第 18 卷第 11 期 管 理 科 学 学 报 Vol. 18 No. 11
2015 年 11 月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Nov. 2015

离散抽样方差互换定价研究①

杜 琨[1,2,3]，曾旭东[1]

(1. 上海财经大学金融学院，上海 200433; 2. 广发证券股份有限公司博士后工作站，广州 510620;
3. 西北大学经济管理学院，西安 710069)

摘要： 文章在一类随机波动跳跃(SVJ)模型下给出离散抽样远期起始方差互换公平敲定价解析解存在的充分条件和具体计算方法. 文中所定义的这一类 SVJ 模型包含了很多现有文献中广泛使用的 SVJ 模型. 先前关于离散抽样方差互换公平敲定价解析解的研究都局限在仿射型随机波动模型下，而文章中的方法不仅适用于仿射模型，对许多非仿射模型同样适用. 文章在 Heston 模型和 Hull&White 模型下给出解析解表达式和数值计算结果. Heston 模型为仿射结构，现有文献已有解析解；而 Hull&White 模型为非仿射结构，现有文献中只提供了数值解. 通过比较可以发现，文章中的结果与现有文献中的解析解和数值解非常接近，从而佐证了结论的正确性.

关键词： 方差互换；SVJ 模型；公平敲定价；解析解

中图分类号： F830.91 **文献标识码：** A **文章编号：** 1007-9807(2015)11-0070-12

0 引 言

波动率衍生品是特殊的金融衍生工具，其价值依赖于标的资产未来的波动水平. 波动率(或方差)传统上被视为衡量标的资产风险的工具，但随着波动率衍生品交易的快速发展，波动率现已被视为独立的资产. 因此，通过交易波动率衍生品，波动率像其他资产一样，可以被用在各种交易策略中. 虽然在波动率衍生品被引入之前，通过持有和对冲期权头寸也可以间接交易波动率和方差，但这种间接方法需要连续地对冲交易，从而造成了交易成本过高和流动性问题. 与之相反，波动率衍生品没有这些缺点，它向交易者提供了直接交易波动率和方差的途径.

方差互换作为基本的波动率衍生品，是定义在标的资产在一段时间内的已实现方差(已实现波动率的平方)上的或有权益. 远期起始方差互换合约的支付函数定义为 $L \times [RV(T_s, N, T_e) - K_{var}]$，其中 L 是名义本金，K_{var} 代表敲定方差，T_s，T_e 分别是方差互换合约的起始时刻和到期时刻，N 表示观察次数(即将 $[T_s, T_e]$ 分成 N 个子区间)，$RV(T_s, N, T_e)$ 表示合约有效期内标的资产的已实现方差. 令 0 代表当前时刻，且 $0 \leqslant T_s < T_e$. 如果 $T_s = 0$，则合约是个普通方差互换. 本文首先研究普通方差互换，然后在此基础上研究远期起始的方差互换.

显然方差互换的支付函数依赖于已实现方差. 金融市场上使用最广泛的已实现方差的定义为

$$RV(0, N, T) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{T}\left[\ln\left(\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right)\right]^2 \quad (1)$$

其中 $S(t)$ 是标的资产的价格；$\{T_i\}_{i=1}^{N}$ 是 N 个观察时刻，$T_0 = 0$；$\Delta T = T/N = T_i - T_{i-1}$ 是观察间隔时间(例如 1 个交易日或 1 周). 不失一般性，

---

① 收稿日期：2012-12-29；修订日期：2013-05-06.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(71271127).
作者简介：杜 琨(1982—)，男，河南郑州人，博士. Email: d31415927@126.com

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

假设间隔时间相等.

文献 [1] 中证明了若抽样频率趋向无穷，则离散抽样的已实现方差趋向连续抽样的已实现方差，即

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{T}\left[\ln\left(\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right)\right]^2=\frac{1}{T}\int_0^T\sigma^2(t)\,\mathrm{d}t$$

其中 $\sigma(t)$ 为标的资产的瞬时波动率. 由于数学上的便利性，对连续抽样的波动率衍生品已经有了广泛和深入的研究. 近期的研究结果有文献 [2 – 4] 以及这些文章中的参考文献. 其中文献 [2] 给出了用期权复制方差互换的方法. 文献 [3] 中假设标的资产是连续半鞅，在此假设下研究了波动率衍生品的对冲策略. 文献 [4] 在仿射模型框架下给出了方差互换、方差期权等波动率衍生品的定价公式.

相较于连续抽样，离散抽样的波动率衍生品更加难以研究，但实际交易中的产品全部是建立在离散抽样的基础上的，连续抽样只是作为离散抽样的近似. 文献 [5 – 7] 都指出用连续抽样近似离散抽样往往造成较大的误差. 文献 [5] 首先在 Heston 随机波动模型(见文献 [8]) 下给出了离散抽样方差互换公平敲定价的解析解，并推广到 SVJ 模型下. 文献 [7] 利用标的资产对数价格的特征函数和标的资产瞬时方差的特征函数同样给出了 Heston 随机波动模型下离散抽样方差互换公平敲定价的解析解，并推广到 SVJJ 模型下. 文献 [6] 利用文献 [7] 中的方法进一步研究了一些其他波动率衍生品(如 VIX 期货等) 在仿射跳扩散模型下的定价问题. 最近的一篇论文 [9] 将文献 [10] 中关于仿射跳扩散模型的研究结果应用于离散抽样方差互换的研究中，进一步给出了标的资产对数价格和标的资产瞬时方差的联合特征函数，从而给出了方差互换、Gamma 方差互换公平敲定价的解析解以及门限方差互换和条件方差互换的半解析解.

以上关于离散抽样方差互换公平敲定价的解析解的研究都局限在仿射模型框架下，这与仿射模型数学处理上的便利性有关. 文献 [10] 对仿射跳扩散模型的性质进行了深入的研究. 但随机波动模型中也包含大量的非仿射模型. 例如第一篇讨论随机波动的文献 [11]，其中的模型就是非仿射结构. 文献 [12 – 15] 等文献中的模型也是非仿射模型. 对于非仿射模型下方差互换的定价问题往往使用数值方法. 文献 [16] 在 Hull 和 White [11] 随机波动模型下研究离散抽样方差互换的定价问题，他们提出了高效的控制变量 Monte Carlo 方法，可以快速准确地计算方差互换的价格. 文献 [17] 进一步发展了文献 [16] 中的数值方法，利用多元控制变量技巧进一步提高了 Monte Carlo 方法的计算效率.

值得一提的是，文献 [5 – 7，9] 中关于方差互换解析解的研究之所以局限在仿射跳扩散模型下，是因为只有在仿射模型下定价问题转化成的偏微分方程问题才可以利用文献 [10] 中的方法转化为一组黎卡提常微分方程的求解问题. 而当在非仿射模型下求解方差互换的价格时，定价问题转化成的偏微分方程问题则比仿射模型下复杂，且无固定方法可循. 因此，在文献 [16] 中，当作者将定价问题转化成偏微分方程问题后，认为该偏微分方程“很难推导解析解”.

