跳扩散环境下带通胀的最优动态资产配置①

费为银，蔡振球，夏登峰
(安徽工程大学金融工程系，芜湖 241000)

摘要: 在资产价格跳扩散环境下，研究通胀因素和跳对投资者资产配置的影响. 投资者在风险资产和无风险资产中进行投资. 首先利用 Itô 公式推导考虑通胀的消费篮子价格动力学方程，然后在由通胀折现的终端财富预期效用最大化标准下，利用 HJB 方程推导最优投资策略，得出最优动态资产配置策略的近似解，并分析了通胀对冲需求和跳对短视需求的影响. 最后对结果进行数值分析，定量分析了跳和通胀因素对投资者最优资产配置策略的影响.

关键词: 跳扩散过程; 通胀; 资产配置; HJB 方程; 效用最大化

中图分类号: F830. 9　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1007 - 9807(2015)05 - 0083 - 12

0 引 言

动态资产配置问题的研究是金融工程领域基本问题之一，受到国内外研究者的广泛关注. 现实生活中的各种突发事件不断影响着各国金融市场，使得资产价格大起大落乃至出现不连续的跳跃变化，跳风险对投资者的投资决策有着重大影响. 因此，近年来关于资产配置问题的研究越来越强调跳因素的重要性. Press [1] 在纯扩散模型的基础上引入跳跃行为，并假设引发跳跃的信息是独立到达且符合泊松(Poisson)分布的，而跳跃幅度符合对数正态分布. Merton [2] 研究了风险资产有可能违约的情形下短视资产的配置问题，违约事件通过泊松跳来描述，并且使用随机控制方法可以获得最优资产配置策略. Eraker 等 [3] 研究了资产收益和波动率含跳的连续时间随机波动率模型，并用标普 500 和纳斯达克 100 指数收益率数据给出了可能性估计策略，得到了即期波动率、跳时间、跳大小的参数估计. Eraker [4] 从期权和股价市场数据中检测了股票价格动态跳扩散的特征，建立了股票价格和股票价格波动率的非连续相关跳模型. Sanjiv 和 Raman [5] 认为国际上的股票收益都具有跳的特征，这些跳在不同的国家倾向于同时发生，最终导致系统风险，他采用跳扩散过程的多维系统来描述该事实，并且不同资产的跳是同时到达的，然后用这个收益模型研究投资者的投资组合问题. Jin 和 Zhang [6] 通过实证表明资产价格过程中的跳很难用足够精确的方法建模，他提出了在潜在的大金融市场中投资组合选择问题的新颖方法，在该市场中，投资者在面临扩散和跳风险的情况下不仅厌恶损失风险并且厌恶模型不确定风险，他通过将跳扩散市场分解成一个纯扩散市场和一组纯跳市场来解决最优投资组合问题，并且得到最优投资组合策略的近似解. Hanson 和 Westman [7] 得到了标的股票满足几何跳扩散过程的最优消费和投资组合策略问题的数值解，他认为跳扩散过程中的扩散和跳幅度呈对数正态分布，目标是最大化预期终端财富贴现效用和瞬时消费的累积贴现效用. 罗琰等 [8] 研究了连续时间动态均值方差投资组合选择问题，他们假设风险资产价格服从跳跃 - 扩散过程且具有卖空约束，

① 收稿日期: 2012 - 09 - 18; 修订日期: 2013 - 05 - 11.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71171003; 71271003); 教育部人文社会科学研究规划资助项目(12YJA790041); 安徽省自然科学基金资助项目(090416225; 1208085MG116).
作者简介: 费为银(1963—)，男，安徽芜湖人，博士，教授，博士生导师. Email: wyfei@ dhu. edu. cn

投资者的目标是在给定期望终端时刻财富条件下，最小化终端时刻财富的方差，通过假求解模型相应的 HJB 方程，得到了最优投资策略及有效前沿的显式解. 在文献 [9 – 10] 中，假定股票价格服从跳跃扩散过程，在传统均值 – 方差组合投资模型基础上最大化最终收益的期望及最小化最终财富的方差，引进一个随机线性二次最优控制问题作为原问题的辅助问题，并证明了状态为跳跃扩散过程的一般最优控制问题的判定定理，利用该判定定理求解 HJB 方程从而得出原问题的最优策略. 邓国和和杨向群[11] 在股票服从跳扩散模型及利率满足有随机跳的均值回复过程的不完全市场下，讨论了股票、债券和银行存款的组合选择投资问题. 应用动态规划建立了终端财富效用期望最大化目标函数对应的 HJB 方程，并给出了投资策略的表达式，最后通过数值计算分析了投资策略与风险回避参数，跳到达强度参数之间的关系. 钱晓松[12] 研究了跳扩散模型中一类最优投资消费问题，他假定市场由无风险债券和一种风险股票构成且具有成比例的交易费，在限制卖空股票和借款的条件下，证明了该问题的值函数为相应 HJB 方程惟一的带状态空间约束的粘性解. 蔡振球等[13] 研究资产价格带跳环境下红利支付对投资者资产配置的影响，在效用最大化标准下，利用 HJB 方程推导最优配置策略，并得到最优动态资产配置策略的近似解，并通过数值模拟，分析了跳和红利支付对投资者最优资产分配策略的影响. Wu[14] 在投资机会是随机的和可预测的情形下将跳扩散过程和动态资产配置结合起来，研究风险资产跳过程对投资者短视需求和跨期对冲需求的影响，并给出了最优资产配置的显式解.

通胀与最优资产配置的关系也为国内外许多学者所关注. Gallagher 和 Taylor[15] 发展的理论模型描述了 Fama 对于 "代理人假设"解释的含义，利用多变量的更新分解，提供了强有力的证据确认了美国过去 40 年股票 – 通胀之谜的 "代理人假设"解释. Munk 等[16] 提供了幂效用投资者能够在现金(银行账户) 、无风险债券和股票中进行投资的最优资产配置策略，该模型展示了均值 – 回复股票收益和实际利率的不确定性，并利用美国股票、债券和通胀数据对模型进行了校验. Fama 和 Schwert[17] 估计了 1953 年—1971 年期间不同的资产对冲预期和非预期通胀的程度，他们发现美国政府债券和票据能够完全对冲预期通胀，并且私人住宅的实际房产能够完全对冲预期和非预期通胀，劳动力收入对预期和非预期通胀显示出很小的短期相关性，然而最异常的结果是股票收益与预期通胀率是负相关的，并且也可能负相关于非预期通胀率. Hondroyiannis 和 Papapetrou[18] 利用马尔科夫机制转换向量自回归模型(MS-VAR) 研究了实际股票收益和预期与非预期通胀之间的动态关系. 实证结果表明实际股票收益和预期与非预期通胀不相关，表明股票市场运动是依赖经济机制的，意味着股票市场表现为不可预测性. 戴国强和张建华[19] 选择股票、汇率、房地产价格以及其他影响通货膨胀的因素，运用 ARDL 模型对我国资产价格和通货膨胀的关系进行实证分析，结果表明各因素对通货膨胀的影响差异较大，房地产价格和汇率两个指标作用显著，股票作用较弱. Bensoussan 等[20] 研究了投资者在消费和终端财富以随机通胀折现的前提下最大化投资者预期效用的最优消费和投资组合问题. Fei[21] 在带有马尔科夫机制和通胀的金融市场下给出通胀环境下的预期消费贴现效用最大化问题，并通过马尔科夫机制转换过程的广义 Itô 公式推导最优策略的判定定理，给出了最优消费和投资组合策略. Brennan 和 Xia[22] 采用等价鞅方法，研究了通胀因素下投资者的最优资产配置问题. 部慧和汪寿阳[23] 认为通货膨胀风险很难规避，因而提出构建和设计能对冲通胀风险的金融产品的思路. 对商品期货和各行业股票对冲通胀风险性质的研究结果显示，商品期货可以对冲通货膨胀风险尤其是未预期通货膨胀风险，但是行业股票不具备这种性质. 王春峰等[24] 认为通货膨胀风险及规避问题是不容忽视的，在现有的资产管理文献中，几乎大部分都没有考虑通货膨胀问题，直到近期人们才真正开始关注. 他们在文中考虑了银行帐户、债券和股票这 3 种可以交易的资产，对以通货膨胀和短期利率为主要的影响因素的资产配置问题进行了研究，最后得出最优的资产配置方案. 刘金全和王风云[25] 通过研究股票实际收益率与通货膨胀波动性之间的关系，可以判断股票市场波动和宏观经济运行之间的联系. 他们研究发现，通货膨胀率的波动能够影响股票实际收益率的变化，这说

