

固定需求交通网络的一般系统最优模型与性质^①

吴文祥¹, 黄海军²

(1. 北方工业大学城市道路交通智能控制技术北京市重点实验室, 北京 100144;
2. 北京航空航天大学经济管理学院, 北京 100191)

摘要: 考虑用户社会经济特征和收入水平的差异性, 在固定需求异质用户交通网络中, 构建了一般系统最优数学规划模型并给出了一阶最优性条件, 该模型适用于任何连续或有限间断点分布的用户时间价值. 进一步分析了一般系统与标准系统以及多用户类系统最优模型之间的关系. 研究表明: 当所有用户的时间价值一致时, 一般系统最优模型退化为标准系统最优模型; 当用户时间价值呈阶梯分布时, 一般系统最优模型与多用户类系统最优模型是等价的.

关键词: 固定需求网络; 时间价值; 用户均衡; 系统最优

中图分类号: U491 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2015)12-0058-10

0 引言

随着城市化进程的加快和社会经济的迅速发展, 机动车保有量和道路交易量急剧增加, 交通供需不平衡的矛盾日益尖锐, 交通拥挤已成为制约城市经济和社会发展的“瓶颈”之一. 拥挤道路使用收费作为交通需求管理的有效措施之一, 通过对特定时段和路段的车辆实行收费, 调节交通需求, 从时间和空间上疏散交通量, 减少繁忙时段和繁忙路段道路上的交通负荷, 达到缓解交通拥挤、减少交通污染的目的. 新加坡是世界上首个征收交通拥堵费的国家, 自 1975 年起, 对进入在市中心的车辆征收“道路拥堵费”. 英国伦敦和瑞典斯德哥尔摩, 分别于 2003 年和 2007 年对市中心的车辆征收“道路拥堵费”. 2013 年 9 月, 北京市发布“十二五”时期“绿色北京发展建设规划”, 提出将研究制定重点路段或区域交通拥堵收费方案.

在拥挤道路收费理论中, 用户的时间价值 (value of time, VOT) 反映了出行者的社会经济特征和收入水平差异, 在一定程度上表明了出行者

能够或愿意为一次出行支付时间或金钱的程度, 是出行者在时间和费用之间做出权衡的重要影响因素. 传统的网络用户均衡 (user equilibrium) 交通分配模型中假设具有一致的时间价值, 即网络中的用户都是同质的. 针对一般同质用户网络, Yang 和 Huang^[1-2] 利用最优化方法深入研究了固定需求和弹性需求下的边际成本道路收费理论.

实际上, 由于出行者的社会经济特征和收入水平存在差异性, 出行者的时间价值不尽相同, 出行选择的准则/偏好也不尽相同, 需要考虑其异质性. 在异质用户的固定需求交通网络中, Yang 和 Huang^[3] 研究了离散时间价值情形下, 基于时间计量或成本计量的单目标系统最优问题与多用户均衡问题的等价性. Guo 和 Yang^[4] 考虑固定需求及离散分布时间价值, 研究了系统时间和系统成本最小的双目标优化问题, 证明了支持帕累托最优解成为多用户均衡解的正值匿名路段收费的存在性. Clark 和 Sumalee^[5]、王昕和黄海军^[6] 在弹性需求网络中也证明了支持帕累托最优解成为多

① 收稿日期: 2013-06-19; 修订日期: 2014-06-16.

基金项目: 国家重大基础科学研究“973”计划资助项目(2012CB725401); 国家自然科学基金资助项目(71071004; 71271004; 71471002); 国家高技术研究发展计划(863计划)资助项目(2012AA112401).

作者简介: 吴文祥(1972—), 男, 安徽贵池人, 博士, 副教授. Email: wuwxs16@163.com

用户均衡解的正值匿名路段收费的存在性. Nagurey 和 Dong^[7] 运用有限维变分不等式方法研究了具有弹性需求和非对称出行成本函数的双准则交通分配问题. 田琼和刘鹏^[8] 研究了基于若干类异质用户的高峰期公交出行均衡问题.