本文定义一类 SVJ 模型，将一些常见的随机波动模型涵盖其中. 将给出在该类 SVJ 模型下离散抽样远期起始方差互换公平敲定价解析解存在的充分条件和具体计算方法. 本文中所提供的计算方法不仅可以在仿射随机波动模型(例如 Heston 模型) 下给出方差互换公平敲定价的解析解，也可以在非仿射随机波动模型(例如 Hull 和 White 模型) 下给出方差互换公平敲定价的解析解. 本文中的证明在数学附录中给出.

1　SVJ 模型

本节将定义一类 SVJ 模型，在该类 SVJ 模型下研究离散抽样方差互换公平敲定价解析解存在的充分条件和具体计算方法. 给定一个概率三元组 $\{\Omega, F, P\}$，其中 P 为风险中性概率测度. 在 P 下标的资产价格 $S(t)$ 和状态变量 $X(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t-)}=r\mathrm{d}t+f(t,X(t))\,\mathrm{d}W(t)+\mathrm{d}[Q(t)-\lambda\varphi t] \tag{2}$$

$$\mathrm{d}X(t)=k[m-X(t)]\,\mathrm{d}t+\sigma X^{\eta}(t)\,\mathrm{d}B(t) \tag{3}$$

$$f(t,x)=\mathrm{e}^{\alpha t+\beta}x^{\gamma} \tag{4}$$

式中 $W(t)$ 和 $B(t)$ 为两个标准布朗运动，其瞬时

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

相关系数为 ρ; r 为无风险利率; $Q(t)$ 为复合泊松过程，即

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} (Y_j - 1)$$

其中 $\{Y_j\}$ 为独立同分布(iid) 的随机变量，服从对数正态分布，即 $\ln Y_j \sim N(a,b^2)$. 记 φ 为 $Y_j - 1$ 的期望值，则

$$\varphi = \mathrm{E}[Y_j - 1] = \exp\left\{a + \frac{b^2}{2}\right\} - 1$$

是强度为 λ 的泊松过程. 假设 $N(t)$ 独立于 $N(t)\{Y_j\}$, $W(t)$ 和 $B(t)$，且 $\{Y_j\}$ 也独立于 $W(t)$ $W(t)$ 和 $B(t)$.

令 $\Phi = \{k,m,\sigma,\eta,\alpha,\beta,\gamma\}$ 为模型参数集. 通过对参数集 Φ 的不同取值，很多衍生品定价模型可以被式(2) – 式(4) 定义的 SVJ 模型所涵盖. 例如:

$\alpha = \gamma = \lambda = 0$: 文献[18] 中的模型;

$\alpha = \gamma = 0$, $\lambda > 0$: 文献[19] 中的模型;

$\eta = 1$, $\alpha = \beta = \lambda = 0$, $m = 0$: 文献[11] 中的模型;

$\eta = 1$, $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = \lambda = 0$, $m > 0$, $k > 0$: 文献[12] 中的模型;

$\eta = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = \lambda = 0$, $m > 0$, $k > 0$: 文献[15] 中的模型;

$\eta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = \lambda = 0$, $m > 0$, $k > 0$: 文献[8,20] 中的模型;

$\eta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = 0$, $\lambda > 0$, $m > 0$, $k > 0$: 文献[21] 中的模型;

$\eta = 0$, $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = \lambda = 0$, $m > 0$, $k > 0$: 文献[22,23] 中的模型;

$\eta = 0$, $\gamma = 2$, $\alpha = \beta = \lambda = 0$, $m > 0$, $k > 0$: 文献[24] 中的模型.

在式(4) 中，标的资产的瞬时波动率 $f(t,x)$ 被定义为变量 x 的幂函数. 值得一提的是，当波动率 $f(t,x)$ 被定义为变量 x 的指数函数时，使用和本文中方法类似的技巧可以计算该情况下离散抽样方差互换公平敲定价的解析解. 文献[13, 14] 中的模型属于这种情况. 由于篇幅限制，本文不再具体讨论这类模型.

由以上所列可以看出，$\eta = 0$, $\eta = 1/2$, $\eta = 1$ 这 3 种情况在随机波动模型中使用频率最高. 在下一节中，本文将聚焦于这 3 种情况，分别给出在这 3 种情况下离散抽样方差互换公平敲定价解析解存在的充分条件和具体计算方法.

2　公平敲定价的解析解

为使定价模型有意义，需要选定参数集 Φ 使得波动率 $f(t,x)$ 几乎必然是实数(以下称之为“有效定义”). 必然存在一些参数的选取方法，使得波动率 $f(t,x)$ 定义无效. 例如，若令 $\eta = 0$, $\gamma = 1/2$，则波动率 $f(t,X(t))$ 以正的概率取虚值. 事实上，为了得到公平敲定价的解析解，参数集 Φ 需要满足一些技术假设和条件.

假设(平方可积条件)　对 $\forall t > 0$，参数集 Φ 使得波动率 $f(t,x)$ 有效定义，且满足

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t f^2(s,X(s))\,\mathrm{d}s\right] = \mathrm{E}\left[\int_0^t \mathrm{e}^{2\alpha s+2\beta} X^{2\gamma}(s)\,\mathrm{d}s\right] < \infty$$

定义(M – 条件)　对任意实数 M 以及 $\forall t > 0$，若参数集 Φ 使得随机过程 $X(t)$ 满足

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t \mathrm{e}^{2Mks} X^{2(\eta+M-1)}(s)\,\mathrm{d}s\right] < \infty$$

则称随机过程 $X(t)$ 为“在 Φ 上满足 M – 条件”.

对大多数感兴趣的 SVJ 模型，上述假设和条件都是满足的. 关于随机过程 $X(t)$ 的更多性质参见文献[25]. 利用与文献[26] 中 Theorem 11.7.3 类似的方法可以证明如下引理.

引理 1　如果标的资产价格 $S(t)$ 服从式(2)—式(4)，则

$$S(t) = S(0)\exp\left\{(r - \lambda\varphi)t - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s,X(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(s,X(s))\,\mathrm{d}W(s)\right\}\prod_{j=1}^{N(t)} Y_j \tag{5}$$

方差互换的公平敲定价是使互换的净现值等于零的价格. 从而，公平敲定价 K_{var}^* 为

$$K_{\mathrm{var}}^* = L \times \mathrm{E}[RV(0,N,T)] = L\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{E}\left[\left(\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right)^2\right] \tag{6}$$

由式(5) 可得

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}=(r-\lambda\varphi)\Delta T-\frac{1}{2}R_i+I_i+J_i \tag{7}$$

其中

$$R_i=\int_{T_{i-1}}^{T_i}f^2(s,X(s))\,\mathrm{d}s$$

$$I_i=\int_{T_{i-1}}^{T_i}f(s,X(s))\,\mathrm{d}W$$

$$J_i=\sum_{j=N(T_{i-1})+1}^{N(T_i)}\ln Y_j$$

对式(7)两边平方可得

$$\left[\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right]^2=(r-\lambda\varphi)^2\Delta T^2+\frac{1}{4}R_i^2+I_i^2+J_i^2-(r-\lambda\varphi)\Delta TI_i+2(r-\lambda\varphi)\Delta TJ_i-R_iI_i-R_iJ_i+2I_iJ_i \tag{8}$$

