et al. The survival of noise traders in Financial markets [J]. Journal of Business, 1991, 64(1) : 1 – 19.
[18] Sandroni A. Do markets favor agents able to make accurate predictions? [J]. Econometrica, 2000, 68(6) : 1303 – 1342.
[19] Blume L, Easley D. If you're so smart, why aren't you rich? Belief selection in complete and incomplete markets [J]. Econometrica, 2006, 74(4) : 929 – 966.
[20] Yan H. Natural selection in financial markets: Does it work? [J]. Management Science, 2008, 54 (11) : 1935 – 1950.
[21] Luo G Y. Conservative traders, natural selection and market efficiency [J]. Journal of Economic Theory, 2012, 147(1) : 310 – 335.
[22] 张永杰. 信念、策略、资产价格与投资收益 [D]. 天津: 天津大学, 2007.
Zhang Yongjie. Beliefs, strategies, asset prices and investment returns [D]. Tianjin: Tianjin University, 2007. (in Chinese)
[23] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model [J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3(4) : 373 – 413.
[24] Blume M E, Keim D B. Institutional Investors and Stock Market Liquidity: Trends and Relationships [J/OL]. http://finance.wharton.upenn.edu/~keim/research/ChangingInstitutionPreferences_21Aug2012.pdf, 2012 – 08 – 21.
[25] Zhang A. The terminal real wealth optimization problem with index bonds: Equivalence of real and nominal portfolio choices for the constant relative risk aversion utility [J]. IMA Journal of Management Mathematics, 2012, 23(1) : 29 – 39.
[26] Simon H. A behavioral model of rational choice [J]. Quarterly Journal of Economics, 1955, 69(1) : 99 – 118.
[27] Friedman M. The Case of Flexible Exchange Rate [M] // Friedman M. Essays in Positive Economic. Chicago: University of Chicago Press, 1953.

[28] Yan H. Is noise trading cancelled out by aggregation? [J]. Management Science, 2010, 56(7): 1047 – 1059.
[29] Harris M, Raviv A. Differences of opinion make a horse race [J]. Review of Financial Studies, 1993, 6(3): 473 – 506.
[30] Scheinkman J, Xiong W. Overconfidence and speculative bubbles [J]. Journal of Political Economy, 2003, 111(6): 1183 – 1219.
[31] Karatzas I, Lehoczky J P, Shreve S E. Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1987, 25(6): 1557 – 1586.
[32] Jouini E, Napp C. Heterogeneous beliefs and asset pricing in discrete time: An analysis of pessimism and doubt [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2006, 30(7): 1233 – 1260.
[33] Jouini E, Napp C. Consensus consumer and intertemporal asset pricing with heterogeneous beliefs [J]. Review of Economic Studies, 2007, 74(4): 1149 – 1174.

Heterogeneous beliefs, survival and market impact

ZHENG Min
China Institute for Actuarial Science, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China

Abstract: Within the framework of heterogeneity in beliefs, this paper analyses the impact of different beliefs on asset pricing and the trading volume and gives the survival condition of investors. We find that investors with a more accurate expectation of the real return of risky assets can drive other investors out of the market. But the selection process can be very slow. Therefore, when we consider investment and asset pricing in a short period, the interaction of all investors should be considered, rather than only investors with a more accurate expectation. In fact, the existence of heterogeneous beliefs is the necessary condition for the trading volume and the changes of wealth and beliefs of investors play an important role in asset pricing. If we ignore the impact of heterogeneous beliefs, the partial results will be obtained.
Key words: heterogeneous beliefs; survival; asset pricing; trading volume

附录:

命题 1 的证明

由文献[31]可知,投资者 h 的最优财富过程为

$$\mathrm{d}\hat{X}^{h}=\hat{X}^{h}\left\{\left[r+\frac{\mu-r}{\sigma}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}+\varepsilon^{h}\right)\right]\mathrm{d}t+\left(\frac{\mu-r}{\sigma}+\varepsilon^{h}\right)\mathrm{d}W\right\}$$

则

$$\mathrm{d}\left[\ln\left(\frac{\hat{X}^{A}}{\hat{X}^{B}}\right)\right]=(\varepsilon^{A}-\varepsilon^{B})\left(\mathrm{d}W-\frac{\varepsilon^{A}+\varepsilon^{B}}{2}\mathrm{d}t\right)$$

由此结果即得.

命题 2 的证明

虚拟代理人的构造参见文献[32-33].由于虚拟代理人经济和互异投资者经济有相同的均衡价格,由虚拟代理人经济的供需平衡 $\pi^{*}(t)=X^{*}(t)$ 以及虚拟代理人的最优投资组合

$$\pi^{*}(t)=\sigma^{-1}(t)\left(\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}+\varepsilon^{c}(t)\right)X^{*}(t)$$

可得式(7).

命题 3 的证明

参阅文献[15].

命题 4 的证明

由文献[31]可知,投资者 h 的最优投资组合为

$$\hat{\pi}^{h}(t)=\sigma^{-1}(t)\left(\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}+\varepsilon^{h}(t)\right)\hat{X}^{h}(t)$$

则投资者 h 的借贷总额为

$$\hat{\pi}^{h}(t)-\hat{X}^{h}(t)=\frac{\varepsilon^{h}(t)-\varepsilon^{c}(t)}{\sigma(t)}\hat{X}^{h}(t)$$

命题 5 的证明

投资者 h 对风险资产的持有量为

$$\frac{\hat{\pi}^{h}(t)}{S(t)}=\frac{X^{*}(0)}{S(0)}\left(\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}+\varepsilon^{h}\right)\frac{\hat{X}^{h}(t)}{X^{*}(t)}$$

注意到

$$\mathrm{d}\left(\frac{\hat{X}^{h}(t)}{X^{*}(t)}\right)=\frac{\hat{X}^{h}(t)}{X^{*}(t)}(\varepsilon^{h}-\varepsilon^{c})(\mathrm{d}W-\varepsilon^{c}\mathrm{d}t)$$

进而得到交易量 $\mathrm{d}\left(\frac{\hat{\pi}^{h}(t)}{S(t)}\right)$ 随 $|\varepsilon^{A}-\varepsilon^{B}|$ 的增加而增大.