连续分布时间价值比固定时间价值要合理^[9-10]. 许多学者在两条路径的简单网络中研究了基于连续分布时间价值的交通分配问题^[11-13]. Leurent^[14] 和 Dial^[15-16] 在实际网络中研究了基于随机连续分布时间价值的确定用户均衡的交通分配问题. Cantarella 和 Binetti^[17]、Meng 等^[18] 研究了基于 Probit 的随机用户均衡的交通分配问题. Marcotte 等^[19] 用无穷维变分不等式方法讨论连续时间价值分布的双准则确定性交通均衡问题. Marcotte 和 Zhu^[20] 运用变分不等式将 Yang 和 Huang^[3] 的工作拓展到连续时间价值(无限用户类)情形.

众所周知,系统最优模型是拥挤道路使用收费的理论基础. 一方面,拥挤收费的目标是为了实现系统最优;另一方面,最优拥挤收费应等于边际用户社会成本与边际用户个人成本之差,即拥挤的外部效果^[21]. 但是,以往文献只给出了同质用户网络的系统最优模型和多用户类网络的系统最优模型,没有给出适用于一般形式用户时间价值分布的系统最优模型. 基于此,本文将 Yang 和 Huang^[3] 的工作拓展到一般形式的时间价值分布情形,提出一般系统最优数学规划模型,并进一步研究模型性质. 该系统最优模型是在一般形式时间价值分布的异质用户的理论意义和现实意义.

1 模型与算法

假定交通网络 $G(N, A)$, N 为网络节点集合, A 为路段集合 $a \in A$. 任意路段 $a \in A$ 旅行时间是其流量的连续单调递增函数,即 $\frac{dt_a(v_a)}{dv_a} \geq 0$. 设 w 为 OD 对(origin-destination pair) 集合 $\mu \in W$; R_w 是 OD 对 w 之间路径集合 $r \in R_w$, OD 对 w 之间有 $|R_w| \geq 2$ 条路径; d_w 是 OD 对 w 的需求; $f_w^{(r)}$ 表示 OD 对 w 之间路径 r 的流量, $f = (\dots, f_w^{(r)}, \dots)^T$; $S_w^{(r)}$ 表示 OD 对 w 之间选择路径 r 的用户集合. 定

义路径变量 $k = 1, 2, \dots, |R_w|$, 其旅行时间满足 $t_w^{(1)}(f) \geq t_w^{(2)}(f) \geq \dots \geq t_w^{(|R_w|)}(f)$. $\delta_{ar}^{(w)}$ 表示路段 - 路径关联矩阵上的一个元素, 如果 OD 对 w 之间的路径 r 包含路段 a , 其值为 1, 否则为 0. 将用户的时间价值降序排列, 即时间价值 $\beta_w(x)$ 是单调递减函数, 其中变量 x 表示第 x 个用户, 若 $\beta_w(x)$ 是连续函数, 则 $\frac{d\beta_w(x)}{dx} \leq 0$, 见图 1.

针对异质用户网络, 基于成本计量的系统最优必须满足较高时间价值的用户必须选择较低旅行时间的路径, 较低时间价值的用户必须选择较高旅行时间的路径, 如图 2,

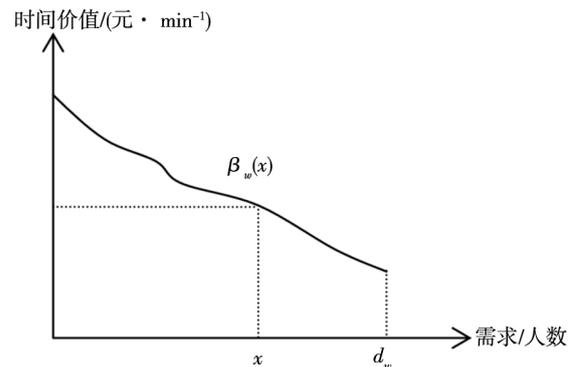


图 1 OD 对 w 用户的时间价值分布

Fig. 1 VOT distribution between OD pair w

否则就可以通过改变原来的用户的路径选择结果来降低系统总成本.