由平方可积条件,利用伊藤积分的鞅性质和伊藤等距性(见文献[26]中 Theorem 4.3.1),从而有 $\mathrm{E}[I_i]=0$ 且 $\mathrm{E}[I_i^2]=\mathrm{E}[R_i]$. 又因为 $\{Y_i\}$, $N(t)$ 独立于 $W(t)$, $B(t)$, 所以有 $\mathrm{E}[I_iJ_i]=\mathrm{E}[I_i]\mathrm{E}[J_i]$ 且 $\mathrm{E}[R_iJ_i]=\mathrm{E}[R_i]\mathrm{E}[J_i]$. 从而,在式(8)两边取期望得

$$\mathrm{E}\left[\left(\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right)^2\right]=(r-\lambda\varphi)^2\Delta T^2+[1-(r-\lambda\varphi)\Delta T]\mathrm{E}[R_i]-\mathrm{E}[R_iI_i]+\frac{1}{4}\mathrm{E}[R_i^2]-\mathrm{E}[R_i]\mathrm{E}[J_i]+2(r-\lambda\varphi)\Delta T\mathrm{E}[J_i]+\mathrm{E}[J_i^2] \tag{9}$$

由式(6)和式(9),要求公平敲定价 K_{var}^* 的解析表达式等价于求出 $\mathrm{E}[R_i]$、$\mathrm{E}[R_i^2]$、$\mathrm{E}[R_iI_i]$、$\mathrm{E}[J_i]$ 和 $\mathrm{E}[J_i^2]$ 的解析表达式. 相对于随机波动,跳跃部分更容易处理,首先给出如下引理.

引理 2　$\mathrm{E}[J_i]=\lambda\Delta Ta$ 且 $\mathrm{E}[J_i^2]=\lambda\Delta T(a^2\lambda\Delta T+a^2+b^2)$.

其余 3 个期望与随机波动相关联,其求解过程更加复杂,需要 $X(t)$ 在参数集 Φ 上满足 M-条件. 通过以后的论证会发现求解公平敲定价解析解的关键在于可以递归的求解随机过程 $X(t)$ 条件矩的解析表达式.

由 $X(t)$ 的马尔科夫性质(文献[26]中 Corollary6.3.2),对任意实数 M,定义

$$g_M(u,v,X(v))=\mathrm{E}[X^M(u)\mid F(v)],\quad 0\leqslant v\leqslant u \tag{10}$$

其中 $\{F(t),0\leqslant t\leqslant T\}$ 是布朗运动 $B(t)$ 生成的域流.

引理 3　若 $X(t)$ 在参数集 Φ 上满足 M-条件,则

$$g_M(u,v,X(v))=\mathrm{e}^{-Mk(u-v)}X^M(v)+Mkm\mathrm{e}^{-Mku}\int_v^u\mathrm{e}^{Mkw}g_{M-1}(w,v,X(v))\,\mathrm{d}w+\frac{1}{2}(M-1)M\sigma^2\mathrm{e}^{-Mku}\int_v^u\mathrm{e}^{Mkw}g_{M+2\eta-2}(w,v,X(v))\,\mathrm{d}w \tag{11}$$

由式(11),当 $M=0$ 或 1 时,有如下表达式

$$g_0(u,v,X(v))=1,$$
$$g_1(u,v,X(v))=\mathrm{e}^{-k(u-v)}X(v)+m[1-\mathrm{e}^{-k(u-v)}] \tag{12}$$

由以上结论,可以将 $\mathrm{E}[R_i]$、$\mathrm{E}[R_i^2]$ 和 $\mathrm{E}[R_iI_i]$ 表示为关于函数 $g_M(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的积分形式.

引理 4

$$\mathrm{E}[R_i]=\mathrm{e}^{2\beta}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha s}g_{2\gamma}(s,0,X(0))\,\mathrm{d}s \tag{13}$$

引理 5

$$\mathrm{E}[R_i^2]=\mathrm{e}^{4\beta}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha t}\left\{\int_{T_{i-1}}^{t}\mathrm{e}^{2\alpha s}\mathrm{E}[X^{2\gamma}(s)g_{2\gamma}(t,s,X(s))]\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{4\beta}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha t}\left\{\int_{t}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha s}\mathrm{E}[X^{2\gamma}(t)g_{2\gamma}(s,t,X(t))]\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \tag{14}$$

引理 6

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[R_iI_i] = &\frac{\rho\mathrm{e}^{\alpha T_i+\beta}}{\sigma(\gamma-\eta+1)}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha t}\mathrm{E}[X^{2\gamma}(t)g_{\gamma-\eta+1}(T_i,t,X(t))]\mathrm{d}t - \\ &\frac{\rho\mathrm{e}^{\alpha T_i+\beta}}{\sigma(\gamma-\eta+1)}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha t}\mathrm{E}[X^{\gamma-\eta+1}(T_{i-1})g_{2\gamma}(t,T_{i-1},X(T_{i-1}))]\mathrm{d}t - \\ &\frac{\rho km}{\sigma}\mathrm{e}^{3\beta}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha t}\left\{\int_{T_{i-1}}^{t}\mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{E}[X^{\gamma-\eta}(s)g_{2\gamma}(t,s,X(s))]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t - \\ &\frac{\rho km}{\sigma}\mathrm{e}^{3\beta}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha t}\left\{\int_{t}^{T_i}\mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{E}[X^{2\gamma}(t)g_{\gamma-\eta}(s,t,X(t))]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t - \\ &\frac{\rho[\alpha-k(\gamma-\eta+1)]}{\sigma(\gamma-\eta+1)}\mathrm{e}^{3\beta}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha t}\left\{\int_{T_{i-1}}^{t}\mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{E}[X^{\gamma-\eta+1}(s)g_{2\gamma}(t,s,X(s))]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t - \\ &\frac{\rho[\alpha-k(\gamma-\eta+1)]}{\sigma(\gamma-\eta+1)}\mathrm{e}^{3\beta}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha t}\left\{\int_{t}^{T_i}e^{\alpha s}\mathrm{E}[X^{2\gamma}(t)g_{\gamma-\eta+1}(s,t,X(t))]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t - \\ &\frac{1}{2}\rho\sigma(\gamma-\eta)\mathrm{e}^{3\beta}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha t}\left\{\int_{T_{i-1}}^{t}\mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{E}[X^{\gamma+\eta-1}(s)g_{2\gamma}(t,s,X(s))]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t - \\ &\frac{1}{2}\rho\sigma(\gamma-\eta)\mathrm{e}^{3\beta}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{2\alpha t}\left\{\int_{t}^{T_i}\mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{E}[X^{2\gamma}(t)g_{\gamma+\eta-1}(s,t,X(t))]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15}$$

由以上 3 个引理可以看出，要计算 $\mathrm{E}[R_i]$、$\mathrm{E}[R_i^2]$ 和 $\mathrm{E}[R_iI_i]$ 的解析表达式需要首先计算 $X(t)$ 某次幂的条件期望的解析表达式. 接下来将考虑几种 $X(t)$ 某次幂的条件期望可以被解析求解的情况.

类型 1　当 $\eta=0$ 时.

