第 18 卷第 12 期 2015 年 12 月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol. 18 No. 12 Dec. 2015

基于前景理论的报童问题：考虑回购和缺货惩罚①

褚宏睿，冉 伦*，张 冉，李金林

(北京理工大学管理与经济学院，北京 100081)

摘要： 在前景理论的框架下，通过引入回购和缺货惩罚因素研究了 3 种情形下报童最优订货量问题；通过证明给出了特定参数条件下前景理论报童最优订货量与经典报童最优订货量的明确关系，进一步给出了前景理论最优订货量与回购价格及缺货惩罚价格的函数变化关系．最后，通过数值分析说明了研究结论．

关键词： 前景理论；报童问题；最优订货量；回购；缺货惩罚

中图分类号： C931.1；O227 **文献标识码：** A **文章编号：** 1007－9807(2015)12－0047－11

0 引 言

单周期报童问题是随机库存理论的基本问题，并且在运作管理中被广泛的研究和使用．经典的报童模型一般假设报童风险中立，目标通常为最大化期望收益或最小化期望损失，且两种目标下均可得到关于订货量的最优分位数解．例如在最大化期望收益目标下，报童以价格 c 订购商品，以价格 p 销售商品，对于分布函数为 $F(\cdot)$ 的不确定需求，报童的最优订货量 q^* 满足 $F(q^*) = (p-c)/p$．报童模型的最优解实际上是通过平衡超订和订货不足而得到的，由于报童模型具有很强的现实背景，并且简单易操作，因而被广泛的使用．

然而，研究者在实践中发现管理者的订货量常常与期望收益最大化的目标不一致，如 Kahn[1] 发现克莱斯勒公司在 1980 年之前有着明显的缺货厌恶行为，其存货量相比于竞争对手通用和福特要大得多．张煜等[2] 指出，由于供应链上下游信息不对称，会产生谎报订货量的问题，学术界将这种现象称为决策偏差．对于决策者不完全理性行为的研究由来已久，为此刘作仪等[3] 在已有文献的基础上，提出了运作管理与行为研究相结合的方式以及行为运作管理的研究范式，在分析行为运作管理的研究现状的基础上，提出了行为运作管理未来研究的基本思路．

对于报童问题，考虑报童风险厌恶特性的研究最初是在期望效用理论[4] 框架下展开的，如 Keren 等[5] 假设需求分布为均匀分布，利用最优一阶条件讨论了风险厌恶报童期望效用模型的最优订货量，得出了最优解的性质及其与效用函数参数的关系．Arcelus 等[6] 在不同的优化目标、不同风险态度下构建了基于期望效用的报童模型，通过数值分析说明了模型的性质．然而，Wang 等[7] 通过研究发现在期望效用理论框架下，当商品的销售价格超过某一值时，风险厌恶报童的订货量将会随着销售价格的增加而减少，直至趋于零，这一异常现象使得 Wang 等怀疑期望效用理论是否适合于研究风险厌恶报童问题．

Kahneman 和 Tversky[8] 针对期望效用理论存在的孤立效应、概率性保险、偏好反转等问题进行了分析说明，并基于确定效应、反射效应、

① 收稿日期：2014－05－27；修订日期：2014－06－29．
基金项目：国家自然科学基金重点资助项目(71432002)；国家自然科学基金资助项目(71172172；71272058；714320902)；高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20121101110054)；北京理工大学国际科技合作专项计划资助项目(GZ2014215101)．
通信作者：冉 伦(1977—)，男，辽宁凌源人，博士，教授，博士生导师．Email：ranlun@bit.edu.cn

损失厌恶和参照依赖提出了前景理论. 前景理论采用依赖参考点的价值函数代替效用函数，采用决策权重函数代替概率. 1992 年他们又将前景理论作了进一步推广，提出了累积前景理论[9]. 经过大量实验和理论的论证，前景理论逐步被接受，并开始在经济、管理等领域得到广泛的应用，许多学者开始在前景理论框架下研究报童问题.

关于前景理论报童问题，许多文献[10-12]的研究都是基于前景理论框架的损失厌恶效用函数，并未完全采用前景理论效用函数及概率权重函数，如李绩才等[10]采用报童模型模拟下游零售商订货，基于损失厌恶效用建立了多个损失厌恶零售商竞争的两阶段供应链收益共享契约协调模型; Wang 等[11]基于损失厌恶效用函数研究了报童问题，给出损失厌恶报童最优订货量所满足的条件并分析了不同参数条件下损失厌恶报童最优订货量与经典报童最优订货量的关系. 相比之下，全面基于前景理论研究报童问题的文献较少，其中邓天虎等[13]基于前景理论研究了报童问题解的存在性和唯一性，并且讨论了最优订货量对于决策者参数的敏感性，周艳菊等[14]针对两产品报童订货问题，基于前景理论建立了订货模型并进行了细致分析及算例说明，但都未对前景理论报童最优订货量与经典报童最优订货量进行比较分析说明. Nagarajan 和 Shechter[15]首次全面地应用前景理论研究了报童问题，并且证明分析了前景理论报童最优订货量与经典报童最优订货量的大小关系，但是他们的研究没有考虑回购与缺货惩罚因素. 现实中，回购现象常发生在零售等行业中，Pasternack[16]最早说明了回购策略可以协调需求与价格独立的基本报童模型，而缺货惩罚对于短期和长期销售的产品都有着显著影响，为此 Anderson 等[17]从运作管理角度研究了如何应对缺货损失. 因此，本文考虑将回购和缺货惩罚因素引入前景理论报童问题的研究中.

本文在文献[15]的研究基础上，应用前景理论分别研究存在回购和缺货惩罚的报童问题，通过理论证明给出两种情况下报童最优订货量与经典报童最优订货量的明确关系，最后通过算例分析进一步验证说明结论.

1 问题描述及符号说明

1.1 前景理论

前景理论(prospect theory，PT)由 Kahneman 和 Tversky[8]建立，与不确定性决策的期望效用理论相比，主要区别在于:

1) 前景理论提出了参考点的概念，指出人在作决策时是基于财富变化量的效用，而不是基于总财富的效用.