明价格水平变化不仅影响消费品之间的替代，也影响投资品之间的替代. 因此，通过积极货币政策缓解通货紧缩压力，可以增强股票市场的规模活性并形成收益率上升的稳定预期. 费为银和李淑娟[26]研究了 Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型. 吕会影等[27]研究了投资者在通胀环境下基于随机微分效用的最优消费和投资问题，采用随机微分效用函数刻画投资者的偏好，并利用动态规划原理，建立相应的 HJB 方程，推导最优消费和投资策略. 覃森等[28]在风险资产收益率与证券的收益率无关和相关情况下，研究了通货膨胀率影响下的最优资产组合模型，得出了最优解，并进行了数值模拟. 姚海祥等[29]考虑通货膨胀因素下，利用均值 – 方差模型研究了连续时间投资组合选择问题，并运用随机最优控制和动态规划方法得到了问题的解析解，进而求解出原均值 – 方差模型的有效投资策略及有效边界的解析表达式.

其他背景下的动态资产配置问题也为众多学者所研究. 郭福华和邓飞其[30]在标准的 Black-Scholes 型金融市场下，建立了期望未来损失约束下基于终端财富效用最大化的投资组合选择模型，并运用鞅和优化方法，得到了一般效用和对数效用函数下投资者在投资计划期内任意时刻的最优财富和最优投资组合选择策略. 李仲飞和袁子甲[31]认为现有关于资产配置的动态均值 – 方差模型的研究均假设投资者准确知道与资产收益率相关的参数，从而忽略了参数不确定性对投资决策的影响. 他们引入参数不确定性和贝叶斯学习时的动态均值 – 方差模型，使用鞅方法得出最优投资策略的解析表达式，并导出了均值 – 方差有效边界. 并在此基础上，利用中国证券市场的实际数据进行了实证分析，结果表明参数不确定性对最优投资策略以及投资效果有较大的影响. 朱书尚等[32]简述并分析了现代投资组合选择的各种主要理论、模型与方法以及它们之间的内在关系，并对一些最新进展作了重点介绍. 对投资组合选择的理论研究和在我国的应用实践问题，提出了若干值得关注的发展方向与建议. Fei[33]研究投资者的最优消费 – 闲暇，投资组合和退休问题，投资者的瞬间偏好通过区别含糊和含糊态度的 α-max min 预期不变替代弹性效用刻画. Kim 和 Omberg[34]研究了由 HARA 效用函数和随机风险溢价驱动的一个在风险资产和无风险资产中交易的投资者的非短视投资组合行为.

通过上述文献综述分析发现，通胀和资产价格的跳跃会很大程度上影响投资者的最优资产配置策略. 因此，本文在上述模型的基础上考虑通胀和跳跃因素，对现有模型进行进一步推广和量化分析. 将综合考虑风险资产跳扩散价格运动和通胀环境下的最优资产配置问题，分析跳幅和随机通胀波动率等参数对风险资产配置的影响，得出一些有重要经济意义的结论.

1　模型框架及结果

在资产价格跳扩散环境下考虑通胀因素建立模型解决动态投资决策问题. 通常情形下，假设投资者的投资组合包括两种资产，一种风险资产和一种无风险资产，投资者在投资期限 $\tau = T - t$ 内最大化他的终端财富，假设无风险资产收益率 r_{f} 为常数连续复利，风险资产的价格 P_t 遵循跳扩散过程，即

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = (\mu_t - \lambda g)\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}Z_t + (\mathrm{e}^q - 1)\,\mathrm{d}Q(\lambda) \tag{1}$$

式中：Z_t 是一维标准的布朗运动；飘移 μ_t 表示风险资产随时间变化的平均收益；定义 $\mathrm{d}Q(\lambda)$ 为泊松跳过程，跳强度为 λ，且 $\Pr(\mathrm{d}Q = 1) = \lambda \mathrm{d}t$；投资期限 τ 内有 n 个跳的概率通过泊松分布刻画，即

$$\Pr(\tau \text{ 期限内 } n \text{ 个跳}) = \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \tag{2}$$

$g = \mathrm{E}(\mathrm{e}^q - 1)$ 表示资产价格跳幅的百分比，假设 $q \sim N(\mu_q, \sigma_q)$，当出现完全违约或者破产的特殊情形时($q = -\infty$)，资产价格跳到 0.

类似 Kim 和 Omberg[34]，允许投资环境是随机的，并且通过对波动 η_t 建模来刻画它的方差，定义 η_t 为

$$\eta_t = \frac{\mu_t - \lambda g - r_{\mathrm{f}}}{\sigma} \tag{3}$$

式中：$\mu_t - \lambda g - r_{\mathrm{f}}$ 描述扩散部分的超额收益率；σ 为扩散波动率；η_t 为描述资产收益过程扩散部分的风险溢价，即为扩散风险溢价.

设概率空间 (Ω, F, P) 有另一个一维 Wiener

过程 $Z_I(t)$，它构建通胀的不确定性. 由于通货膨胀和风险资产价格是相关的，故可设 $Z_I(t)$ 与 $Z(t)$ 的相关系数为 ρ，即

$$\mathrm{E}[\mathrm{d}Z_I(t)\mathrm{d}Z(t)] = \rho \mathrm{d}t$$

令 $F_t = \sigma\{Z_I(s), Z(s); s \leqslant t\}$ 为除可能的初始条件以外，其他所有过程都适应的基本信息流. 设 $H(t)$ 表示消费篮子价格过程，其动力学可以表示为如下形式[20]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H(t) &= H(t)(I\mathrm{d}t + \xi \mathrm{d}Z_I(t)) \\ H(0) &= H_0 \end{aligned} \tag{4}$$

其中：$H(0)$ 为初始条件；I 表示预期即期通货膨胀率；ξ 表示通胀波动率. 当消费篮子价格完全可观察时，H_0 为已知. 根据 Itô 公式，推导得出

$$H(t) = H(0) \times \exp\left[\int_0^t \left(I - \frac{1}{2}\xi^2\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \xi \mathrm{d}Z_I(s)\right]$$

设对数篮子价 $L(t) = \ln H(t)$，于是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L(t) &= \mathrm{d}\ln\left\{H(0)\exp\left[\int_0^t \left(I - \frac{1}{2}\xi^2\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \xi \mathrm{d}Z_I(s)\right]\right\} \\ &= \left(I - \frac{1}{2}\xi^2\right)\mathrm{d}t + \xi \mathrm{d}Z_I(t) \end{aligned} \tag{5}$$