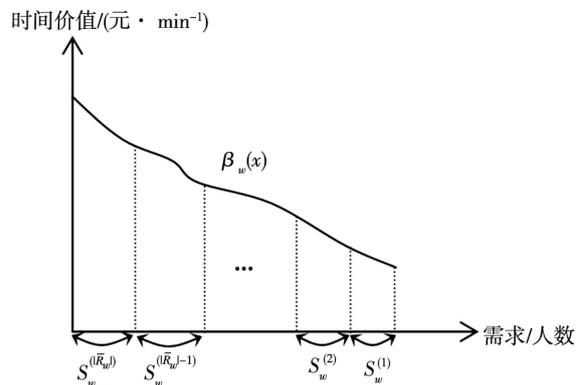


图 2 一般系统最优 OD 对 w 的路径流量分布

Fig. 2 Generalized system optimal path flow pattern between OD pair w

从图 2 可以看出, 从第 $\sum_{k=r+1}^{|R_w|} f_w^{(k)}$ 个用户到 $\sum_{k=r}^{|R_w|} f_w^{(k)}$ 个用户都选择路径 r , 路径 r 上的用户总时

间价值是 $\int_0^{f_w^{(r)}} \beta_w \left(\sum_{k=r+1}^{|R_w|} f_w^{(k)} + x \right) dx$, 路径 r 上的用户总成本 $t_w^{(r)}(f) \int_0^{f_w^{(r)}} \beta_w \left(\sum_{k=r+1}^{|R_w|} f_w^{(k)} + x \right) dx$. 基于此, 可以构建基于成本计量的系统最优 (cost-based system optimum, CSO) 模型为

$$\min_f Z(f) = \sum_{w \in W} \sum_{r=1}^{|R_w|} t_w^{(r)}(f) \int_0^{f_w^{(r)}} \beta_w \left(\sum_{k=r+1}^{|R_w|} f_w^{(k)} + x \right) dx \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{|R_w|} f_w^{(k)} = d_w, \forall w \in W \quad (2)$$

$$f_w^{(k)} \geq 0, \forall k \in R_w, w \in W \quad (3)$$

其中 $t_w^{(r)} = \sum_{a \in w} t_a(v_a) \delta_{ar}^{(w)}$ 而 $v_a = \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} f_w^{(r)} \delta_{ar}^{(w)}$.

为方便表述, 定义 $\sum_{k=|R_w|+1}^{|R_w|} f_w^{(k)} = 0$. 特别指出, 路径 $k \in \{1, 2, \dots, |R_w|\}$ 是内生的变量, 不同

$$t_w^{(r)} \beta_w \left(\sum_{k=r}^{|R_w|} f_w^{(k)} \right) + \sum_{w \in W} \sum_{h=1}^{|R_w|} \sum_{a \in A} \frac{dt_a(v_a)}{dv_a} \delta_{ar}^{(w)} \delta_{ah}^{(w)} \int_0^{f_w^{(r)}} d\beta_w \left(\sum_{h=k+1}^{|R_w|} f_w^{(k)} + x \right) dx + \sum_{k=1}^{r-1} t_w^{(k)} \int_0^{f_w^{(k)}} \frac{d\beta_w \left(\sum_{h=k+1}^{|R_w|} f_w^{(k)} + x \right)}{df_w^r} dx = g_w^{so, cost}, f_w^{(r)} > 0, r = 1, 2, \dots, |R_w|, w \in W \quad (4)$$

$$t_w^{(r)} \beta_w \left(\sum_{k=r}^{|R_w|} f_w^{(k)} \right) + \sum_{w \in W} \sum_{h=1}^{|R_w|} \sum_{a \in A} \frac{dt_a(v_a)}{dv_a} \delta_{ar}^{(w)} \delta_{ah}^{(w)} \int_0^{f_w^{(h)}} \beta_w \left(\sum_{k=h+1}^{|R_w|} f_w^{(k)} + x \right) dx + \sum_{k=1}^{r-1} t_w^{(k)} \int_0^{f_w^{(k)}} \frac{d\beta_w \left(\sum_{h=k+1}^{|R_w|} f_w^{(k)} + x \right)}{df_w^{(r)}} dx \geq g_w^{so, cost}, f_w^{(r)} = 0, r = 1, 2, \dots, |R_w|, w \in W \quad (5)$$