2) 前景理论考虑了损失厌恶因素. Kahneman 和 Tversky 在大量实验的基础上指出，人对于相同量的损失要比收益反应强烈，进而说明前景理论效用函数是关于收益的凹函数，关于损失的凸函数，且损失效用曲线比收益效用曲线要陡峭.

3) 前景理论提出了概率权重的概念. Kahneman 和 Tversky 发现，人在面对不确定因素时，会低估大概率事件而高估小概率事件，因此前景理论采用概率权重函数而不是概率函数来做决策.

前景理论的目标函数可表示如下

$$V(x_1, p_1;\ x_2, p_2) = u(x_1)\,\omega(p_1) + u(x_2)\,\omega(p_2)$$

其中 x_1, x_2 表示决策产生的结果; p_1, p_2 为 x_1, x_2 的发生概率; $u(x)$ 表示结果 x 产生的效用; $\omega(p)$ 表示概率 p 的权重.

为了更好的处理多结果决策，Kahneman 和 Tversky 于 1992 年改进了前景理论，提出了累积前景理论(cumulative prospect theory，CPT)，累积前景理论的目标函数为

$$V(x_1, p_1; x_2, p_2; \cdots; x_n, p_n) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)\left[\omega\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right) - \omega\left(\sum_{j=i+1}^{n} p_j\right)\right]$$

本文采用累积前景理论来研究报童问题，研究不考虑损失厌恶因素，并假设报童选择需求区间内任一点作为订货量都会产生正的收益; 表示效用[9,18-19]采用幂函数

$$u(x) = x^{\alpha}\ (0 < \alpha < 1, x \geqslant 0)$$

表示概率权重采用 Prelec[20]提出的权重函数

$$\omega(p) = \mathrm{e}^{-(-\ln p)^{\beta}}\ (0 < \beta < 1)$$

1.2 其它参数及符号说明

c: 单位商品订货价格;

p: 单位商品销售价格;

q: 报童的商品订货量;

v: 未售出商品的单位回购价格;

s: 未满足需求的单位惩罚;

x: 商品的需求变量;

$f(x)$: 变量 x 的密度函数;

$F(x)$: 变量 x 的分布函数;

$\bar{F}(x)$: 变量 x 的生存函数;

$\Pi(q)$: 订货量为 q 时报童所得效用;

q^*_{PT}: 前景理论报童模型最优订货量;

q^*: 经典报童模型最优订货量.

1.3　前景理论报童模型

Schweitzer 和 Cachon[2] 通过实验发现,报童在订购商品时,对于高收益商品的订货量要小于最优订货量,而对于低收益商品却存在超订现象,即产品高收益时 $q < q^*_H$,产品低收益时 $q > q^*_L$,q^*_H 和 q^*_L 分别表示高收益产品和低收益产品的经典报童模型最优订货量. Nagarajan 和 Shechter 试图使用前景理论解释这一现象. 根据前面的模型设定,前景理论下报童模型目标函数可表示为[15]

$$\Pi(q) = \int_0^q (px - cq)^{\alpha}[-\omega'(\bar{F}(x))]\,dx + [q(p-c)]^{\alpha}\omega(\bar{F}(q)) \tag{1}$$

其中 $\omega'(\bar{F}(x))$ 为权重函数关于 x 的导数,即

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{d\omega}{d\bar{F}}\frac{d\bar{F}}{dx}$$

由于 $\frac{d\omega}{d\bar{F}} = e^{-(-\ln\bar{F})^{\beta}}\beta(-\ln\bar{F})^{\beta-1}\frac{1}{\bar{F}} \geqslant 0$,且 $\frac{d\bar{F}}{dx} = -f(x) \leqslant 0$,从而 $\omega'(\bar{F}(x)) \leqslant 0$,$\omega(\bar{F}(x))$ 为关于 x 的减函数.

假设需求量的最大、最小取值分别为 d_{max} 和 d_{min},q 在区间 $[d_{min}, d_{max}]$ 上取值,并且假设 $pd_{min} - cd_{max} > 1$,即任意的 q 值都会带来一个正的收益.

在上述假设下, Nagarajan 和 Shechter 得出了如下引理.

引理 1　前景理论效用函数 $u(x) = x^{\alpha}(0 < \alpha \leqslant 1)$,概率权重函数 $\omega(p) = e^{-(-\ln p)^{\beta}}(0 < \beta \leqslant 1)$,假设 $pd_{min} - cd_{max} > 1$,那么对于低收益商品 $(0.5 < c/p < 1)$,有 $q^*_{PT} \leqslant q^*_L$.

Nagarajan 和 Shechter 通过引理 1 明确给出了前景理论最优订货量与经典报童最优订货量的关系,下面我们将分别研究回购和缺货惩罚情形下前景理论报童最优订货问题. 本文首先分别研究回购和缺货惩罚下的前景理论报童问题,在此基础上同时考虑回购和缺货惩罚因素对于报童最优订货量的影响.

2　回购契约下的前景理论报童模型

本节考虑存在回购契约的前景理论报童模型,即对于未售出的 $\max(q-x, 0)$ 个单位的商品,报童可以价格 v 返还给零售商以回收成本,其中 $v < c$. 与上节一致,假设 $(p-v)d_{min} - d_{max}(c-v) > 1$.

对于存在回购契约的经典报童模型,其最优解为

$$q^* = F^{-1}\left(\frac{p-c}{p-v}\right).$$

前景理论下存在回购契约的报童模型目标函数可表示为

$$\Pi(q) = \int_0^q [(p-v)x - q(c-v)]^{\alpha} \times [-\omega'(\bar{F}(x))]\,dx + [q(p-c)]^{\alpha}\omega(\bar{F}(q)) \tag{4}$$

对于存在回购契约的前景理论报童模型,我们有如下定理.