现令 W_t 为投资者在 t 时所拥有的财富（这里财富是指名义财富），θ_t 表示他投资到风险资产中的财富部分，假设投资者没有即期消费和劳动收入，则投资者的财富动态形式为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_t &= (1-\theta) r_f W_t \mathrm{d}t + \theta_t W_t \times [(\mu_t - \lambda g)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}Z_t + (\mathrm{e}^q - 1)\mathrm{d}Q(\lambda)] \\ &= r_f W_t \mathrm{d}t + \theta_t W_t \times [\sigma\eta_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}Z_t + (\mathrm{e}^q - 1)\mathrm{d}Q(\lambda)] \end{aligned} \tag{6}$$

在 t 时刻，投资者在财富过程式（6）和消费篮子对数价格的动力学式（5）的前提下，投资期限 $\tau = T - t$ 内投资者最大化他的由通胀折现的终端财富（实际财富）

$$\begin{aligned} J(W, L, \tau) &= J(W_t, L_t, \tau) \\ &= \max_{\theta_t} \mathrm{E}_t[\mathrm{e}^{-r_f\tau} U(\mathrm{e}^{-L(T)} W_T)] \end{aligned} \tag{7}$$

类似 Merton[2] 中的推导过程，可以得到 HJB 方程为

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\theta_t}\Big\{ &-J_\tau + \lambda \mathrm{E}_t[J(W_t', L, \tau) - J(W_t, L, \tau)] + J_W r_f W_t + J_W \theta_t \sigma \eta_t W + \\ &\frac{1}{2} J_{WW} \theta_t^2 \sigma^2 W_t^2 + J_L\left(I - \frac{1}{2}\xi^2\right) + \\ &\frac{1}{2} J_{LL}\xi^2 + J_{WL}\theta_t W_t \sigma \xi \rho_t \Big\} \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $W_t' = W_t[1 + \theta_t(\mathrm{e}^q - 1)]$ 是跳发生下的财富水平，当完全违约或破产的特殊情形时（即 $q = -\infty$），投资者的财富减少到 $W_t' = W_t[1 - \theta_t]$. 假设投资者的效用函数满足 $U'(0) = \infty$，$U'(\infty) = 0$，则为了保证投资者的财富为正值，投资者不会将所有的资产全部配置在风险资产中，即在任何时候 $\theta_t < 100\%$，最优投资组合策略通过式（8）对 θ_t 的一阶条件获得，为

$$\theta^*(W, L, t) = \left(\frac{-J_W}{J_{WW}W_t}\right)\frac{\eta_t}{\sigma} + \left(\frac{-J_{WL}}{J_{WW}W_t}\right)\frac{\xi\rho}{\sigma} + \frac{\lambda E_t[J_{W'}(W', L, \tau)(\mathrm{e}^q - 1)]}{-J_{WW}W_t\sigma^2} \tag{9}$$

注意到方程（9）中 W' 里面包含 θ^*，所以投资组合决策是 θ^* 的隐函数. 然而，假设投资者财富效用形式为 CRRA 效用（不变相对风险厌恶）

$$U(W) = \frac{W^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \ \alpha > 0 \tag{10}$$

式中 α 为风险厌恶程度，这样能够得到有利于比较分析和校验的近似半解析解. 特别地，假设最优期望效用的近似函数形式为

$$J(W, L, \tau) \approx \Phi(L, \tau) U(\mathrm{e}^{r\tau} W) \tag{11}$$

其中

$$\Phi(L, \tau) = \exp(A(\tau) + B(\tau)L + C(\tau)L^2/2) \tag{12}$$

边界条件为

$$A(0) = -\frac{1}{a}, \ B(0) = \frac{1-b}{a}$$

$A(\tau)$，$B(\tau)$ 和 $C(\tau)$ 可以通过下列 3 个一阶非线性常微分方程求解（详细推导过程见附录 A）

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\tau} &= aC^2, \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\tau} &= aBC + bC, \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{a}{2}B^2 + (b + c\rho\xi\eta_t)B + \frac{1}{2}\xi^2 C + D_t \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$a = (1 + c\rho^2)\xi^2, b = I - \frac{1}{2}\xi^2, c = \frac{1-\alpha}{\alpha},$$

$$D_t = \lambda \hat{G}_t + \frac{1}{2}c\eta_t^2 - \frac{1}{2}c\frac{\lambda^2 \hat{g}_t^2}{\sigma^2}$$

$$\hat{G}_t = \mathrm{E}_t\left[(1 + \theta_t)(\mathrm{e}^q - 1))^{1-\alpha} - 1\right]$$

近似值 $J(W,L,\tau)$ 取决于 D_t 项,它与跳对(边际)间接效用影响有关并且依赖于最优资产配置决策. 既然 $B(\tau)$ 和 $C(\tau)$ 都不依赖于 D_t,则 D_t 对最优决策的求解是可忽略的. 由式(10)式和(11),可以得到最优投资组合决策

$$\theta^*(L,t) \approx \frac{\eta_t\sigma + \lambda\hat{g}_t + \rho\sigma\xi[B(\tau) + C(\tau)L]}{\alpha\sigma^2} \tag{14}$$

其中 $\hat{g}_t = \mathrm{E}_t[1 + \theta^*(L,t)(\mathrm{e}^q - 1)]^{-\alpha}(\mathrm{e}^q - 1)$ 刻画跳发生时财富变化的边际效用. 式(14)包含 3 部分,前两部分 $\frac{\eta_t\sigma + \lambda\hat{g}_t}{\alpha\sigma^2}$ 为风险溢价过程的短视需求,后一部分 $\frac{\rho\sigma\xi[B(\tau) + C(\tau)L]}{\alpha\sigma^2} = \theta_1$ 为通胀对冲需求. 注意到 $\hat{g}_t$ 也是最优配置 $\theta^*(L,t)$ 的函数,所以方程(14)实际上是 $\theta^*(L,t)$ 的隐函数. 然而,这很大程度上有利于比较分析,对实际时间数据的校验也是显然的: 从 $\theta = 0$ 开始,最优配置通过式(14)的几次递推能够获得.

最优资产配置中的 $B(\tau)$ 和 $C(\tau)$ 可以通过式(13)求解,有

$$C(\tau) = -\frac{1}{a(\tau+1)},$$

$$B(\tau) = \frac{1 - b(\tau+1)}{a(\tau+1)}$$

这里只考虑 1 个风险资产和 1 个状态变量,这样便能够解析地求解资产配置决策参数 $B(\tau)$ 和 $C(\tau)$,然后再进行比较分析. 然而这个框架能够很容易的推广到多个风险资产和多个状态变量,这里不加以讨论. 由以上模型和推导过程可以得到下面的命题.

命题 1　在上面的假设下,投资在风险资产中的最优比例通过隐函数方程近似给出

$$\theta^*(L,t) \approx \frac{\eta_t\sigma + \lambda\hat{g}_t + \rho\sigma\xi[B(\tau) + C(\tau)L]}{\alpha\sigma^2}$$

其中

$$\hat{g}_t = \mathrm{E}_t[1 + \theta^*(L,t)(\mathrm{e}^q - 1)]^{-\alpha}(\mathrm{e}^q - 1),$$

$$C(\tau) = -\frac{1}{a(\tau+1)},$$

$$B(\tau) = \frac{1 - b(\tau+1)}{a(\tau+1)}$$

下一命题是关于通胀对冲需求的重要结果.