此时，状态变量 $X(t)$ 服从 Ornstein-Uhlenbeck 过程. 模型式(2) – 式(4) 可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t-)} = r\mathrm{d}t + f(t,X(t))\mathrm{d}W(t) + \mathrm{d}[Q(t)-\lambda\varphi t],$$

$$\mathrm{d}X(t) = k[m-X(t)]\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B(t)$$

且 $f(t,x) = \mathrm{e}^{\alpha t+\beta}x^{\gamma}$. 由引理 3 中的式(11) 和式(12)，可证明如下引理:

引理 7　若 $\eta=0$ 且 M 是非负整数，则 $g_M(u,v,X(v))$ 是一个关于 $X(v)$ 的 M 次多项式，该多项式由如下递归公式给出

$$\begin{aligned}g_M(u,v,X(v)) = &\mathrm{e}^{-Mk(u-v)}X^M(v) + Mkme^{-Mku}\int_v^u\mathrm{e}^{Mkw}g_{M-1}(w,v,X(v))\mathrm{d}w + \\ &\frac{1}{2}(M-1)M\sigma^2\mathrm{e}^{-Mku}\int_v^u\mathrm{e}^{Mkw}g_{M-2}(w,v,X(v))\mathrm{d}w\end{aligned} \tag{16}$$

因此，若 M 为正整数，g_M 就可以由式(16) 递归地求出. 从而，由式(6)、式(9)、引理 2 以及引理 4—6，有如下定理.

定理 1　若 $\eta=0$ 且 γ 为非负整数，则公平敲定价 K_{var}^* 有解析解.

由以上定理，方差互换公平敲定价的解析表达式对 $\eta=0$ 且 γ 为非负整数的模型是存在的. 这样的模型包括文献[18-19]、[22-24]等中的模型. 对于文献[22-23]中的模型，利用式(16)，递归地求出 g_2，g_3，g_4 的表达式，然后将 $g_0,\cdots,g_4$ 的表达式和 $\alpha=\beta=\lambda=0$，$m>0$，$k>0$，$\eta=0$，$\gamma=1$ 代入式(13)、式(14) 和式(15)，从而可以得到 $\mathrm{E}[R_i]$、$\mathrm{E}[R_i^2]$ 和 $\mathrm{E}[R_iI_i]$ 的解析表达式，再由式(6) 和式(9) 可得 K_{var}^* 的解析解. 对于文献[24]中的模型，利用式(16)，递归地求出 $g_2,\cdots,g_8$ 的表达式，然后将 $g_0,\cdots,g_8$ 的表达式和 $\alpha=\beta=\lambda=0$，$m>0$，$k>0$，$\eta=0$，$\gamma=1$ 代入式(13)、(14) 和(15)，从而可以得到 $\mathrm{E}[R_i]$、$\mathrm{E}[R_i^2]$ 和 $\mathrm{E}[R_iI_i]$ 的解析表达式，再由式(6) 和式(9) 可得 K_{var}^* 的解析解. 对于其他属于该类型的模型，K_{var}^* 的解析表达式可以类似求出.

类型 2　当 $\eta=1/2$ 时.

此时，状态变量 $X(t)$ 服从平方根扩散过程. 模型式(2) – 式(4) 可以简化为

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t-)} = r\mathrm{d}t + f(t, X(t))\,\mathrm{d}W(t) + \mathrm{d}[Q(t) - \lambda\varphi t],$$

$$\mathrm{d}X(t) = k[m - X(t)]\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X(t)}\,\mathrm{d}B(t)$$

且 $f(t,x) = e^{\alpha t+\beta}x^{\gamma}$. 由引理 3 中的式(11) 和(12),可证明如下引理.

引理 8　若 $\eta = 1/2$ 且 M 是非负整数,则 $g_M(u,v,X(v))$ 是一个关于 $X(v)$ 的 M 次多项式,该多项式由如下递归公式给出

$$g_M(u,v,X(v)) = M\left[km + \frac{1}{2}(M-1)\sigma^2\right]\times \mathrm{e}^{-Mku}\int_v^u \mathrm{e}^{Mkw}g_{M-1}(w,v,X(v))\,\mathrm{d}w + \mathrm{e}^{-Mk(u-v)}X^M(v) \tag{17}$$

因此,若 M 为正整数,g_M 就可以由式(17) 递归地求出. 从而,由式(6)、式(9)、引理 2 以及引理 4—6,有如下定理.

定理 2　若 $\eta = 1/2$ 且 $\gamma = n + 1/2$,其中 n 为非负整数,则公平敲定价 K_{var}^* 有解析解.

由以上定理,方差互换公平敲定价的解析表达式对 $\eta = 1/2$ 且 $\gamma = n + 1/2$,n 为非负整数的模型是存在的. 这样的模型包括文献[8]、[20-21]等中的模型. 与上一种情况类似,根据 γ 的取值,利用式(17) 递归地求出引理 4—6 中要用到的 g_M 的表达式,然后将这些表达式和其他参数代入式(13)、(14) 和式(15) 中,求出 $\mathrm{E}[R_i]$、$\mathrm{E}[R_i^2]$ 和 $\mathrm{E}[R_iI_i]$ 的解析表达式,再进一步利用式(6) 和式(9) 求出 K_{var}^* 的解析解.

类型 3　当 $\eta = 1$ 时.

此时,状态变量 $X(t)$ 不再具有仿射结构. 模型式(2) - 式(4) 可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t-)} = r\mathrm{d}t + f(t, X(t))\,\mathrm{d}W(t) + \mathrm{d}[Q(t) - \lambda\varphi t],$$

$$\mathrm{d}X(t) = k[m - X(t)]\,\mathrm{d}t + \sigma X(t)\,\mathrm{d}B(t)$$

且 $f(t,x) = \mathrm{e}^{\alpha t+\beta}x^{\gamma}$. 类似引理 7 和引理 8,有如下结论.

引理 9　若 $\eta = 1$ 且 M 是非负整数,$g_M(u,v,X(v))$ 是一个关于 $X(v)$ 的 M 次多项式,该多项式有如下递归公式给出

$$g_M(u,v,X(v)) = Mkm\mathrm{e}^{\left[\frac{1}{2}(M-1)\sigma^2-k\right]Mu}\times \int_v^u \mathrm{e}^{-\left[\frac{1}{2}(M-1)\sigma^2-k\right]Mw}g_{M-1}(w,v,X(v))\,\mathrm{d}w + \mathrm{e}^{\left[\frac{1}{2}(M-1)\sigma^2-k\right]M(u-v)}X^M(v) \tag{18}$$

因此,若 M 为正整数,g_M 就可以由式(18) 递归地求出. 从而,由式(6)、式(9)、引理 2 以及引理 4—6,有如下定理.

定理 3　若 $\eta = 1$ 且 γ 为正整数,则公平敲定价 K_{var}^* 有解析解;特别的,若 $\eta = 1$ 且 $m = 0$,则对任意的 γ,公平敲定价 K_{var}^* 都有解析解.