定理 1　前景理论效用函数 $u(x) = x^{\alpha}(0 < \alpha \leqslant 1)$,概率权重函数 $\omega(p) = e^{-(-\ln p)^{\beta}}(0 < \beta \leqslant 1)$,假设 $(p-v)d_{min} - d_{max}(c-v) > 1$. 则当回购价格 $0 < v \leqslant \frac{p-ec}{1-e}$ 时,有 $q^*_{PT} \leqslant q^*$; 当回购价格 $v > \frac{p-ec}{1-e}$ 且 $\alpha = 1$ 时,有 $q^*_{PT} > q^*$.

证明　用 $q^*_{PT}(\alpha, \beta)$ 表示效用参数为 α,权重参数为 β 时的前景理论报童最优订货量,当 $\alpha = 1$ 且 $\beta = 1$ 时,模型为经典报童问题,即 $q^*_{PT}(1, 1) = q^*$. 对式(4) 关于 q 求导,可得

$$\Pi'(q) = \int_0^q \alpha(c-v)[(p-v)x - (c-v)q]^{\alpha-1} \times \omega'(\bar{F}(x))\,dx + \alpha q^{\alpha-1}(p-c)^{\alpha}\omega(\bar{F}(q)) \tag{5}$$

令 $\alpha = 1$,式(5) 等于零,可得 q 与 β 的关系式为

$$\bar{F}(q) = e^{-(-\ln((c-v)/(p-v)))^{1/\beta}} \tag{6}$$

式(6)两边同时对 β 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}\bar{F}(q)}{\mathrm{d}\beta} = \mathrm{e}^{-(-\ln((c-v)/(p-v)))^{1/\beta}}\left(-\ln\frac{c-v}{p-v}\right)^{1/\beta}\times \ln\left(-\ln\frac{c-v}{p-v}\right)(\beta)^{-2} \tag{7}$$

当 $v < \frac{p-ec}{1-e}$ 时，式(7)为负，$\bar{F}(q)$ 关于 β 单调递减，$q^*_{\mathrm{PT}}(1,\beta)$ 关于 β 单调递增；当 $\frac{p-ec}{1-e} < v < c$ 时，式(7)为正，$\bar{F}(q)$ 关于 β 单调递增，$q^*_{\mathrm{PT}}(1,\beta)$ 关于 β 单调递减.

下面证明对于任意给定的 β，$q^*_{\mathrm{PT}}(\alpha,\beta)$ 关于 α 递增，对式(5)关于 α 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}\Pi'(q)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_0^q \omega'(\bar{F}(x))(c-v)[(p-v)x-(c-v)q]^{\alpha-1}\times [1+\alpha\ln((p-v)x-(c-v)q)]\,\mathrm{d}x + \omega(\bar{F}(q))\,q^{\alpha-1}(p-c)^{\alpha}[1+\alpha\ln(q(p-c))] \tag{8}$$

由于 $1+\alpha\ln((p-v)x-(c-v)q) > 0$ 为关于 x 的单调增函数，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Pi'(q)}{\mathrm{d}\alpha} &\leqslant [1+\alpha\ln(pq-cq)]\int_0^q \omega'(\bar{F}(x))(c-v)((p-v)x-(c-v)q)^{\alpha-1}\mathrm{d}x + \omega(\bar{F}(q))\,q^{\alpha-1}(p-c)^{\alpha}\times\\ &\quad [1+\alpha\ln(q(p-c))] + \omega(\bar{F}(q))\,q^{\alpha-1}(p-c)^{\alpha}[1+\alpha\ln(q(p-c))]\\ &= [1+\alpha\ln(pq-cq)][-q^{\alpha-1}(p-c)^{\alpha}\omega(\bar{F}(q))] + \omega(\bar{F}(q))\,q^{\alpha-1}(p-c)^{\alpha}[1+\alpha\ln(q(p-c))]\\ &= 0\end{aligned}$$

因此 $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\alpha} \geqslant 0$，即对任意给定的 β，$q^*_{\mathrm{PT}}(\alpha,\beta)$ 关于 α 单调递增. 证毕.

由定理 1 可知，当回购价格小于某一确定的值时，前景理论下最优订货量将小于经典报童模型最优订货量；当回购价格大于这一确定数值且参数服从某些条件时，会产生相反的结果. 考虑到回购价格的引入可能会改变产品的收益特征，对于 $p-ec<0$ 的低收益产品，当回购价格较小时，回购价格的引入并未改变产品的收益特征，而当回购价格较大时，低收益产品也可转变为高收益，因而产生了与引理类似的结论. 数值分析部分将会对此进一步具体说明. 此外，对于前景理论最优订货量与回购价格之间的关系，有如下性质说明.

性质 1 回购契约下前景理论最优订货量 q^*_{PT} 关于回购价格 v 单调递增.

证明 由于 q^*_{PT} 满足 $\Pi'(q^*_{\mathrm{PT}}) = 0$，即确定了 q^*_{PT} 与 v 的隐函数. $\Pi'(q)$ 对 v 求导可得

$$\frac{\partial\Pi'(q)}{\partial v} = \int_0^q \alpha[(p-v)x-(c-v)q]^{\alpha-2}\times \{(\alpha-1)(c-v)(p-x) - [(p-v)x-(c-v)q]\}\omega'(\bar{F}(x))\,\mathrm{d}x$$

由于假设 $(p-v)d_{\min}-d_{\max}(c-v) > 1$，可知上式积分为正，从而

$$\frac{\mathrm{d}q^*_{\mathrm{PT}}}{\mathrm{d}v} = -\frac{\frac{\partial\Pi'(q^*_{\mathrm{PT}})}{\partial v}}{\frac{\partial\Pi'(q^*_{\mathrm{PT}})}{\partial q}} > 0$$

证毕.

性质 1 给出了前景理论最优订货量与回购价格的明确关系，而报童最优解问题实际上是寻找缺货与超订的平衡点. 在只考虑回购的情形下，回购价格的增加使得超订带来的损失减小，在单位缺货所减少的收益不变的情况下，引起了最优订货量的增加. 注意到 α 和 β 可取值为 1，即性质结论同样适用于经典报童问题. 性质 1 同时说明，在供应链上供应商适当提高回购价格可以促使有限理性零售商增加订货量，从而提高供应链整体收益.