命题 2　设风险厌恶投资者风险厌恶系数 $\alpha > 0$. 则: 1) 如果 $\rho < 0$,当 $L > 1$ 时,通胀对冲需求为投资期限 τ 的单调减函数,多头头寸随投资期限 τ 的增加而减少,空头头寸随投资期限 τ 的增加而增加; 当 $L < 1$ 时,通胀对冲需求为投资期限 τ 的单调增函数,多头头寸随投资期限 τ 的增加而增加,空头头寸随投资期限 τ 的增加而减少; 2) 如果 $\rho > 0$,当 $L > 1$ 时,通胀对冲需求为投资期限 τ 的单调增函数,多头头寸随投资期限 τ 的增加而增加,空头头寸随投资期限 τ 的增加而减少; 当 $L < 1$ 时,通胀对冲需求为投资期限 τ 的单调减函数,多头头寸随投资期限 τ 的增加而减少,空头头寸随投资期限 τ 的增加而增加.

证明　通胀对冲需求 θ_1 对投资期限 τ 的偏导数为

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} = \frac{\rho\sigma\xi(L-1)}{a(\tau+1)^2}$$

因为 $a > 0$,$\sigma > 0$,$\xi > 0$,所以如果 $\rho < 0$,易得 1) 结论成立. 类似地可得 2) 成立.　　证毕.

接下来的命题提供了跳对短视需求的影响.

命题 3　对于风险厌恶投资者($\alpha > 0$),当跳发生时,不管它的方向如何,都会减少投资者的短视需求. 同时,风险厌恶程度越大,跳风险对投资者在风险资产上的短视头寸减少效果越明显.

证明　证明过程见附录.　　证毕.

2　数值分析

为了更好地说明跳和通胀因素对投资者动态资产配置的影响,通过数值模拟定量分析如下.

在图 1 中,设定参数 $\mu_t = 0.13$,$\sigma = 0.15$,$\lambda = 0.25$,$\rho = -0.5$,$r_{\mathrm{f}} = 0.05$,$\alpha = 4$,$\mu_q = -0.13$,$\sigma_q = 0.25$,$\tau = 10$,$I = 0.04$,$L = 0.045$. 研究预期通胀波动率 ξ 对投资组合 θ 的影响,由图可见随着通胀波动率的增大,投资者在风险资

产中的投资比例迅速增加，当通胀波动率在 0.2 附近时，投资比例达到最大值，随后随着通胀波动率继续增大，其在风险资产中的投资比例缓慢降低. 此现象说明如果通货膨胀率波动幅度变化不大时(0.2 附近)，最优投资组合中分配在风险资产上的投资份额就会变大. 表明政府部门通过相应的有效措施对通货膨胀进行适当调控，就能达到比较理想的效果，并且不会对金融市场稳定产生多大影响，使得投资者的信心和积极性大大增强，理性投资者就会减少在无风险资产上的投资，而将更多的资金投资到风险资产上，促进储蓄存款、债券等市场资金向资本市场和实体经济转移，增强资本市场和实体经济体的流动性，实现储蓄转化为投资 —— 投资就业增加 —— 促进经济增长 —— 居民收入水平提高 —— 储蓄进一步增加的良性循环，这对经济的发展是有利的. 然而当通胀波动率较大时(一般波动率大于 0.2)，一方面市场波动比较剧烈，投资环境不稳定性增强，此时投资者的担忧情绪上升，从而相应的减少其风险资产的配置比例; 另一方面，当波动率进一步增大，投资者对通胀波动的敏感性降低，从而投资在风险资产上的头寸缓慢地减少.

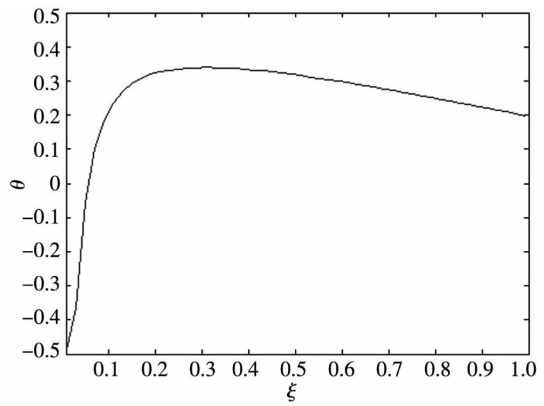

图 1 预期通胀波动率 ξ 对投资组合 θ 的影响

Fig. 1 Effect of the volatility of inflation ξ on portfolio θ

在图 2 中，设定参数 $\mu_t = 0.13$，$\sigma = 0.15$，$\lambda = 0.25$，$\rho = -0.5$，$r_f = 0.05$，$\alpha = 4$，$\mu_q = -0.05$，$\sigma_q = 0.25$，$\tau = 10$，$\xi = 0.04$，$L = 0.045$. 研究预期通胀率 I 对投资组合 θ 的影响. 从图中可以看出，I 在 0 附近，θ 取负值，表明投资者对风险资产看跌，其选择融券卖空股票，长期固定收益投资成为最佳选择. 随着通胀的温和增长(I 达到 0.05 附近)，经济景气度良好，经济增长会得到一定的促进，投资者此时应将资金投资于股市、房地产市场和实体经济，分享经济增长所带来的收益，积极的投资者还可以适当负债增加投资资金. 适度的通胀情形下(I 达到 0.1 附近)，相对价格不会出现过分的不协调，经济处于繁荣的阶段，一般都是股市和房地产市场高涨的时期，投资者对风险资产配置头寸会得到迅速提高，投资非常活跃. 但与此同时，政府也会出台一些调控措施进行干预，理性的投资者应当意识到一系列的调控政策所带来的系统风险. 股票市场短线投资热情有所降低，对房地产市场而言，房地产企业仍然会有很理想的收益，但盲目地扩大生产追加投资也是不可取的. 预期通胀压力进一步加大时，持有货币的价值损失过快，持有现金或者配置低收益无风险资产是不明智的，此时投资者仍然会选择投资其他风险资产进行保值(比如资源类，贵金属类，房地产类抗通胀品种). 但若通胀继续走高，经济环境恶化，投资者同样会对风险资产失去热情，只是仅仅维持一定的配置头寸.

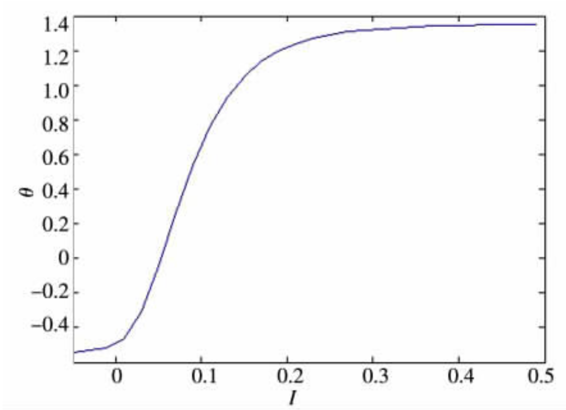

图 2 预期通胀率 I 对投资组合 θ 的影响

Fig. 2 Effect of the expected inflation rate I on portfolio θ

在图 3 和图 4 中，设定参数 $\mu_t = 0.13$，$\sigma = 0.15$，$\lambda = 0.25$，$\rho = -0.5$，$r_f = 0.05$，$\alpha = 4$，$\tau = 10$，$I = 0.04$，$L = 0.045$.

在图 3 中假定 $\sigma_q = 0.25$，变动 ξ 和 μ_q，研究预期通胀波动率 ξ 和跳大小 μ_q 对投资组合 θ 的影响，不管预期通胀率如何波动，跳的存在(不管方向如何)都会减少投资者在风险资产中的绝对头寸，当没有跳时($\mu_q = 0$)，投资者的配置头寸最高. 当完全违约发生时(资产价格趋于 0，$\mu_q \to -\infty$)，以及资产价格向上跳的幅度非常大($\mu_q \to +\infty$)时，投资者都会迅速地减少他的配置头寸以至于不配置该风险资产.