满足以上定理的模型包括文献[1]和[2]等. 对于 Hull 和 White 模型,由于 $m = 0$,由式(18) 知 g_M 不再依赖于 g_{M-1}(此时式(18) 中的 M 可取任意实数),从而对任意的 γ,公平敲定价都有解析表达式. 对于文献[2]中的模型,利用式(18),递归地求出 g_2,g_3,g_4 的表达式,然后将 $g_0,\cdots,g_4$ 的表达式和参数 $\alpha = \beta = \lambda = 0$,$m > 0$,$k > 0$,$\eta = \gamma = 1$ 代入式(13)、(14) 和(15),从而可以得到 $\mathrm{E}[R_i]$、$\mathrm{E}[R_i^2]$ 和 $\mathrm{E}[R_iI_i]$ 的解析表达式,再有由式(6) 和式(9) 可得 K_{var}^* 的解析解. 但是对于文献[5]的 GARCH 模型,无法求出解析解,除非 $\rho = 0$. 对于一般情况,可以用 $\rho = 0$ 时的情况作为控制变量,使用 Monte Carlo 方法求解.

3　数值例子

在本节中,在 Heston 模型和 Hull 和 White 模型下将本文所提供的解析解与现有文献中的解析解或数值解相比较. 由于 Heston 模型是典型的仿射模型,近几年的几篇文献已提供了解析解,将用本文的解析解与之相比较. 而 Hull 和 White 模型则是非仿射模型,将用本文的解析解与现有文献中的数值解相比较. 公平敲定价的解析表达式比较复杂,具体表达式在附录中给出,但由于表达式是初等函数形式,从而对计算机来说可以瞬间完成计算. 这就使本文的解析解相对于任何数值解均有很大优势.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

1) Heston 模型

在式(2)—式(4)中令 $k>0$，$m>0$，$\sigma>0$，$\alpha=\beta=\lambda=0$，$\gamma=\eta=1/2$，则得 Heston 模型. 由定理 2 知公平敲定价的解析解存在. 综合利用引理 4、5、6 和 8 以及式(6)和式(9)，可求出解析解.

首先，采用文献[5]中提供的参数，即 $k=6.21$，$m=0.019$，$\sigma=0.31$，$\rho=-0.7$，$X(0)=10.11\%$，$T=1$，$r=3.19\%$，$L=10\ 000$. 表 1 列出了本文的解析解 K_{var}^{*}、文献[5]②中的解析解以及 Monte Carlo 模拟的结果(100 000 条路径).

表 1 参数取自文献[5]的 Heston 模型结果

Table 1 Results of Heston model using parameters in [5]

抽样频率		MC 方法	文献[5]的解析解	本文的解析解
N	4	179.783 7	N/A	180.256 8
	12	177.796 4	177.619 2	177.698 9
	26	176.148 7	N/A	176.785 4
	52	176.634 4	176.369 9	176.352 7
	252	176.219 8	175.923 2	175.989 4

表 1 中两列解析解略有差异，原因在于文献[5]表 5 中第 3 列数据是只保留了两位小数的近似值，将其平方后再乘以 $(N-1)/N$ 得到的表 1 中第 3 列的结果就会和本文的解析解产生微小的差别.

下面再用文献[6]中提供的的参数，即 $k=11.35$，$m=0.022$，$\sigma=0.618$，$\rho=-0.64$，$X(0)=0.04$，$T=1$，$r=0.1$，$L=10\ 000$. 表 2 列出了解析解 K_{var}^{*}、文献[6]表 2.1 中第 2 列的解析解以及 Monte Carlo 模拟的结果(100 000 条路径).

表 2 中两列解析解有一定差异，这是由于在文献[6]中，已实现方差的定义方式是按“真实回报方差”定义而不是按本文当中的“对数回报方差”定义(见文献[6]中式(2.3)和式(2.4)). 文献[6]中 68 页第 13 行也指出，这两种定义方式，在按周频率抽样下($N=52$)会有 0.46% 的差异，这与表 2 中的结果相符. 必须指出的是，在实际当中，已实现方差基本上都是按“对数回报方差”定义的，文献[6]中 67 页第 3 行也指出了这一点.

表 2 参数取自文献[6]的 Heston 模型结果

Table 2 Results of Heston model using parameters in [6]

抽样频率		MC 方法	文献[6]的解析解	本文的解析解
N	4	258.816 6	267.6	261.003 5
	12	246.663 1	242.7	245.333 0
	26	239.913 6	238.6	240.450 2
	52	237.906 8	237.1	238.209 7
	252	235.943 1	236.1	9

2) Hull 和 White 模型

在式(2)—式(4)中令 $\alpha=\beta=m=\lambda=0$，$\sigma>0$，$\eta=1$，则得 Hull 和 White 模型. 由定理 3 知公平敲定价的解析解存在. 综合利用引理 4、5、6 和 9 以及式(6)和式(9)，可将解析表达式求出.

由于 Hull 和 White 模型是非仿射模型，现有文献中还未给出解析解. 但文献[16]给出了个高效的控制变量，Monte Carlo 方法在 Hull 和 White 模型的一种特殊情况($\gamma=1/2$)下以计算方差互换价格. 按文献[16]设定参数，即 $r=0.05$，$L=1\ 000$，$T=1$，$\sigma=0.01$，$X(0)=0.15^2$，$\rho=-0.5$. 下面的两个表比较了本文的解析解和文献[16]中的数值解.

表 3 参数取自文献[16]的 Hull 和 White 模型结果 1

Table 3 Results of Hull and White model using parameter set 1 in ref. [16]

路径数	$N=1$，$-k=0.05$	$N=5$，$-k=0.05$	$N=5$，$-k=0.15$
100	23.349 7	22.227 1	23.362 7
400	23.340 2	22.233 3	23.369 5
1 000	23.344 2	22.230 0	23.365 9
2 000	23.346 3	22.227 9	23.363 7
5 000	23.352 6	22.231 1	23.367 1
8 000	23.350 4	22.228 8	23.364 7
本文的解析解	23.362 5	22.229 9	23.365 8

② 由于定义上的细微差别，表格中的数值是在文献[5]中表 5 第 3 列原结果取平方再乘以 $(N-1)/N$ 得到的.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 4　参数取自文献 [16] 的 Hull 和 White 模型结果 2

Table 4 Results of Hull and White model using parameter set 2 in ref. [16]

路径数	$N=50$ $-k=0.05$	$N=50$ $-k=0.30$	$N=100$ $-k=0.05$	$N=100$ $-k=0.20$
100	21.982 4	24.972 3	21.984 3	23.692 6
400	21.993 9	24.985 3	21.961 8	23.707 3
1 000	21.995 5	24.987 3	21.963 1	23.708 8
2 000	21.994 2	24.986 0	21.961 7	23.707 3
3 000	21.976 0	24.986 6	21.962 1	23.707 8
5 000	21.995 9	24.988 1	21.962 8	23.708 6
本文的解析解	21.975 1	24.985 8	21.960 9	23.706 6

以上两个表中除最后一行的解析解是由本文提供，其余的数值解均取自文献 [16]，所有数字均是公平敲定价的贴现值. 由以上表中的数字可以看出，随着模拟路径的增加，数值解收敛于本文的解析解.

4　远期起始方差互换

本节将远期起始方差互换公平敲定价的计算问题转化为普通方差互换公平敲定价的计算问题，从而只要普通方差互换的公平敲定价有解析解，则远期起始方差互换的公平敲定价也有解析解.