3 缺货惩罚下的前景理论报童模型

本节考虑存在缺货惩罚的前景理论报童模型，即对于未满足的 $\max(x-q,0)$ 个单位需求，报童接受单位成本为 s 的惩罚，惩罚满足 $s < p-c$. 为保证任意订货量都产生正的收益，假设 $(p-$

$c+s)d_{\min}-sd_{\max}>1$ 且 $pd_{\min}-cd_{\max}>1$.

对于存在缺货惩罚的经典报童模型,其最优解为

$$q^{*}=F^{-1}\left(\frac{p+s-c}{p+s}\right).$$

前景理论下存在缺货惩罚的报童模型目标函数为

$$\Pi(q)=\int_{0}^{q}(px-cq)^{\alpha}[-\omega'(\bar{F}(x))]\mathrm{d}x+\int_{q}^{\infty}[q(p-c+s)-sx]^{\alpha}[-\omega'(\bar{F}(x))]\mathrm{d}x \tag{9}$$

对于存在缺货惩罚的前景理论报童模型,可得如下定理.

定理 2　前景理论效用函数 $u(x)=x^{\alpha}(0<\alpha\leqslant 1)$,概率权重函数 $\omega(p)=\mathrm{e}^{-(-\ln p)^{\beta}}(0<\beta\leqslant 1)$,假设 $pd_{\min}-cd_{\max}>1$ 且 $(p-c+s)d_{\min}-sd_{\max}>1$. 则当 $s\leqslant ec-p$,有 $q_{\mathrm{PT}}^{*}\leqslant q^{*}$,当 $ec-p<s<p-c$ 且 $\alpha=1$ 时,有 $q_{\mathrm{PT}}^{*}>q^{*}$.

证明　式(9)关于 q 求导,得

$$\Pi'(q)=\int_{0}^{q}c\alpha(px-cq)^{\alpha-1}\omega'(\bar{F}(x))\mathrm{d}x-\int_{q}^{\infty}\alpha(p-c+s)[q(p-c+s)-sx]^{\alpha-1}\times\omega'(\bar{F}(x))\mathrm{d}x \tag{10}$$

令 $\alpha=1$,式(10)为零,可得 q 与 β 的关系式为

$$\bar{F}(q)=\mathrm{e}^{-(-\ln(c/(p+s)))^{1/\beta}} \tag{11}$$

将式(11)对 β 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}\bar{F}(q)}{\mathrm{d}\beta}=\mathrm{e}^{-(-\ln(c/(p+s)))^{1/\beta}}\left(-\ln\frac{c}{p+s}\right)^{1/\beta}\times\ln\left(-\ln\frac{c}{p+s}\right)(\beta)^{-2} \tag{12}$$

如果 $s<ec-p$,式(12)为负,$\bar{F}(q)$ 关于 β 单调递减,$q_{\mathrm{PT}}^{*}(1,\beta)$ 关于 β 单调递增;如果 $ec-p<s<p-c$,那么式(12)为正,$\bar{F}(q)$ 关于 β 单调递增,$q_{\mathrm{PT}}^{*}(1,\beta)$ 关于 β 单调递减.

下面证明对于任意给定的 β,$q_{\mathrm{PT}}^{*}(\alpha,\beta)$ 关于 α 递增,对式(10)关于 α 求导得.

$$\frac{\mathrm{d}\Pi'(q)}{\mathrm{d}\alpha}=\int_{0}^{q}\omega'(\bar{F}(x))c(px-cq)^{\alpha-1}\times[1+\alpha\ln(px-cq)]\mathrm{d}x-\int_{q}^{\infty}\omega'(\bar{F}(x))(p-c+s)[q(p-c+s)-sx]^{\alpha-1}[1+\alpha\ln(q(p-c+s)-sx)]\mathrm{d}x \tag{13}$$

由于 $1+\alpha\ln(px-cq)>0$ 关于 x 单调递增,并且 $\omega'(\bar{F}(x))c(px-cq)^{\alpha-1}[1+\alpha\ln(px-cq)]$ 关于 x 单调递增,$1+\alpha\ln(q(p-c+s)-sx)>0$ 关于 x 单调递减,$\omega'(\bar{F}(x))(p-c+s)[q(p-c+s)-sx]^{\alpha-1}$ 关于 x 单调递减,则

$$\frac{\mathrm{d}\Pi'(q)}{\mathrm{d}\alpha}\leqslant[1+\alpha\ln(pq-cq)]\int_{0}^{q}\omega'(\bar{F}(x))c(px-cq)^{\alpha-1}\mathrm{d}x-[1+\alpha\ln(pq-cq)]\times\int_{q}^{\infty}\omega'(\bar{F}(x))(p-c+s)\times[q(p-c+s)-sx]^{\alpha-1}\mathrm{d}x=0$$

因此 $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\alpha}\geqslant 0$,即对于给定的 β,$q_{\mathrm{PT}}^{*}(\alpha,\beta)$ 关于 α 单调递增.　证毕.

由定理 2 可知,与回购情形类似,缺货惩罚因素下前景理论最优订货量与经典报童最优订货量在惩罚成本与参数不同取值条件下有着不同的大小关系,缺货惩罚同样可以改变产品的收益特征. 数值分析部分给出具体说明. 同理,对于前景理论最优订货量与回购价格有如下性质.

性质 2　缺货惩罚下前景理论最优订货量 q_{PT}^{*} 关于缺货惩罚成本 s 单调递增.