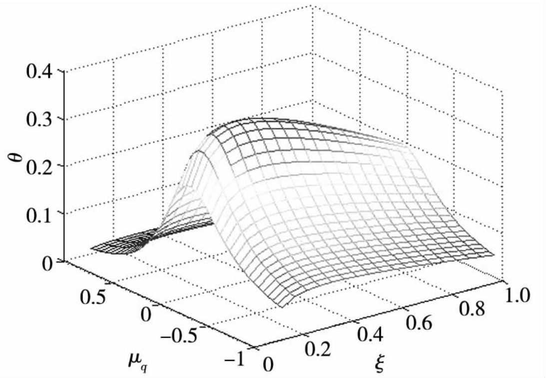

图 3　预期通胀波动率 ξ 和跳大小 μ_q 对投资组合 θ 的影响

Fig. 3 Effect of the inflation volatility ξ and the jump size μ_q on portfolio θ

在图 4 中，假定 $\mu_q = -0.05$，变动 ξ 和 σ_q，研究预期通胀波动率 ξ 和跳波动率 σ_q 对投资组合 θ 的影响，在同一通胀波动率下变动 σ_q，投资者的风险资产配置头寸都会随着 σ_q 的增大而减小. 这说明现实生活中的各种突发事件造成的资产价格大起大落乃至出现不连续的跳跃变化，其所产生的跳风险影响着金融市场和投资者的投资决策，使得投资者减少甚至避免参与风险资产的投资.

在图 5 和图 6 中，设定参数 $\mu_t = 0.13$，$\sigma = 0.15$，$\lambda = 0.25$，$\rho = -0.5$，$r_f = 0.05$，$\alpha = 4$，$\tau = 10$，$\xi = 0.04$，$L = 0.045$.

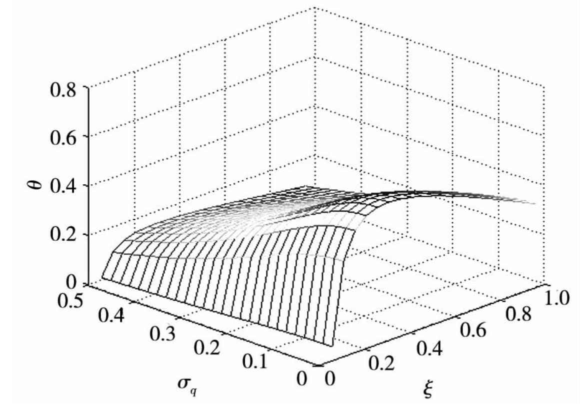

图 4　预期通胀波动率 ξ 和跳波动率 σ_q 对投资组合 θ 的影响

Fig. 4 Effect of the inflation volatility ξ and the jump volatility σ_q on portfolio θ

在图 5 中假定 $\sigma_q = 0.25$，变动 I 和 μ_q，研究预期通胀率 I 和跳大小 μ_q 对投资组合 θ 的影响，当预期通胀率为 0 时，无论资产价格跳的幅度有多大，投资者在风险资产中的配置比例为负值且几乎没有变动，近似于一条直线，此时投资者通过融券卖空风险资产获得现金投资于无风险资产，如储蓄、无风险债券等，跳风险对其几乎不构成影响. 然而在同样的跳幅度下，预期通胀率的增加，投资者都会增大风险资产的配置比率，当预期通胀压力达到一定程度时，因为经济状况随时都可能恶化，然而在通胀情形下，配置风险资产比持有现金优越，投资者仍然会选择在风险资产中进行投资，只是仅仅维持一定的水平，不再增加.

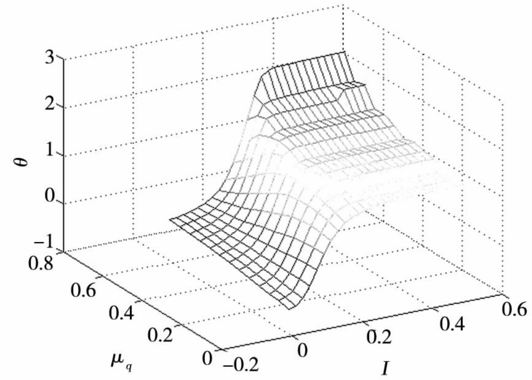

图 5　预期通胀率 I 和跳大小 μ_q 对投资组合 θ 的影响

Fig. 5 Effect of the inflation rate I and the jump size μ_q on portfolio θ

在图 6 中假定 $\mu_q = -0.05$，变动 I 和 σ_q，研究预期通胀率 I 和跳波动率 σ_q 对投资组合 θ 的影响，当跳波动率比较大时，预期通胀的变动几乎对投资者的配置头寸没有影响，这主要是由于风险资产很可能产生的违约风险所导致，但是当跳波动率接近 0 时（如定期红利支付市场，虽然红了支付时会产生跳风险，但由于市场有一致预期，所以不会产生波动），投资者对风险资产的配置头寸迅速提高，甚至是直线上升，通过大量借入现金投资于风险资产.

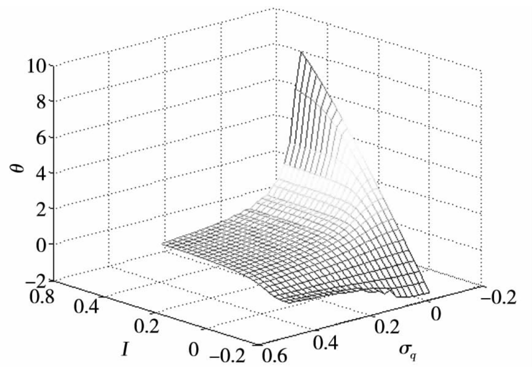

图 6　预期通胀率 I 和跳波动率 σ_q 对投资组合 θ 的影响

Fig. 6 Effect of the inflation rate I and the jump volatility σ_q on portfolio θ

总之，跳风险和预期通胀都会影响投资者的资产配置头寸，在有跳发生的情况下，不管他的大小和方向如何，都会使得市场的不稳定性增强，跳幅越

大,市场动荡越明显,从而加大风险资产的违约风险,因此投资者会相应的减少甚至不配置风险资产.并且在一定的预期通胀下,投资者为了避免通胀带来的资产贬值压力,都会将自己的资产进行投资.

但在不同程度的通胀下各种资产价格变动是不一致的,通涨的形成和发展也没有一个严格的时间和幅度的界定,因此,通胀情形下的资产配置策略须结合不同的通胀程度加以分析,投资者应当密切关注国家宏观政策的变化,根据自身的风险承受能力进行投资,把握好资产配置比例.

4 结束语

由于各国在某个时期内都会存在一定程度的通货膨胀,所以投资者不能忽视通货膨胀对资产配置的影响,投资者应根据通货膨胀率的变化情况适时调整其资产组合,以减少风险,获得更大的收益.本文研究资产价格带跳时通胀和跳过程对投资者动态资产配置的影响,在现有模型的基础上考虑通胀因素,借助随机微分方程和随机控制理论,得到投资者的最优资产配置策略,并通过数值分析分别说明跳大小、跳波动率、预期通胀率,通胀波动率对投资者决策的影响.研究结果可以为投资者资产配置提供新的视角,对现有模型的扩展具有较为重要的实际经济意义.