令 $N_2>N_1>0$，$T_s=N_1\Delta T$，$T_e=N_2\Delta T$，一个于 T_s 时刻开始，T_e 时刻到期的远期起始方差互换合约的已实现方差为

$$RV(N_1\Delta T,N_2-N_1,N_2\Delta T)=\frac{1}{(N_2-N_1)\Delta T}\sum_{i=N_1+1}^{N_2}\left[\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right]^2 \tag{19}$$

构建两个普通的方差互换合约，第一个 0 时刻开始 T_s 时刻到期，第二个 0 时刻开始 T_e 时刻到期. 由式(1) 有

$$RV(0,N_1,N_1\Delta T)=\frac{1}{N_1\Delta T}\sum_{i=1}^{N_1}\left[\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right]^2 \tag{20}$$

$$RV(0,N_2,N_2\Delta T)=\frac{1}{N_2\Delta T}\sum_{i=1}^{N_2}\left[\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right]^2 \tag{21}$$

由式(6)、式(19)、式(20) 和式(21) 有

$$K^*_{\mathrm{var1}}=L\times E[RV(0,N_1,N_1\Delta T)]=\frac{L}{N_1\Delta T}\sum_{i=1}^{N_1}\mathrm{E}\left[\left(\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right)^2\right] \tag{22}$$

$$K^*_{\mathrm{var2}}=L\times E[RV(0,N_2,N_2\Delta T)]=\frac{L}{N_2\Delta T}\sum_{i=1}^{N_2}\mathrm{E}\left[\left(\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right)^2\right] \tag{23}$$

$$K^*_{\mathrm{FSvar}}=L\times \mathrm{E}[RV(T_s,N_2-N_1,T_e)]=\frac{L}{(N_2-N_1)\Delta T}\sum_{i=N_1+1}^{N_2}\mathrm{E}\left[\left(\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right)^2\right] \tag{24}$$

由式(22)、式(23) 和式(24) 可得

$$K^*_{\mathrm{var2}}=\frac{L}{N_2\Delta T}\times\left[\frac{N_1\Delta T}{L}K^*_{\mathrm{var1}}+\frac{(N_2-N_1)\Delta T}{L}K^*_{\mathrm{FSvar}}\right]$$

整理上式得

$$K^*_{\mathrm{FSvar}}=\frac{N_2K^*_{\mathrm{var2}}-N_1K^*_{\mathrm{var1}}}{N_2-N_1} \tag{25}$$

可见，利用式(25) 和普通方差互换的公平敲定价可求出远期起始方差换的公平敲定价.

5　结束语

本文研究了在一类 SVJ 模型下离散抽样远期起始方差互换公平敲定价的计算问题. 所定义的 SVJ 模型包含了很多现有文献中常用的随机波动模型. 给出了公平敲定价的解析解存在的 3 个充分条件，只要满足这 3 个条件之一就可以按照本文中的方法求出公平敲定价的解析解. 先前关于方差互换公平敲定价解析解的研究都局限于仿射模型之下，而本文的方法对仿射模型和非仿射模型均适用. 在两个典型的随机波动模型下将本文提供的解析解与现有文献中的解析解或数值解相比较，佐证了本文结论的正确性.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

参 考 文 献:

[1] Brockhaus O, Long D. Volatility swaps made simple [J]. Risk, 2000, 2(1): 92 - 96.

[2] Broadie M, Jain A. Pricing and hedging volatility derivatives [J]. The Journal of Derivatives, 2008, 15(3): 7 - 24.

[3] Carr P, Lee R. Hedging variance options on continuous semimartingales [J]. Finance and Stochastics, 2010, 14(2): 179 - 207.

[4] Kallsen J, Muhle-Karbe J, Vob M. Pricing options on variance in affine stochastic volatility models [J]. Mathematical Finance, 2011, 21(4): 627 - 641.

[5] Broadie M, Jain A. The effect of jumps and discrete sampling on volatility and variance swaps [J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2008, 11(8): 761 - 797.

[6] Lian G. Pricing volatility derivatives with stochastic volatility [D]. Wollongong: University of Wollongong, 2010.

[7] Zhu S, Lian G. A closed-form exact solution for pricing variance swaps with stochastic volatility [J]. Mathematical Finance, 2011, 21(2): 233 - 256.

[8] Heston S. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options [J]. The Review of Financial Studies, 1993, 6(2): 327 - 343.

[9] Zheng W, Kwok Y K. Closed form pricing formulas for discretely sampled generalized variance swaps [J]. Mathematical Finance, 2014, 24(4): 855 - 881.

[10] Duffie D, Pan J, Singleton K. Transform analysis and option pricing for affine jump-diffusions [J]. Econometrica, 2000, 68(6): 1343 - 1376.

[11] Hull J, White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities [J]. Journal of Finance, 1987, 42(2): 281 - 300.

[12] Wiggins J. Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates [J]. Journal of Financial Economics, 1987, 19(2): 351 - 372.

[13] Scott L. Option pricing when the variance change randomly: Theory, estimation, and an application [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1987, 22(4): 419 - 438.

[14] Chesney M, Scott L. Pricing European currency options: A comparison of the modified Black-Scholes model and a random variance model [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1989, 24(3): 267 - 284.

[15] Nelson D. Arch models as diffusion approximation [J]. Journal of Econometrics, 1990, 45(1/2): 7 - 38.

[16] Ma J, Xu C. An efficient control variate method for pricing variance derivatives [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 235(1): 108 - 119.

[17] 杜 琨，顾桂定，马俊美. 随机波动模型下定价方差互换的一类控制变量 [J]. 数量经济技术经济研究，2012, 29(7): 148 - 161.

Du Kun, Gu Guiding, Ma Junmei. A class of control variates for pricing variance swap under stochastic volatility models [J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 2012, 29(7): 148 - 161. (in Chinese)

[18] Black F, Scholes M. The valuation of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637 - 654.

[19] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous [J]. Journal of financial economics, 1976, 3(1/2): 125 - 144.

[20] Ball C, Roma A. Stochastic volatility option pricing [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1994, 29(4): 589 - 607.

[21] Bates D. Jump and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche mark in options [J]. Review of Financial Studies, 1996, 9(1): 69 - 107.

[22] Schobel R, Zhu J. Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: An extension [J]. European Finance Review, 1999, 3(1): 23 - 46.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[23] Jourdian B, Sbai M. High Order Discretization Schemes for Stochastic Volatility Models [R]. Ssrn Electronic Journal, 2009.

[24] Stein E M, Stein J C. Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach [J]. Review of Finance Studies. 1991, 4(4): 727－752.

[25] Andersen L, Piterbarg V. Moment explosions in stochastic volatility models [J]. Finance and Stochastics, 2007, 11(1): 29－50.

[26] Shreve S E. Stochastic Calculus for Finance II [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000: 420－421.

Pricing discretely-sampled variance swaps under a class of SVJ models

DU Kun[1,2,3], *ZENG Xu-dong*[1]

1. School of Finance, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China;
2. Postdoctoral Workstation, Guangfa Securities, Guangzhou 510620, China;
3. School of Economic & Management, Northwest University, Xi'an 710069, China

Abstract: We derive analytic formulas for fair strike prices of discretely-sampled (forward-start) variance swaps under a class of stochastic volatility jump (SVJ) models. This class covers a couple of stochastic volatility and jump models which have been studied widely in literature including both affine and non-affine models. We demonstrate a general methodology to find analytic formulas for the class while we obtain explicit solutions for several special cases. Numerical examples show that our solutions give close results to Monte Carlo simulations. Obviously, our explicit solutions beat the latter in speed.