证明　对于式 10,由于 q_{PT}^{*} 满足 $\Pi'(q_{\mathrm{PT}}^{*})=0$,即确定了一个 q_{PT}^{*} 与 s 的隐函数. 对 $\Pi'(q)$ 关于 s 求导可得

$$\frac{\partial\Pi'(q)}{\partial s}=-\int_{q}^{\infty}\alpha[q(p-c+s)-sx]^{\alpha-2}\times[(\alpha-1)(p-c+s)(q-x)+q(p-c+s)-sx]\omega'(\bar{F}(x))\mathrm{d}x$$

由于假设$(p-c+s)d_{\min}-sd_{\max}>1$，可知上式积分为正，从而

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{PT}^{*}}{\mathrm{d}\,s}=-\frac{\dfrac{\partial \Pi'(q_{PT}^{*})}{\partial s}}{\dfrac{\partial \Pi'(q_{PT}^{*})}{\partial q}}>0.$$

证毕.

性质 2 给出了前景理论最优订货量与缺货惩罚成本的明确关系，与对性质 1 的分析类似. 在只考虑缺货惩罚的情形下，惩罚成本的增加使得缺货带来的损失增大，在单位商品收益不变的情况下，引起了最优订货量的增加. 注意到α和β可取值为 1，即性质结论同样适用于经典报童问题.

4 存在回购与缺货惩罚的前景理论报童模型

本节研究回购契约下存在缺货惩罚的前景理论报童模型，即对于未售出的$\max(q-x,0)$个单位的产品，报童以价格v返还给零售商以回收成本；同时对于未满足的$\max(x-q,0)$个单位的需求，报童接受单位成本为s的惩罚，惩罚满足$s<p-c$. 为保证任意订货量都产生正的收益，假设$(p-v)d_{\min}-d_{\max}(c-v)>1$且$(p-c+s)d_{\min}-sd_{\max}>1$.

对于存在回购与缺货惩罚的经典报童模型，其最优解为

$$q^{*}=F^{-1}\left(\frac{p+s-c}{p+s-v}\right)$$

前景理论下存在缺货惩罚的报童模型目标函数为

$$\Pi(q)=\int_0^q\left[(p-v)x-q(c-v)\right]^{\alpha}\left[\omega\bar{F}(x)\right]\mathrm{d}x+\int_q^{\infty}\left[q(p-c+s)-sx\right]^{\alpha}\left[-\omega\bar{F}(x)\right]\mathrm{d}x \tag{14}$$

对于存在缺货惩罚的前景理论报童模型，可得如下定理.

定理 3 前景理论效用函数$u(x)=x^{\alpha}(0<\alpha\leqslant 1)$，概率权重函数$\omega(p)=\mathrm{e}^{-(-\ln p)^{\beta}}(0<\beta\leqslant 1)$，假设$pd_{\min}-cd_{\max}>1$. 则当$\frac{c-v}{p+s-v}\geqslant\frac{1}{e}$，有$q_{PT}^{*}\leqslant q^{*}$. 当$\frac{c-v}{p+s-v}<\frac{1}{e}$且$\alpha=1$时，有$q_{PT}^{*}>q^{*}$.

证明 式(14)关于q求导，得

$$\Pi'(q)=\int_0^q\alpha(c-v)\left[(p-v)x-(c-v)q\right]^{\alpha-1}\omega'\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x-\int_q^{\infty}\alpha(p-c+s)\left[q(p-c+s)-sx\right]^{\alpha-1}\omega'\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

令$\alpha=1$，式(15)等于零，可得q与β的关系式为

$$\bar{F}(q)=\mathrm{e}^{-\left(-\ln\left(\frac{c-v}{p+s-v}\right)\right)^{1/\beta}} \tag{16}$$

式(16)两边同时对β求导，得

$$\frac{\mathrm{d}\,\bar{F}(q)}{\mathrm{d}\,\beta}=\mathrm{e}^{-\left(-\ln\left(\frac{c-v}{p+s-v}\right)\right)^{1/\beta}}\left(-\ln\frac{c-v}{p+s-v}\right)^{1/\beta}\times\ln\left(-\ln\frac{c-v}{p+s-v}\right)\beta^{-2} \tag{17}$$

如果$\frac{c-v}{p+s-v}>\frac{1}{e}$，式(17)为负，$\bar{F}(q)$关于$\beta$单调递减，$q_{PT}^{*}(1,\beta)$关于$\beta$单调递增；如果$\frac{c-v}{p+s-v}<\frac{1}{e}$，那么式(17)为正，$\bar{F}(q)$关于$\beta$单调递增，$q_{PT}^{*}(1,\beta)$关于$\beta$单调递减.

下面证明对于任意给定的β，$q_{PT}^{*}(\alpha,\beta)$关于α递增，对式(15)关于α求导，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,\Pi'(q)}{\mathrm{d}\,\alpha}=&\int_0^q\omega'\bar{F}(x)(c-v)\left[(p-v)x-(c-v)q\right]^{\alpha-1}\left[1+\alpha\ln((p-v)x-(c-v)q)\right]\mathrm{d}x-\\&\int_q^{\infty}\omega'\bar{F}(x)(p-c+s)\left[q(p-c+s)-sx\right]^{\alpha-1}\left[1+\alpha\ln(q(p-c+s)-sx)\right]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{18}$$

由于$1+\alpha\ln((p-v)x-(c-v)q)>0$为关于$x$的单调增递增，且$\omega'\bar{F}(x)(c-v)\left[(p-v)x-(c-v)q\right]^{\alpha-1}$也是关于$x$单调递增；又$1+\alpha\ln(q(p-c+s)-sx)>0$关于$x$单调递减，$\omega'\bar{F}(x)(p-c+s)\left[q(p-c+s)-sx\right]^{\alpha-1}$也是关于$x$单调递减，则

$$\frac{\mathrm{d}\,\Pi'(q)}{\mathrm{d}\alpha} \leqslant [1+\alpha\ln(pq-cq)]\int_0^q \omega'\bar{F}(x)(c-v)((p-v)x-(c-v)q)^{\alpha-1}\mathrm{d}x -$$

$$[1+\alpha\ln(pq-cq)]\int_q^{\infty}\omega'\bar{F}(x)(p-c+s)[q(p-c+s)-sx]^{\alpha-1}\mathrm{d}x = 0$$

因此$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\alpha} \geqslant 0$,即对于给定的$\beta$,$q^*_{\mathrm{PT}}(\alpha,\beta)$ 关于 α 单调递增. 证毕.