式(4)和式(5)左边可以解释为在路径 r 上增加一个用户对系统总成本的边际贡献 (边际社会成本). 下面详细解释式(4)和式(5)的经济含义. 式(4)和式(5)左边第1项很好理解, 路径 r 增加一个用户自身的个人出行成本; 第2项是在路径 r 上增加一个用户导致其他经过路径 r 上所有路段的用户总成本的增加值, 如图3. 如路径 r 上流量增加, 路段 a 的流量增加, 路径 p 经过路段 a , 显然路径 p 的旅行时间增加, 所以路径 p 上的用户总出行成本增加, 注意路段 a 可以是路径 r 上的任意路段, 路径 p 可以是经过路段 a 的任意路径; 第3项是在路径 r 上增加一个用户导致同一 OD 对间其他路径总成本的减小值, 如图所示, 如果 $k < r$ 根据公式 $t_w^{(k)}(f) \int_0^{f_w^{(k)}} \beta_w \left(\sum_{h=k+1}^{|R_w|} f_w^{(h)} + x \right) dx$

以往的交通分配模型, 其路径 k 是外生的, 特指 OD 对间的一条具体路径.

显然, 只要时间价值函数 $\beta_w(x)$ 是可积的, 即 $\beta_w(x) (\forall w \in W)$ 是连续函数或有有限间断点的有界函数, CSO 模型就成立. 可见, CSO 模型适用于任何形式的连续分布时间价值或有有限间断点分布的时间价值. 因此, CSO 模型也可被称为一般系统最优 (generalized system optimum, GSO) 模型. 另外, GSO 模型是基于路径的, 一般是非凸的, 可能存在多个局部最优解.

定义

$$\sum_{k=1}^0 t_w^{(k)} \int_0^{f_w^{(k)}} \frac{d\beta_w \left(\sum_{h=k+1}^{|R_w|} f_w^{(k)} + x \right)}{df_w^{(r)}} dx = 0$$

若 $\beta_w(x) (\forall w \in W)$ 连续, 上述 GSO 模型的一阶最优性条件可写成

包含流量 $f_w^{(r)}$, 如果 $f_w^{(r)}$ 增大, 显然 $t_w^{(k)}(f) \times \int_0^{f_w^{(k)}} \beta_w \left(\sum_{h=k+1}^{|R_w|} f_w^{(h)} + x \right) dx$ 减小, 所以路径 r 上增加一个用户导致同一 OD 对的其他路径总成本的减小值等

$$\text{于} \sum_{k=1}^{r-1} t_w^{(k)} \int_0^{f_w^{(k)}} \frac{d\beta_w \left(\sum_{h=k+1}^{|R_w|} f_w^{(k)} + x \right)}{df_w^{(r)}} dx.$$

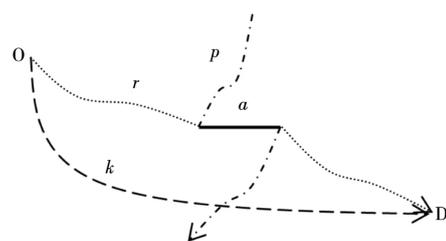


图3 路径 r 与其他路径关系示意图

Fig. 3 Diagrammatical relationship between road r and other roads

式(4)和式(5)表明,当被使用路径上的边际社会成本相等并且小于等于未被使用路径的边际社会成本时,系统达到最优。

2 模型性质

在同质用户的固定需求网络中,所有用户的时间价值一致,系统最优问题是标准的系统最优 (standard system optimum, SSO) 模型。即使在异质用户网络,基于时间计量的系统最优 (time-based system optimum, TSO) 问题也可以被看作 SSO 模型。

定理 1 $\beta_w(x) = \beta, \forall x \in d_w, w \in W$, GSO 模型退化为 SSO 模型

$$\min_f \sum_{a \in A} v_a t_a(v_a) \quad (6)$$

$$\sum_{k \in R_w} f_w^{(k)} = d_w, w \in W \quad (7)$$

$$f_w^{(k)} \geq 0, r \in R_w, w \in W \quad (8)$$

其中 $v_a = \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} f_{rw}^{(r)} \delta_{ar}^{(w)}, t_w^{(r)}(f) = \sum_{a \in W} t_a(v_a) \delta_{ar}^{(w)}$ 。