Key words: variance swap; SVJ models; fair strike; analytic formulas

附录:

引理 2 的证明:

证明 这里只证明 $E[I_i^2]$ 的表达式, $E[I_i]$ 的证明类似且更简单. 由泊松过程的独立平稳增量性质以及跳跃幅度的 iid 性和对数正态分布得

$$\begin{aligned}
E[I_i^2] &= E\left[\left(\sum_{j=N(T_{i-1})+1}^{N(T_i)} \ln Y_j\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{j=1}^{N(\Delta T)} \ln Y_j\right)^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\left(\sum_{j=1}^{N(\Delta T)} \ln Y_j\right)^2 \mid N(\Delta T)=n\right] P\{N(\Delta T)=n\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \ln Y_j\right)^2\right] P\{N(\Delta T)=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^{n} (\ln Y_j)^2 + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \ln Y_i \ln Y_j\right] P\{N(\Delta T)=n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\sum_{j=1}^{n} E[(\ln Y_j)^2] + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} E[\ln Y_i] E[\ln Y_j]\right\} P\{N(\Delta T)=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{n(a^2+b^2)+n(n-1)a^2\} \frac{(\lambda\Delta T)^n}{n!} e^{-\lambda\Delta T} \\
&= \lambda\Delta T(\lambda\Delta T a^2 + a^2 + b^2)
\end{aligned}$$

引理 3 的证明:

证明 令 $Y(w) = e^{kw}X(w)$, 则 $X^{\eta}(w) = e^{-\eta k w}Y^{\eta}(w)$. 由伊藤引理和式(3) 得到

$$dY(w) = kme^{kw}dw + \sigma e^{(1-\eta)kw}Y^{\eta}(w)dB(w)$$

从而有 $dY(w)dY(w) = \sigma^2 e^{2(1-\eta)kw}Y^{2\eta}(w)dw$. 再利用伊藤引理得到

$$d[Y^M(u)] = M\left[kme^{kw}Y^{M-1}(w) + \frac{1}{2}(M-1)\sigma^2 e^{2(1-\eta)kw}Y^{M+2\eta-2}(w)\right]dw + M\sigma e^{(1-\eta)kw}Y^{M+\eta-1}(w)dB(w)$$

将上式从 v 到 u 积分, 然后两边取关于 $F(v)$ 的条件期望. 注意, 由于 M－条件满足, 伊藤积分有鞅性质; 再利用 Fubini 定理交换积分顺序得 d 到

$$E[Y^M(w) \mid F(v)] = Y^M(v) + Mkm\int_v^u e^{kw}E[Y^{M-1}(u) \mid F(v)]dw + \frac{1}{2}(M-1)M\sigma^2\int_v^u e^{2(1-\eta)kw}E[Y^{M+2\eta-2}(u) \mid F(v)]dw$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

从而有

$$E\left[X^M(w)\mid F(t)\right]=e^{-Mk(u-v)}X^M(v)+Mkme^{-Mku}\int_v^u e^{Mkw}E\left[X^{M-1}(u)\mid F(t)\right]dw+$$
$$\frac{1}{2}(M-1)M\sigma^2e^{-Mku}\int_v^u e^{Mkw}E\left[X^{M+2\eta-2}(u)\mid F(t)\right]dw$$

引理 4、5、6 的证明:

证明　这 3 个引理的证明类似，这里只证明最复杂的引理 6. 因为 $W(t)$，$B(t)$ 的相关系数为 ρ，从而存在独立于 $B(t)$（以及 $B(t)$ 生成的域流 $\{F(t), 0\leqslant t\leqslant T\}$）的布朗运动 $Z(t)$，使得 $W(t)=\rho B(t)+\sqrt{1-\rho^2}Z(t)$. 因此有

$$\begin{aligned}E\left[R_iI_i\right]&=E\left[\int_{T_{i-1}}^{T_i}f^2(t,X(t))dt\int_{T_{i-1}}^{T_i}f(s,X(s))dW(s)\right]\\&=\rho E\left[\int_{T_{i-1}}^{T_i}f^2(t,X(t))dt\int_{T_{i-1}}^{T_i}f(s,X(s))dB(s)\right]+\sqrt{1-\rho^2}E\left[\int_{T_{i-1}}^{T_i}f^2(t,X(t))dt\int_{T_{i-1}}^{T_i}f(s,X(s))dZ(s)\right]\\&=\rho E\left[\int_{T_{i-1}}^{T_i}f^2(t,X(t))dt\int_{T_{i-1}}^{T_i}f(s,X(s))dB(s)\right]+\sqrt{1-\rho^2}E\left\{\int_{T_{i-1}}^{T_i}f^2(t,X(t))dtE\left[\int_{T_{i-1}}^{T_i}f(s,X(s))dZ(s)\mid F(T_i)\right]\right\}\\&=\rho E\left[\int_{T_{i-1}}^{T_i}f^2(t,X(t))dt\int_{T_{i-1}}^{T_i}f(s,X(s))dB(s)\right]+\sqrt{1-\rho^2}E\left[\int_{T_{i-1}}^{T_i}f^2(t,X(t))dt\times 0\right]\\&=\rho E\left[\int_{T_{i-1}}^{T_i}f^2(t,X(t))d(t)\int_{T_{i-1}}^{T_i}f(s,X(s))dB(s)\right]\end{aligned}\tag{A-1}$$

由平方可积条件，上式中利用了伊藤积分的鞅性; 重复期望性质，以及可测性与独立性.

由式(4) 知 $\int_{T_{i-1}}^{T_i}f(s,X(s))dB(s)=\int_{T_{i-1}}^{T_i}e^{\alpha s+\beta}X^\gamma(s)dB(s)$. 令 $h(s,x)=e^{\alpha s+\beta}x^{\gamma-\eta+1}$，对该函数使用伊藤引理得到

$$d\left[e^{\alpha s+\beta}X^{\gamma-\eta+1}(s)\right]=$$
$$\left\{(\gamma-\eta+1)kme^{\alpha s+\beta}X^{\gamma-\eta}(s)+\left[\alpha-k(\gamma-\eta+1)\right]e^{\alpha s+\beta}X^{\gamma-\eta+1}(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(\gamma-\eta)(\gamma-\eta+1)e^{\alpha s+\beta}X^{\gamma+\eta-1}(s)\right\}ds+$$
$$\sigma(\gamma-\eta+1)e^{\alpha s+\beta}X^\gamma(s)dB(s)$$

将上式两端从 T_{i-1} 到 T_i 积分，代入式(A-1)，从而可将该式中的伊藤积分转化为黎曼积分. 再利用 Fubini 定理可得

$$E\left[R_iI_i\right]=\frac{\rho}{\sigma(\gamma-\eta+1)}\int_{T_{i-1}}^{T_i}E\left[e^{\alpha(2t+T_i)+3\beta}X^{2\gamma}(t)X^{\gamma-\eta+1}(T_i)\right]dt-\frac{\rho}{\sigma(\gamma-\eta+1)}\int_{T_{i-1}}^{T_i}E\left[e^{\alpha(2t+T_{i-1})+3\beta}X^{2\gamma}(t)X^{\gamma-\eta+1}(T_{i-1})\right]dt-$$
$$\frac{\rho km}{\sigma}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\int_{T_{i-1}}^{T_i}E\left[e^{\alpha(2t+s)+3\beta}X^{2\gamma}(t)X^{\gamma-\eta}(s)\right]dsdt-\frac{\rho\left[\alpha-k(\gamma-\eta+1)\right]}{\sigma(\gamma-\eta+1)}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\int_{T_{i-1}}^{T_i}E\left[e^{\alpha(2t+s)+3\beta}X^{2\gamma}(t)X^{\gamma-\eta+1}(s)\right]dsdt-$$
$$\frac{1}{2}\rho\sigma(\gamma-\eta)\int_{T_{i-1}}^{T_i}\int_{T_{i-1}}^{T_i}E\left[e^{\alpha(2t+s)+3\beta}X^{2\gamma}(t)X^{\gamma+\eta-1}(s)\right]dsdt$$

对上式利用重复期望法则以及式(10) 可得式(15).