与前两个定理类似,定理 3 给出了特定参数条件下前景理论最优订货量与经典报童最优订货量的关系. 定理 3 中的参数条件实际上表示了产品的收益特征,具体说明也将在数值分析部分给出. 同理,由性质 1 和性质 2 可得前景理论最优订货量与回购价格及缺货惩罚如下性质.

性质 3　前景理论最优订货量 q^*_{PT} 关于回购价格 v 单调递增,且关于缺货惩罚成本 s 单调递增.

对于性质 3,在同时考虑回购和缺货惩罚的情形下,当惩罚成本 s 固定时,回购价格的增加使得超订带来的损失减小,在单位缺货所减少的收益不变的情况下,引起了最优订货量的增加; 当回购价格 v 固定时,惩罚成本的增加使得缺货带来的损失增大,在单位产品收益不变的情况下,同样引起最优订货量增加.

至此,基于前景理论分别得出了回购、缺货惩罚及同时考虑回购和缺货惩罚 3 种情形下报童问题最优解及其结论. 相比于不考虑回购与缺货惩罚因素的前景理论报童问题,本文明确给出了回购价格和惩罚价格满足特定参数条件时的定理结论及相关性质,研究结论丰富了单周期有限理性库存决策问题,对于零售业、服务业等存在回购或缺货惩罚因素的行业库存管理具有一定的借鉴意义.

5　数值算例

下面将在不同的效用函数参数 α、权重函数参数 β 下模拟分析报童最优订货量,假设需求为区间 [901,1 200] 上的均匀变量,产品单位销售价格 $p=12$,高收益时商品单位订货价格 $c_{\mathrm{H}}=3$,低收益时产品单位订货价格 $c_{\mathrm{L}}=9$,从而经典报童模型中产品的最优订货量分别为 $q^*_{\mathrm{H}}=1\,125$ 和 $q^*_{\mathrm{L}}=975$.

参数 α 的取值分别为 0.37 [18],0.52 [19],0.88 [3],由于定理中存在 $\alpha=1$ 的情形,因而数值实验中也进行分析; 参数 β 的取值分别为 0.60,0.74,0.88 [15,19].

5.1　回购契约下的前景理论报童模型

对于低收益产品$\frac{p-ec}{1-e}=7.254$,将回购价格分别设为 6,7.254,8. 由表 1 可知,当回购价格 $v=6$ 时,前景理论最优订货量小于经典报童问题最优订货量,即 $q^*_{\mathrm{PT}}<q^*_{\mathrm{L}}$; 当回购价格 $v=7.254$ 时,前景理论最优订货量与经典报童最优订货量基本保持一致; 当回购价格 $v=8$,前景理论最优订货量大于经典报童最优订货量,此时注意到 $\alpha\neq 1$ 时 $q^*_{\mathrm{PT}}>q^*$ 仍然成立; 数值分析结果与定理 1 一致. 观察表 1 中每一行可知,不管 α 与 β 取值如何,前景理论最优订货量均关于回购价格 v 单调递增,从而验证了性质 1.

对于高收益商品 $v>\frac{p-ec}{1-e}$ 恒成立,将回购价格分别设为 1,2. 由表 2 可知,前景理论最优订货量大于经典报童问题最优订货量,即 $q^*_{\mathrm{PT}}>q^*_{\mathrm{H}}$; 当 $\alpha=1$ 时,最优订货量随着 β 值的增大而递减,验证了定理 1 的结论,并且当 α 取值接近 1 时,此结论仍然成立,因此推测对于风险厌恶程度不是十分强烈的报童,其前景理论最优订货量大于经典报童最优订货量. 与表 1 一致,前景理论最优订货量均关于回购价格 v 单调递增.

表 1 低收益产品回购契约下报童最优订货量

Table 1 Newsvendor's optimal order quantities of low-profit products when considering buyback contract

α	β	前景理论最优订货量		
		$v = 6$	$v = 7.254$	$v = 8$
0.37	0.60	1 022	1 082	1 140
	0.74	1 030	1 082	1 130
	0.88	1 038	1 082	1 124
0.52	0.60	1 024	1 085	1 142
	0.74	1 032	1 084	1 132
	0.88	1 040	1 084	1 125
0.88	0.60	1 031	1 093	1 148
	0.74	1 038	1 090	1 137
	0.88	1 044	1 089	1 129
1.00	0.60	1 033	1 096	1 150
	0.74	1 040	1 092	1 138
	0.88	1 046	1 090	1 130
	1.00	1 050	1 090	1 100

表 2 高收益产品回购契约下报童最优订货量

Table 2 Newsvendor's optimal order quantities of high-profit products when considering buyback contract

α	β	前景理论最优订货量	
		$v = 1$	$v = 2$
0.37	0.60	1 148	1 199
	0.74	1 157	1 185
	0.88	1 148	1 175
0.52	0.60	1 171	1 199
	0.74	1 158	1 185
	0.88	1 149	1 176
0.88	0.60	1 175	1 196
	0.74	1 162	1 186
	0.88	1 152	1 177
1.00	0.60	1 176	1 196
	0.74	1 163	1 178
	0.88	1 152	1 177
	1.00	1 145	1 170

5.2 缺货惩罚下的前景理论报童模型

对于低收益产品 $ec - p = 12.46$，由于 $s < p - c = 3$，所以 $s < ec - p$，将缺货惩罚成本分别设为 1，2. 由表 3 可知前景理论最优订货量小于经典报童问题最优订货量，即 $q_{\mathrm{PT}}^{*} < q_{\mathrm{L}}^{*}$.