证明 将 $\beta_w(x) = \beta$ 代入式(1),有

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W} \sum_{r=1}^{|R_w|} t_w^{(r)}(f) \int_0^{f_w^{(r)}} \beta dx &= \beta \sum_{w \in W} \sum_{r=1}^{|R_w|} t_w^{(r)}(f) f_w^{(r)} \\ &= \beta \sum_{a \in A} v_a t_a(v_a) \end{aligned}$$

显然, $\sum_{k=1}^{|R_w|} f_w^{(k)} = d_w$ 可写成 $\sum_{k \in R_w} f_w^{(k)} = d_w$ 。时间价值 β 是常数,不影响优化结果,所以 GSO 模型退化 SSO 模型。

在异质用户网络中,考虑任意 OD 对 $w \in W$ 都有 $M \geq 2$ 类用户, $d_w^{(m)}$ 表示 OD 对 w 的第 m 类用户的需求, $S_w^{(m)}$ 表示 OD 对 w 的第 m 类用户的集合, $m = 1, 2, \dots, M$; $f_{rw}^{(m)}$ 表示 OD 对 w 之间路径 r 上第 m 类用户的流量 $f = (\dots, f_{rw}^{(m)}, \dots)^T$; $v_a^{(m)}$ 表示路段 a 上第 m 类用户的流量, $v_a^{(m)} = \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} f_{rw}^{(m)} \delta_{ar}^{(w)}$, 则路段 a 上所有用户的流量为 $v_a = \sum_{m=1}^M v_a^{(m)}$ 。 β_m 表示第 m 类用户的时间价值,不失一般性,令 $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_M$, 即用户的时间价值呈阶梯分布。

根据 Yang 和 Huang^[3] 基于成本计量的多用

户类系统最优 (multi-class cost-based system optimum, MCSO) 模型可表示为

$$\min_f \sum_{a \in A} \sum_{m=1}^M \beta_m v_a^{(m)} t_a(v_a) \quad (9)$$

$$\sum_{r \in W} f_{rw}^{(m)} = d_w^{(m)}, w \in W, m = 1, 2, \dots, M \quad (10)$$

$$f_{rw}^{(m)} \geq 0, r \in R_w, w \in W, m = 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

其中 $v_a^{(m)} = \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} f_{rw}^{(m)} \delta_{ar}^{(w)}, v_a = \sum_{m=1}^M v_a^{(m)}$ 。

上述 MCSO 模型的一阶最优性条件为:

当

$$f_{rw}^{(m)} > 0, r \in R_w, w \in W, m = 1, 2, \dots, M$$

$$\begin{aligned} \beta_m t_w^{(r)}(f) + \sum_{a \in W} \sum_{k=1}^M \beta_k v_a^{(k)} \frac{dt_a(v_a)}{dv_a} \delta_{ar}^{(w)} &= \\ g_w^{so}(\beta_m)_{\text{cost}} \end{aligned} \quad (12)$$

当

$$f_{rw}^{(m)} = 0, r \in R_w, w \in W, m = 1, 2, \dots, M$$

$$\begin{aligned} \beta_m t_w^{(r)}(f) + \sum_{a \in W} \sum_{k=1}^M \beta_k v_a^{(k)} \frac{dt_a(v_a)}{dv_a} \delta_{ar}^{(w)} &\geq \\ g_w^{so}(\beta_m)_{\text{cost}} \end{aligned} \quad (13)$$

定义 \hat{f} 为 MCSO 模型的最优解,根据其一阶最优性条件,可以得到引理 1。

引理 1 若 $t_w^{(r)}(\hat{f}) > t_w^{(p)}(\hat{f}), \forall r, p \in R_w, w \in W$ 路径 r 与路径 p 上不可能有两种相同类型的用户。

证明 假设路径 $r, p \in R_w$ 上都有第 m 和第 n 类用户 ($m, n \in \{1, 2, \dots, M\}, m \neq n$) 则

$$\begin{aligned} \beta_m t_w^{(r)}(\hat{f}) + \sum_{a \in W} \sum_{k=1}^2 \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} &= \\ g_w^{so}(\beta_m)_{\text{cost}} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \beta_m t_w^{(r)}(\hat{f}) + \sum_{a \in W} \sum_{k=1}^2 \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} &= \\ g_w^{so}(\beta_n)_{\text{cost}} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \beta_n t_w^{(p)}(\hat{f}) + \sum_{a \in W} \sum_{k=1}^2 \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} &= \\ g_w^{so}(\beta_m)_{\text{cost}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \beta_n t_w^{(p)}(\hat{f}) + \sum_{a \in W} \sum_{k=1}^2 \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} &= \\ g_w^{so}(\beta_n)_{\text{cost}} \end{aligned} \quad (17)$$