大家知道文献[21]研究了带通胀的 Markov 机制转换环境下的最优消费和投资组合问题,但本文与文献[21]有如下区别:1)文献[21]研究了风险资产的价格驱动的不确定源仅仅受到布朗运动的扰动,并未考虑泊松跳不确定源的扰动因素(跳作为不确定源在文献[14]中有阐述),在文献[21]中的跳指的是股票价格的预期收益率和波动率具有 Markov 有限状态转移的特征,不同机制间的转换规律可用 Markov 矩阵加以刻画,所以,文献[21]中的跳不同于本文中作为泊松不确定扰动的跳;2)本文仅考虑了终端财富的效用最大化问题,并未考虑中期消费因素,而在文献[21]中考虑了中期消费和终端财富效用的最大化问题;3)本文风险股票的预期收益率和波动率并未考虑 Markov 机制转换的特征,如果考虑他们的机制转换特征,那么在跳扩散资产价格动力学框架下引入通胀因素,那将是一个新的课题,其中需要解决跳扩散具机制转换系数的控制系统的随机分析问题,那将有待进一步研究;4)正因为上述的不同点导致经济意义分析的不同,如本文需分析泊松跳强度和幅度对投资组合的影响;而文献[21]需分析不同的 Markov 机制对投资组合决策的影响等等.所以,基于上述不同点的分析,本文从跳扩散视角在通胀环境下来分析投资者的动态资产配置,可以为投资者基于市场数据来计算投资组合并作决策提供科学依据,所得结论不同于文献[21],具有较为重要的经济意义和实际应用价值.最后,在跳扩散环境下,风险资产的价格行为具有 Markov 制转换特征,在此环境下的动态资产配置问题还有待进一步研究.尤其,在 Fei[21] 的基础上考虑资产收收益率具有马尔科夫机制转换特征时,探讨跳、通胀以及机制转换对投资者最优资产配置的影响是一个有着较为重要现实经济意义的研究课题,有待进一步研究.

参 考 文 献:

[1] Press S J. A compound events model for security prices[J]. Journal of Business, 1967, 40(3): 317 – 335.

[2] MertonR C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3(4): 373 – 413.

[3] Eraker B, Johannes M, Polson N. The impact of jumps in volatility and returns[J]. Journal of Finance, 2003, 58(3): 1269 – 1300.

[4] Eraker B. Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices[J]. Journal of Finance, 2004, 59(3): 1367 – 1403.

[5] Sanjiv R D, Raman U. Systemic risk and international portfolio choice[J]. Journal of Finance, 2004, 59(6): 2809 – 2834.

[6] Jin X, Zhang A. Ambiguity aversion, optimal portfolio choice and market decomposition with rare events[R]. www.ccfr.org.cn/cicf2011/papers/20110523013543.pdf.

[7] Hanson F B, Westman J J. Optimal consumption and portfolio control for jump-diffusion stock process with log-normal jumps [C] //Proceedings of American Control Conference, 2002: 4256 – 4261.

[8] 罗 琰，杨招军，张 维. 跳扩散市场投资组合研究 [J]. 经济数学，2012，29(2): 45 – 51.
Luo Yan, Yang Zhaojun, Zhang Wei. Study of portfolio in a jump-diffusion market [J]. Journal of Quantitative Economics, 2012, 29(2): 45 – 51. (in chinese)

[9] 郭文旌. 跳跃扩散股价的最优投资组合选择 [J]. 控制理论与应用，2005，22(2): 171 – 176.
Guo Wenjing. Optimal portfolio selection when stock prices follow jump-diffusion process [J]. Control Theory and Applications, 2005, 22(2): 171 – 176. (in Chinese)

[10] Guo W J, Xu C M. Optimal portfolio selection when stock prices follow an jump-diffusion process [J]. Mathematical Method of Operations Research, 2004, 60(3): 485 – 496.

[11] 邓国和，杨向群. 有跳风险的随机利率与动态资产分配 [J]. 高校应用数学学报 A 辑，2006，21(3): 278 – 284.
Deng Guohe, Yang Xiangqun. Dynamic asset allocation with stochastic interest rates in jump-risk [J]. Applied Mathematics Journal of Chinese University Series A, 2006, 21(3): 278 – 284. (in Chinese)

[12] 钱晓松. 跳扩散模型中具有成比例交易费的最优投资消费模型 [J]. 高校应用数学学报 A 辑，2005，20(3): 253 – 264.
Qian Xiaosong. Optimal consumption and portfolio with proportional transaction costs in a jump-diffusion model [J]. Applied Mathematics Journal of Chinese University Series A, 2005, 20(3): 253 – 264. (in Chinese)

[13] 蔡振球，费为银，潘 磊. 跳扩散环境下考虑红利支付的动态资产配置问题研究 [J]. 纯粹数学与应用数学，2013，29(1): 99 – 105.
Cai Zhenqiu, Fei Weiyin, Pan Lei. Research of dynamic asset allocation with dividend payment under jump-diffusion environment [J]. Pure and Applied Mathematics, 2013, 29(1): 99 – 105. (in Chinese)

[14] Wu L R. Jump and dynamic asset allocation [J]. Review of Quantitative Finance and Accounting, 2003, 20(3): 207 – 243.

[15] Gallagher L A, Taylor M P. The stock return-inflation puzzle revisited [J]. Economic Letters, 2002, 75(2): 147 – 165.

[16] Munk C, Sorensen C, Vinther T N. Dynamic asset allocation under mean-reverting returns, stochastic interest rates and inflation uncertainty: Are popular recommendations consistent with rational behavior? [J]. International Review of Economics and Finance, 2004, 13(2): 141 – 166.

[17] Fama E F, Schwert G W. Asset returns and inflation [J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 115 – 146.

[18] Hondroyiannis G, Papapetrou E. Stock returns and inflation in Greece: Amarkov switching approach [J]. Review of Financial Economics, 2006, 15(1): 76 – 94.

[19] 戴国强，张建华. 我国资产价格与通货膨胀的关系研究: 基于 ARDL 的技术分析 [J]. 国际金融研究，2009，(11): 19 – 28.
Dai Guoqiang, Zhang Jianhua. Research of the relationship between asset price and inflation: Based on ARDL technical analysis [J]. International Finance Research, 2009, (11): 19 – 28. (in Chinese)

[20] Bensoussan A, Keppo J, Sethi S P. Optimal consumption and portfolio decisions with partially observed real prices [J]. Mathematical Finance, 2009, 19(2): 215 – 236.

[21] Fei W Y. Optimal consumption and portfolio under inflation and Markovian switching [J]. Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2013, 85(2): 272.

[22] Brennan M J, Xia Y H. Dynamic asset allocation under inflation [J]. Journal of Finance, 2002, 57(3): 1201 – 1238.

[23] 部 慧，汪寿阳. 商品期货及其组合通胀保护功能的实证分析 [J]. 管理科学学报，2010，13(9): 26 – 37.
Bu Hui, Wang Shouyang. Empirical study of inflation-hedging characteristics of commodity futures and its portfolio in China [J]. Journal of Management Science in China, 2010, 13(9): 26 – 37. (in Chinese)

[24] 王春峰，吴启权，李晗虹. 资产配置中如何管理通货膨胀和随机利率风险: 一种中长期投资问题 [J]. 系统工程，2006，24(4): 60 – 64.
Wang Chunfeng, Wu Qiquan, Li Hanhong. How to manage inflation and stochastic interest rate risk in a strategic asset allocation: An investment problem with medium and long period [J]. Systems Engineering, 2006, 24(4): 60 – 64. (in Chinese)

[25] 刘金全，王风云. 资产收益率与通货膨胀率关联性的实证分析 [J]. 财经研究，2004，30(1): 123 – 128.
Liu Jinquan, Wang Fengyun. A positive analysis of the dynamic relationship between stock returns and inflation [J]. Journal of Finance and Economics, 2004, 30(1): 123 – 128. (in Chinese)