表 3 低收益产品缺货惩罚下报童最优订货量

Table 3 Newsvendor's optimal order quantities of low-profit products when considering stockout penalty

α	β	前景理论最优订货量	
		$s = 1$	$s = 2$
0.37	0.60	950	964
	0.74	964	979
	0.88	977	991
0.52	0.60	950	965
	0.74	965	980
	0.88	978	993
0.88	0.60	952	967
	0.74	968	983
	0.88	982	997
1.00	0.60	953	968
	0.74	969	985
	0.88	983	998
	1.00	992	1007

对于高收益产品 $s > ec - p = -3.85$，由于 $s < p - c = 9$，因此将缺货惩罚分别设为 1，2，3，5，8. 由表 4 可知与定理 2 的证明一致，前景理论最优订货量关于参数 α 单调递增; 当 $\alpha \to 1$ 时，前景理论最优订货量关于参数 β 单调递减. 且在不同的惩罚值下，前景理论最优订货量大部分情况下均不小于经典报童问题最优订货量，即 $q_{\mathrm{PT}}^{*} \geqslant q_{\mathrm{H}}^{*}$. 表 3 和表 4 也说明了前景理论最优订货量均关于缺货惩罚价格 s 单调递增.

表 4 高收益产品缺货惩罚下报童最优订货量

Table 4 Newsvendor's optimal order quantities of high-profit products when considering stockout penalty

α	β	前景理论最优订货量				
		$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 5$	$s = 8$
0.37	0.60	1 129	1 137	1 143	1 153	1 164
	0.74	1 130	1 137	1 142	1 151	1 161
	0.88	1 128	1 134	1 139	1 147	1 156
0.52	0.60	1 131	1 139	1 145	1 155	1 165
	0.74	1 132	1 138	1 144	1 152	1 162
	0.88	1 130	1 135	1 140	1 148	1 157
0.88	0.60	1 137	1 144	1 149	1 159	1 168
	0.74	1 136	1 142	1 147	1 156	1 165
	0.88	1 133	1 138	1 143	1 151	1 159
1.00	0.60	1 138	1 145	1 151	1 160	1 169
	0.74	1 138	1 144	1 149	1 157	1 166
	0.88	1 134	1 139	1 144	1 152	1 160
	1.00	1 131	1 136	1 140	1 147	1 145

5.3　回购与缺货惩罚下的前景理论报童模型

对于低收益产品 $c=9$，$p=12$ 时有 $ec-p=12.465$，由于 $s<p-c=3$ 且 $v<9$，将缺货惩罚分别设为 1，2；回购价格分别设为 2，5，8，则当 $v=8$ 时有 $s+(e-1)v>ec-p$，即 $\frac{c-v}{p+s-v}<\frac{1}{e}$，参数的其余取值情况均有 $\frac{c-v}{p+s-v}>\frac{1}{e}$，模拟结果见表5. 由表5 可知当 $v=2$，5 时，前景理论最优订货量小于经典报童问题最优订货量，即 $q_{PT}^*<q_L^*$；当 $v=8$ 且 $\alpha=1$ 时，有 $q_{PT}^*>q_L^*$，数值试验结果与定理结论一致. 此外由表 5 还可知，当 $v=8$ 且 $\alpha\neq1$ 时，$q_{PT}^*>q_L^*$ 仍然成立.

可知，对于高收益产品 $\frac{c-v}{p+s-v}<\frac{1}{e}$ 恒成立，即 $q_{PT}^*\geqslant q^*$. 由于 $s<p-c=9$ 且 $v<3$，将缺货惩罚成本分别设为 2，5，8；回购价格分别设为 1，2，模拟结果见表 6，可知与定理 3 的证明一致，前景理论最优订货量关于参数 α 单调递增；当 $\alpha=1$ 时，前景理论最优订货量关于参数 β 单调递减. 此外，数值模拟结果表明当 $\alpha\neq1$ 时也有前景理论最优订货量关于参数 β 单调递减，且 $q_{PT}^*\geqslant q^*$. 表5 和表6 也说明了前景理论最优订货量均分别关于回购价格 v 及缺货惩罚价格 s 单调递增.

表 5　低收益产品回购和缺货惩罚下报童最优订货量

Table 5 Newsvendor's optimal order quantities of low-profit products when considering buyback contract and stockout penalty

α	β	前景理论最优订货量					
		$s=1$			$s=2$		
		$v=2$	$v=5$	$v=8$	$v=2$	$v=5$	$v=8$
0.37	0.60	968	1 016	1 152	986	1 039	1 166
	0.74	982	1 028	1 147	1 000	1 049	1 160
	0.88	994	1 037	1 141	1 010	1 056	1 152
0.52	0.60	969	1 018	1 154	987	1 042	1 167
	0.74	984	1 031	1 149	1 001	1 051	1 161
	0.88	996	1 039	1 142	1 012	1 058	1 153
0.88	0.60	972	1 024	1 159	991	1 048	1 171
	0.74	988	1 036	1 152	1 006	1 057	1 164
	0.88	1 000	1 044	1 145	1 017	1 063	1 156
1.00	0.60	973	1 026	1 160	992	1 051	1 172
	0.74	989	1 038	1 154	1 007	1 059	1 165
	0.88	1 001	1 046	1 146	1 018	1 064	1 157
	1.00	1 010	1 050	1 140	1 026	1 067	1 150

表 6　高收益产品回购和缺货惩罚下报童最优订货量

Table 6 Newsvendor's optimal order quantities of high-profit products when considering buyback contract and stockout penalty

α	β	前景理论最优订货量					
		$v=1$			$v=2$		
		$s=2$	$s=5$	$s=8$	$s=2$	$s=5$	$s=8$
0.37	0.60	1 172	1 181	1 187	1 199	1 199	1 199
	0.74	1 165	1 174	1 181	1 187	1 192	1 193
	0.88	1 157	1 166	1 173	1 180	1 185	1 188
0.52	0.60	1 175	1 182	1 187	1 199	1 199	1 199
	0.74	1 166	1 175	1 181	1 188	1 192	1 194
	0.88	1 158	1 167	1 173	1 180	1 185	1 188
0.88	0.60	1 175	1 184	1 189	1 194	1 199	1 199
	0.74	1 168	1 177	1 183	1 189	1 192	1 194
	0.88	1 160	1 169	1 175	1 181	1 186	1 189
1.00	0.60	1 176	1 185	1 189	1 194	1 199	1 199
	0.74	1 169	1 178	1 183	1 189	1 192	1 195
	0.88	1 161	1 170	1 175	1 182	1 186	1 189
	1.00	1 154	1 163	1 168	1 175	1 180	1 183