将式(14)减式(16)有

$$\beta_m(t_w^{(r)}(\hat{f}) - t_w^{(p)}(\hat{f})) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^2 \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} - \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^2 \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} = 0 \quad (18)$$

同理,由式(15)和式(17)得

$$\beta_n(t_w^{(r)}(\hat{f}) - t_w^{(p)}(\hat{f})) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^2 \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} - \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^2 \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} = 0 \quad (19)$$

进一步将式(18)减式(19),可得

$$(\beta_m - \beta_n)(t_w^{(r)}(\hat{f}) - t_w^{(p)}(\hat{f})) = 0$$

既然 $\beta_m \neq \beta_n$, 则 $t_w^{(r)}(\hat{f}) = t_w^{(p)}(\hat{f})$ 与 $t_w^{(r)}(\hat{f}) > t_w^{(p)}(\hat{f})$ 相矛盾. 证毕.

很容易解释引理 1,如果在两条旅行时间不相等的路径上有两种相同类型的用户,就不是系统最优,因为将旅行时间长的路径上时间价值大的用户和旅行时间短的路径上时间价值小的用户在这两条路径之间互换,就可以降低系统总成本.

引理 2 若 $t_w^{(r)}(\hat{f}) > t_w^{(p)}(\hat{f})$, 则 $\beta_w(x) \leq \beta_w(y), \forall x \in S_w^{(r)}, y \in S_w^{(p)}, r, p \in R_w, w \in W$.

证明(数学归纳法) 1) 证明当 $M=2$, 引理 2 成立.

根据引理 1,若 $t_w^{(r)}(\hat{f}) > t_w^{(p)}(\hat{f})$, 路径 r, p 上不可能同时有两种相同类型的用户. 另外,引理 1 隐含了路径 r, p 都被使用. 所以,路径 r, p 上的用户类型只存在两种情形,下面针对两种情形分别加以证明.

I. 路径 r, p 都只有一类用户,引理 2 成立.

反证法 假设引理 2 不成立,则 $\exists x \in S_w^{(r)}, y \in S_w^{(p)}, \beta_w(x) > \beta_w(y)$. 既然 $M=2, \beta_w(x) = \beta_1, \beta_w(y) = \beta_2, \forall x \in S_w^{(r)}, y \in S_w^{(p)}$. 根据式(12)和式(13)有

$$\beta_1 t_w^{(r)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} = g_w^{so}(\beta_1)_{cost} \quad (20)$$

$$\beta_2 t_w^{(r)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} \geq g_w^{so}(\beta_2)_{cost} \quad (21)$$

$$\beta_2 t_w^{(p)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} = g_w^{so}(\beta_2)_{cost} \quad (22)$$

$$\beta_1 t_w^{(p)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} \geq g_w^{so}(\beta_1)_{cost} \quad (23)$$

将式(20)减式(23),可得

$$\beta_1(t_w^{(r)}(\hat{f}) - t_w^{(p)}(\hat{f})) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} - \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} \leq 0 \quad (24)$$

同理,由式(21)和式(22)得

$$\beta_2(t_w^{(r)}(\hat{f}) - t_w^{(p)}(\hat{f})) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} - \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} \geq 0 \quad (25)$$

既然 $t_w^{(r)}(\hat{f}) - t_w^{(p)}(\hat{f}) > 0$ 和 $\beta_1 > \beta_2$, 则式(24)和式(25)不可能同时成立,所以 $\beta_w(x) = \beta_2, \beta_w(y) = \beta_1, \forall x \in S_w^{(r)}, y \in S_w^{(p)}$. 可见,对情形 I 引理 2 成立.