[26] 费为银，李淑娟. Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究[J]. 工程数学学报，2012，29(6)：799－806.
Fei Weiyin，Li Shujuan. On study of optimal consumption and portfolio with inflation under Knightian uncertainty[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics，2012，29(6)：799－806. (in Chinese)

[27] 吕会影，费为银，余敏秀. 通胀环境下考虑随机微分效用的最优消费和投资问题研究[J]. 数学理论与应用，2012，32(4)：93－98.
Lü Huiying，Fei Weiyin，Yu Minxiu. On study of optimal consumption and portfolio with stochastic differential utility under inflation[J]. Mathematical Theory and Applications，2012，32(4)：93－98. (in Chinese)

[28] 覃 森，秦超英，陈瑞欣. 考虑通货膨胀率影响下的最优资产组合模型[J]. 系统工程理论方法应用，2004，13(4)：316－319.
Qin Sen，Qin Chaoying，Li Ruixin. The optimal portfolios model with inflation rate[J]. Systems Engineering-Theory Methodology Applications，2004，13(4)：316－319. (in Chinese)

[29] 姚海祥，姜灵敏，马庆华. 考虑通货膨胀因素下的连续时间均值－方差投资组合选择[J]. 控制与决策，2013，28(1)：43－48.
Yao Haiyang，Jiang Lingmin，Ma Qinghua. Continuous-time mean-variance portfolio selection under inflation[J]. Control and Decision，2013，28(1)：43－48. (in Chinese)

[30] 郭福华，邓飞其. 期望未来损失约束下的最优投资问题[J]. 管理科学学报，2009，12(2)：54－59.
Guo Fuhua，Deng Feiqi. Optimal investment problem under constraint of expected future loss[J]. Journal of Management Sciences in China，2009，12(2)：54－59. (in Chinese)

[31] 李仲飞，袁子甲. 参数不确定性下资产配置的动态均值－方差模型[J]. 管理科学学报，2010，13(12)：1－9.
Li Zhongfei，Yuan Zijia. A dynamic mean-variance model of portfolio selection under parameter uncertainty[J]. Journal of Management Science，2010，13(12)：1－9. (in Chinese)

[32] 朱书尚，李 端，周迅宇，等. 论投资组合与金融优化—对理论研究和实践的分析与反思[J]. 管理科学学报，2004，7(6)：1－12.
Zhu Shushang，Li Duan，Zhou Xunyu，et al. Review and research issues on portfolio selection and financial optimization[J]. Journal of Management Sciences，2004，7(6)：1－12. (in Chinese)

[33] Fei W Y. Optimal consumption-leisure，portfolio and retirement selection based on α-max min expected CES utility with ambiguity[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese University，Series B，2012，27(4)：435－454.

[34] Kim T S，Omberg E. Dynamic nonmyopic portfolio behavior[J]. Review of Financial Studies，1996，9(1)：141－161.

Dynamicasset allocation with inflation under jump-diffusion environment

FEI Wei-yin，CAI Zhen-qiu，XIA Deng-feng
Department ofFinancial Engineering，Anhui Polytechnic University，Wuhu 241000，China

Abstract: The impacts of the inflation and the jumps on optimal asset allocations of an investor under asset prices with a jump environment are investigated. An investor allocates his assets to the risky asset and the riskless asset. First，we obtain the dynamics of consumer-basket-price with inflation by using Itô formula. Then，maximizing the expected utility of the terminal wealth discounted by inflation，and using the HJB equation，the optimal allocation strategy is obtained，and an approximate solution of the optimal dynamic asset allocation is given. Moreover，the inflation hedging demand and the effect of a jump on the myopic demand are discussed. Finally，we analyze the impacts of the jumps and inflation on the optimal allocation strategy of an investor through a numerical simulation.

Key words: jump-diffusion process; inflation; asset allocation; HJB equation; utility maximization

附录:

方程(13)的推导

根据式(10)和式(11)，可以得到

$$J(W,L,\tau) = \Phi(L,\tau)\frac{(e^{r\tau}W)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \tag{A1}$$

$$J(W',L,\tau)=\Phi(L,\tau)\frac{\{e^{r\tau}W[1+\theta(e^{q}-1)]\}^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

对式(A1)和式(12)求各阶偏导数得

$$J_\tau(W,L,\tau)=\Phi_\tau(L,\tau)\frac{(e^{r\tau}W)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\Phi(L,\tau)r(e^{r\tau}W)^{1-\alpha},$$

$$J_W(W,L,\tau)=\Phi(L,\tau)e^{r\tau(1-\alpha)}W^{-\alpha},$$

$$J_{WW}(W,L,\tau)=-\alpha\Phi(L,\tau)e^{r\tau(1-\alpha)}W^{-(1+\alpha)},$$

$$J_L(W,L,\tau)=\Phi_L(L,\tau)\frac{(e^{r\tau}W)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

$$J_{LL}(W,L,\tau)=\Phi_{LL}(L,\tau)\frac{(e^{r\tau}W)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

$$J_{WL}(W,L,\tau)=\Phi_L(L,\tau)e^{r\tau(1-\alpha)}W^{-\alpha},$$

$$\Phi_\tau(L,\tau)=\Phi(L,\tau)\times\left(A_\tau(\tau)+B_\tau(\tau)L+C_\tau(\tau)\frac{L^2}{2}\right),$$

$$\Phi_L(L,\tau)=\Phi(L,\tau)[B(\tau)+C(\tau)L],$$

$$\Phi_{LL}(L,\tau)=\Phi(L,\tau)\{[B(\tau)+C(\tau)L]^2+C(\tau)\}$$

将以上各式代入 HJB 方程(8)并整理得

$$-A_\tau(\tau)-B_\tau(\tau)L-\frac{L^2}{2}C_\tau(\tau)+\lambda E\{[1+\theta(e^{q}-1)]^{1-\alpha}-1\}+(1-\alpha)\theta\sigma\eta_t-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\theta^2\sigma^2+$$
$$IB(\tau)-\frac{1}{2}\xi^2B(\tau)+ILC(\tau)-\frac{1}{2}L\xi^2C(\tau)+\frac{1}{2}\xi^2B(\tau)^2+L\xi^2B(\tau)C(\tau)+\frac{1}{2}L^2\xi^2C(\tau)^2+$$
$$\frac{1}{2}\xi^2C(\tau)+\theta(1-\alpha)\sigma\xi\rho B(\tau)+\theta(1-\alpha)L\sigma\xi\rho C(\tau)=0 \tag{A2}$$

再将式(14)中的 θ 代入式(A2)得

$$\left\{-\frac{1}{2}C_\tau(\tau)+\frac{1}{2}C(\tau)^2\xi^2+\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho^2\xi^2C(\tau)^2-\frac{1-\alpha}{2\alpha}\rho^2\xi^2C(\tau)^2\right\}L^2+\left\{-B(\tau)+IC(\tau)-\frac{1}{2}\xi^2C(\tau)+\right.$$
$$\xi^2B(\tau)C(\tau)+\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho\xi\eta_tC(\tau)+\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\lambda\hat{g}}{\sigma}\rho\xi C(\tau)+\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho^2\xi^2B(\tau)C(\tau)-\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho\xi\eta_tC(\tau)-$$
$$\left.\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\lambda\hat{g}}{\sigma}\rho\xi C(\tau)-\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho^2\xi^2B(\tau)C(\tau)+\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho^2\xi^2B(\tau)C(\tau)\right\}L-A(\tau)+\lambda E\{[1+\theta(e^{q}-1)]^{1-\alpha}-1\}+$$
$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\eta_t^2+\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\lambda\hat{g}}{\sigma}\eta_t+\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho\xi\eta_tB(\tau)-\frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{\alpha}\eta_t^2-\frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\lambda^2\hat{g}^2}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho^2\xi^2B(\tau)^2-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\lambda\hat{g}}{\sigma}\eta_t-$$
$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho\xi\eta_tB(\tau)-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\lambda\hat{g}}{\sigma}\rho\xi B(\tau)+IB(\tau)-\frac{1}{2}\xi^2B(\tau)+\frac{1}{2}\xi^2B(\tau)^2+\frac{1}{2}\xi^2C(\tau)+\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho\xi\eta_tB(\tau)+$$
$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\lambda\hat{g}}{\sigma}\rho\xi B(\tau)+\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho^2\xi^2B(\tau)^2=0$$