引理 7、8、9 的证明:

证明　这 3 个引理的证明类似，这里只证明最复杂的引理 9. 将 $\eta=1$ 代入式(11) 得到

$$g_M(u,v,X(v))=e^{-Mk(u-v)}X^M(v)+Mkme^{-Mku}\int_v^u e^{Mkw}g_{M-1}(w,v,X(v))dw+\frac{1}{2}(M-1)M\sigma^2e^{-Mku}\int_v^u e^{Mkw}g_M(w,v,X(v))dw$$

令 $h_M(u,v,X(v))=e^{Mku}g_M(u,v,X(v))$，从而上式可改写为

$$h_M(u,v,X(v))=e^{Mkv}X^M(v)+Mkm\int_v^u e^{kw}h_{M-1}(w,v,X(v))dw+\frac{1}{2}(M-1)M\sigma^2\int_v^u h_M(w,v,X(v))dw$$

上式两边关于 u 求导(视 v，$X(v)$ 为常数) 得到

$$\frac{dh_M(u,v,X(v))}{du}=\frac{1}{2}(M-1)M\sigma^2h_M(u,v,X(v))+Mkme^{ku}h_{M-1}(u,v,X(v))$$

初始条件为 $h_M(v,v,X(v))=e^{Mkv}X^M(v)$. 若 h_{M-1} 已知，则上式是线性非齐次常微分方程. 使用常数变易法解之得到

$$h_M(u,v,X(v))=Mkme^{\frac{1}{2}(M-1)M\sigma^2u}\int_v^u e^{\left[k-\frac{1}{2}(M-1)M\sigma^2\right]w}h_{M-1}(w,v,X(v))dw+e^{Mkv+\frac{1}{2}(M-1)M\sigma^2(u-v)}X^M(v)$$

将 h_M 换为 g_M 可得式(18). 由式(12)，引理结论对 $M=0,1$ 成立. 由式(18) 对 M 使用数学归纳法，可证明引理结论对

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

任意非负整数 M 成立.

Heston 模型下方差互换公平敲定价解析解的表达式

将表达式

$$A_0 = m\Delta T,\ A_1 = \frac{1}{k}(e^{k\Delta T}-1)[X(0)-m],\ E[R_i] = A_0 + A_1 e^{-kT_i};$$

$$b_0 = m^2,\ b_1 = \left(m + \frac{\sigma^2}{2k}\right)[X(0)-m],\ b_2 = m[X(0)-m],$$

$$b_3 = X^2(0) - \frac{2km+\sigma^2}{k}[X(0)-m] - \frac{2km+\sigma^2}{2k}m,\ b_4 = \frac{m\sigma^2}{2k};$$

$$B_0 = b_0\Delta T^2 + \frac{2\Delta T}{k}b_4 - \frac{2(1-e^{-k\Delta T})}{k^2}b_4,\ B_1 = \frac{\Delta T}{k}(2b_2e^{k\Delta T} - b_1e^{k\Delta T} - b_1) + \frac{2(e^{k\Delta T}-1)}{k^2}(b_1-b_2) + \frac{e^{k\Delta T}-1}{k}\Delta T b_1,$$

$$B_2 = \frac{b_3}{k^2}(e^{k\Delta T}-1)^2;$$

$$E[R_i^2] = B_0 + B_1e^{-kT_i} + B_2e^{-2kT_i};$$

$$C_0 = \frac{\rho k}{\sigma}(B_0 - m\Delta T A_0),\ C_1 = \frac{\rho}{\sigma}\left[kB_1 - km\Delta T A_1 + b_1\left(\Delta T - \frac{e^{k\Delta T}-1}{k}\right) - b_2\left(\Delta T e^{k\Delta T} - \frac{e^{k\Delta T}-1}{k}\right)\right],$$

$$C_2 = \frac{\rho}{\sigma}\left[kB_2 - \frac{b_3}{k}(e^{k\Delta T}-1)^2\right];$$

$$E[R_iI_i] = C_0 + C_1e^{-kT_i} + C_2e^{-2kT_i}.$$

代入式(9)，即

$$E\left[\left(\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right)^2\right] = (r-\lambda\varphi)^2\Delta T^2 + [1-(r-\lambda\varphi)\Delta T]E[R_i] - E[R_iI_i] + \frac{1}{4}E[R_i^2] - E[R_i]E[J_i] + 2(r-\lambda\varphi)\Delta T E[J_i] + E[J_i^2]$$

注意，Heston 中无跳跃，所以 $E[J_i] = E[J_i^2] = 0$. 然后再代入式(6)，即

$$K_{var}^* = L\times E[RV(0,N,T)] = L\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}E\left[\left(\ln\frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})}\right)^2\right]$$

Hull 和 White 模型下方差互换公平敲定价解析解的表达式

文献[16]中给出了 $\gamma = 1/2$ 情况下数值解，下面给出该情况下的解析解.

$$A = r^2\Delta T;$$

$$B_1 = \frac{X^2(0)}{2T(-k+\sigma^2)},\ B_2 = \frac{e^{(-2k+\sigma^2)\Delta T}-1}{-2k+\sigma^2} - \frac{e^{-k\Delta T}-1}{-k},\ B_3 = \frac{e^{(-2k+\sigma^2)T}-1}{e^{(-2k+\sigma^2)\Delta T}-1};$$

$$C_1 = \frac{X(0)(1-r\Delta T)}{T},\ C_2 = \frac{e^{-kT}-1}{-k};$$

$$D_1 = \frac{X^{3/2}(0)\rho\sigma}{\frac{1}{2}T(-k+\sigma^2)},\ D_2 = \frac{e^{\frac{3}{2}(-k+\frac{1}{4}\sigma^2)\Delta T}-1}{\frac{3}{2}\left(-k+\frac{1}{4}\sigma^2\right)} - \frac{e^{-k\Delta T}-1}{-k},\ D_3 = \frac{e^{\frac{3}{2}(-k+\frac{1}{4}\sigma^2)T}-1}{e^{\frac{3}{2}(-k+\frac{1}{4}\sigma^2)\Delta T}-1};$$

$$K_{var}^* = A + B_1B_2B_3 + C_1C_2 - D_1D_2D_3$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net