6　结束语

本文基于前景理论研究了报童问题，在已有研究文献的基础上，采用前景理论价值函数和概率权重函数，通过引入回购因素和缺货惩罚因素，分别证明并给出了前景理论下考虑回购与缺货惩罚以及同时考虑两种情形的报童最优订货量与经典报童模型最优订货量的关系. 研究表明，在满足特定参数条件时，前景理论最优订货量与经典报童最优订货量有着明确的大小关系，并且前景理论最优订货量分别关于回购价格及缺货惩罚价格单调递增. 进一步分析表明，回购与缺货惩罚因素通过特定的参数条件保持或改变了产品的收益特征，进而影响了最优订货量.

本文定理结论有多处是在假设 $\alpha=1$ 时给出的，但数值试验发现当 $\alpha\neq1$ 时结论仍然可能成立，在后续的研究中考虑通过确定 α 的取值范围以明确前景理论最优订货量与经典报童最优订货量的关系. 此外，本文并未考虑报童参考点对于最优订货量的影响，后续将进一步对此研究.

参 考 文 献:

[1] Kahn J A. Why is production more volatile than sales? Theory and evidence on the stockout-avoidance motive for inventory-holding [J]. The Quarterly Journal of Economics, 1992, 107(2): 481 – 510.

[2] 张 煜, 汪寿阳. 基于批发价格契约的质量成本审查模型分析 [J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(8): 1481 – 1488.

Zhang Yu, Wang Shouyang. Analysis of quality cost audit model based on wholesale price contract [J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2011, 31(8): 1481 – 1488. (in Chinese)

[3] 刘作仪, 查 勇. 行为运作管理: 一个正在显现的研究领域 [J]. 管理科学学报, 2009, 12(4): 64 – 74.

Liu Zuoyi, Zha Yong. Behavioral operations management: An emerging research field [J]. Journal of Management Sciences of China, 2009, 12(4): 64 – 74. (in Chinese)

[4] Von Neumann J, Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior [M]. commemorative edition, Princeton: Princeton University Press, 2007.

[5] Keren B, Pliskin J S. A benchmark solution for the risk-averse newsvendor problem [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 174(3): 1643 – 1650.

[6] Arcelus F J, Kumar S, Srinivasan G. Risk tolerance and a retailer's pricing and ordering policies within a newsvendor framework [J]. Omega, 2012, 40(2): 188 – 198.

[7] Wang C X, Webster S, Suresh N C. Would a risk-averse newsvendor order less at a higher selling price? [J]. European Journal of Operational Research, 2009, 196(2): 544 – 553.

[8] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk [J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263 – 292.

[9] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty [J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297 – 323.

[10] 李绩才, 周永务, 肖 旦, 等. 考虑损失厌恶 – 对多型供应链的收益共享契约 [J]. 管理科学学报, 2013, 16(2): 71 – 82.

Li Jicai, Zhou Yongwu, Xiao Dan, et al. Revenue-sharing contract in supply chains with single supplier and multipleloss-averse retailers [J]. Journal of Management Sciences in China, 2013, 16(2): 71 – 82. (in Chinese)

[11] Wang C X, Webster S. The loss-averse newsvendor problem [J]. Omega, 2009, 37(1): 93 – 105.

[12] Herweg F. The expectation-based loss-averse newsvendor [J]. Economics Letters, 2013, 120(3): 429 – 432.

[13] 邓天虎, 黄四民. 基于预期理论的报童模型及敏感性分析 [J]. 管理评论, 2009, 21(6): 108 – 112.

Deng Tianhu, Huang Simin. Newsvendor model under prospect theory and sensitivity analysis [J]. Management Review, 2009, 21(6): 108 – 112. (in Chinese)

[14] 周艳菊, 应仁仁, 陈晓红, 等. 基于前景理论的两产品报童的订货模型 [J]. 管理科学学报, 2013, 16(11): 17 – 29.

Zhou Yanju, Ying Renren, Chen Xiaohong, et al. Two-product newsboy problem based on prospect theory [J]. Journal of Management Sciences in China, 2013, 16(11): 17 – 29. (in Chinese)

[15] Nagarajan M, Shechter S. Prospect theory and the newsvendor problem [J]. Management Science, 2014, 60(4): 1057 – 1062.

[16] Pasternack, B A. Optimal pricing and return policies for perishable commodities [J]. Marketing Science, 1985, 4(2): 166 – 176.

[17] Anderson E T, Fitzsimons G J, Simester D. Measuring and mitigating the costs of stockouts [J]. Management Science, 2006, 52(11): 1751 -1763.

[18] Camerer C F, Ho T H. Violations of the betweenness axiom and nonlinearity in probability [J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1994, 8(2): 167 -196.

[19] Wu G, Gonzalez R. Curvature of the probability weighting function [J]. Management Science, 1996, 42(12): 1676 -1690.

[20] Prelec D. The probability weighting function [J]. Econometrica, 1998, 66(3): 497 -527.

[21] Schweitzer M E, Cachon G P. Decision bias in the newsvendor problem with a known demand distribution: Experimental evidence [J]. Management Science, 2000, 46(3): 404 -420.

Prospect theory for newsvendor problems: Considering buyback and stock-out penalty

CHU Hong-rui, RAN Lun, ZHANG Ran, LI Jin-lin

School of Management and Economics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract: In the framework of prospect theory, the newsvendor problems are investigated by considering both-buyback and stockout penalty in three situations respectively. We analyze the relationship of the optimal order quantities between prospect theory and classic newsvendor based on some parameter conditions , and then give the monotonicity of the optimal order quantitieswithbuyback price and stockout penalty. Finally, the numerical results are carried out to support our conclusions.

Key words: prospect theory; newsvendor problem; optimal order quantities; buyback; stockout penalty