整理后进一步得

$$\left\{-\frac{1}{2}C_\tau(\tau)+\frac{1}{2}C(\tau)^2\xi^2+\frac{1}{2}\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho^2\xi^2C(\tau)^2\right\}L^2+\left\{-B(\tau)+\left(I-\frac{1}{2}\xi^2\right)C(\tau)+\xi^2B(\tau)C(\tau)+\right.$$
$$\left.\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho^2\xi^2B(\tau)C(\tau)\right\}L-A(\tau)+\frac{1}{2}\left[\xi^2+\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho^2\xi^2\right]B(\tau)^2+\left(I-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1-\alpha}{\alpha}\rho\xi\eta_t\right)B(\tau)+$$
$$\frac{1}{2}\xi^2C(\tau)+\lambda E\{[1+\theta(e^{q}-1)]^{1-\alpha}-1\}+\frac{1-\alpha}{2\alpha}\eta_t^2-\frac{1-\alpha}{2\alpha}\frac{\lambda^2\hat{g}^2}{\sigma^2}=0$$

令 L 的二次项系数，一次项系数和常数项都为零，解得式(13)．　　证毕．

命题 3 的证明

定义函数

$$V_t(\theta^*)\equiv\theta^*(L,t)-\frac{\eta_t\sigma+\lambda\hat{g}_t}{\alpha\sigma^2}-\frac{\rho\sigma\xi[B(\tau)+C(\tau)L]}{\alpha\sigma^2}$$
$$=\theta^*(L,t)-\frac{\mu_t-r_f+\lambda(\hat{g}_t-g)}{\alpha\sigma^2}-\frac{\rho\sigma\xi[B(\tau)+C(\tau)L]}{\alpha\sigma^2}$$

当 $V(\theta^*)=0$ 时，可以得到最优资产配置策略，应用隐函数定理，得到 θ^* 关于跳参数 λ 的偏导数为

$$\frac{\partial\theta^*}{\partial\lambda}=-\frac{\frac{\partial V_t}{\partial\lambda}}{\frac{\partial V_t}{\partial\theta^*}}=\frac{\hat{g}_t-g}{\alpha\sigma^2-\lambda\frac{\partial\hat{g}}{\partial\theta}}.$$

因为

$$\frac{\partial \hat{g}_t(\theta)}{\partial \theta} = -\alpha \mathrm{E}_t\left[\left(1+\theta^*(L,t)(\mathrm{e}^q-1)\right)^{-\alpha-1}(\mathrm{e}^q-1)^2\right] < 0$$

所以跳对短视需求的影响主要取决于 $\hat{g} - g$ 的符号.

为了保证所有时刻的财富值为正，假设对于任意 q，有 $(1+\theta^*(L,t)(\mathrm{e}^q-1))^{-\alpha-1} > 0$.

首先考虑投资者的风险资产头寸为多头时的情形，即 $0 < \theta_t < 1$，由于

$$\begin{aligned}\hat{g}_t - g &= \mathrm{E}_t\left[(1+\theta_t(\mathrm{e}^q-1))^{-\alpha}(\mathrm{e}^q-1)\right] - \mathrm{E}(\mathrm{e}^q-1) \\ &= \mathrm{E}_t\{\left[(1+\theta_t(\mathrm{e}^q-1))^{-\alpha} - 1\right](\mathrm{e}^q-1)\}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial(\hat{g}_t - g)}{\partial \alpha} = -\mathrm{E}_t \frac{(\mathrm{e}^q-1)\ln\left[1+\theta_t(\mathrm{e}^q-1)\right]}{\left[1+\theta_t(\mathrm{e}^q-1)\right]^{\alpha}}$$

1) 当 $q = 0$ 时，即没有跳发生，所以

$$\hat{g}_t - g = 0,\ \frac{\partial(\hat{g}_t - g)}{\partial \alpha} = 0$$

2) 当 $q > 0$ 时，由于 $(1+\theta_t(\mathrm{e}^q-1))^{-\alpha} < 1$，$\ln\left[1+\theta_t(\mathrm{e}^q-1)\right] > 0$，所以

$$\hat{g}_t - g < 0,\ \frac{\partial(\hat{g}_t - g)}{\partial \alpha} < 0$$

3) 当 $q < 0$ 时，由于 $(1+\theta_t(\mathrm{e}^q-1))^{-\alpha} > 1$，$\ln\left[1+\theta_t(\mathrm{e}^q-1)\right] < 0$，所以

$$\hat{g}_t - g < 0,\ \frac{\partial(\hat{g}_t - g)}{\partial \alpha} < 0$$

综上，风险资产多头头寸情形时，由于短视需求 $\frac{\eta_t\sigma + \lambda\hat{g}_t}{\alpha\sigma^2}$ 对为跳参数 λ 的偏导数 $\frac{\hat{g}_t - g}{\alpha\sigma^2} < 0$，所以，即不管跳的方向如何（$q > 0$ 或者 $q > 0$），跳风险都会减少投资者的短视需求. 另一方面，由于 $\frac{\partial(\hat{g}_t - g)}{\partial \alpha} < 0$，说明风险厌恶程度越大，跳风险对投资者短视头寸减少效果越明显.

同理可得当 $\theta < 0$ 时，$\frac{\partial(\hat{g}_t - g)}{\partial \alpha} \geqslant 0$，$\hat{g}_t - g \geqslant 0$，于是，风险资产空头头寸情形时，短视需求为跳参数 λ 的单调增函数，不管跳的方向如何（$q > 0$ 或者 $q > 0$），跳风险都会减少投资者的短视需求. 同时，风险厌恶程度越大，跳风险对投资者短视头寸减少效果越明显. 证毕.

(上接第 51 页)

Dynamic channel selection and pricing based on customer behavior

TIAN Lin, *XU Yi-fan*

School of Management, Fudan University, Shanghai 200433, China

Abstract: This paper applies game theory to studing dynamic channel selection and pricing problem based on strategic customer behavior. Suppose there is a manufacturer who sells a fixed number of products to customers directly in a finite horizon with two periods. In period one, there is value uncertainty; in period two, the demand is random. In each period, the manufacturer needs to decide whether introducing a retail channel with value-added service to its existing direct channel or not, and the corresponding pricing strategies. Customers need to decide when and which channel to buy so as to maximize their own surplus. Our results show that it is better for the manufacturer to introduce a retail channel. However, the optimal pricing strategies are different when the retail channel is introduced in different periods. Meanwhile, we find that it is optimal for the manufacturer to introduce the retailchannel in the whole horizon when the retailer's service ability is small, but not when the retailer's service ability is very big. If the manufacturer and the retailer choose to cooperate, it is optimal to introduce the retail channel in the whole horizon regardless of the retailer's service ability. Some results are counter-intuitive.

Key words: dynamic channel selection; dynamic pricing; strategic customer behavior