II. 路径 r, p 上只有一条路径有两类用户,引理 2 成立.

反证法 假设引理 2 不成立,则 $\exists x \in S_w^{(r)}, y \in S_w^{(p)}, \beta_w(x) > \beta_w(y)$. 既然 $M=2, \exists x \in S_w^{(r)}, y \in S_w^{(p)}, \beta_w(x) = \beta_1(x), \beta_w(y) = \beta_2$. 若路径 r 上有两类用户,则路径 p 上只有第二类用户,即 $\beta_w(y) = \beta_2, \forall y \in S_w^{(p)}$. 由式(12)和式(13)得

$$\beta_1 t_w^{(r)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} = g_w^{so}(\beta_1)_{cost} \quad (26)$$

$$\beta_2 t_w^{(r)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} = g_w^{so}(\beta_2)_{cost} \quad (27)$$

$$\beta_2 t_w^{(p)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} = g_w^{so}(\beta_2)_{\text{cost}} \quad (28)$$

$$\beta_1 t_w^{(p)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} \geq g_w^{so}(\beta_1)_{\text{cost}} \quad (29)$$

将式(26)减式(29)有

$$\begin{aligned} & \beta_1(t_w^{(r)}(\hat{f}) - t_w^{(p)}(\hat{f})) + \\ & \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} - \\ & \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} \leq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

同理,由式(27)和式(29)得

$$\begin{aligned} & \beta_2(t_w^{(r)}(\hat{f}) - t_w^{(p)}(\hat{f})) + \\ & \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} - \\ & \sum_{a \in w} \sum_{k=1}^M \beta_k \hat{v}_a^{(k)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

由式(30)和式(31)导致

$$(\beta_1 - \beta_2)(t_w^{(r)}(\hat{f}) - t_w^{(p)}(\hat{f})) \leq 0 \quad (32)$$

既然, $\beta_1 > \beta_2$, $t_w^{(r)}(\hat{f}) > t_w^{(p)}(\hat{f})$, $(\beta_1 - \beta_2)(t_w^{(r)}(\hat{f}) - t_w^{(p)}(\hat{f})) > 0$, 则与式(32)相矛盾. 若路径 r 上只有第一类用户, 路径 p 上有两类用户, 也很容易证明与假设相矛盾. 可见, 对情形 II, 引理 2 成立.

总之, 当 $M=2$ 引理 2 成立.

同理, 可以证明当 $M=3$ 引理 2 成立.

2) 假设当 $M=n$ 引理 2 成立.

当 $M=n+1$ 时, 对于前 n 类用户, 引理 2 成立, 即 $t_w^{(r)}(\hat{f}) > t_w^{(p)}(\hat{f})$, $\beta_w(x) \leq \beta_w(y)$, $\forall x \in S_w^{(r)}$, $y \in S_w^{(p)}$, $r, p = 1, 2, \dots, R$.

反证法 假设对于第 $n+1$ 类用户, 引理 2 不成立, 则路径 r 上有第 k ($1 \leq k < n+1$) 类用户, 路径 p 上有第 $n+1$ 类用户, 即 $\exists x \in S_w^r, y \in S_w^p$, $\beta_w(x) = \beta_k, \beta_w(y) = \beta_{n+1}$. 则有

$$\beta_k t_w^{(r)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{j=1}^{n+1} \beta_k \hat{v}_a^{(j)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} = g_w^{so}(\beta_k)_{\text{cost}} \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \beta_{n+1} \beta_k t_w^{(r)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{j=1}^{n+1} \beta_k \hat{v}_a^{(j)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} = \\ & g_w^{so}(\beta_{n+1})_{\text{cost}}, \text{ 若 } f_{rw}^{(n+1)} > 0 \\ & \beta_{n+1} \beta_k t_w^{(r)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{j=1}^{n+1} \beta_k \hat{v}_a^{(j)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ar}^{(w)} \geq \\ & g_w^{so}(\beta_{n+1})_{\text{cost}}, \text{ 若 } f_{rw}^{(n+1)} = 0 \end{aligned} \right. \quad (34)$$

$$\beta_{n+1} t_w^{(p)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{j=1}^{n+1} \beta_k \hat{v}_a^{(j)} \frac{dt_a(\hat{v}_a)}{d\hat{v}_a} \delta_{ap}^{(w)} = g_w^{so}(\beta_{n+1})_{\text{cost}} \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \beta_k t_w^{(p)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{j=1}^{n+1} \beta_k v_a^{(j)} \frac{dt_a(v_a)}{dv_a} \delta_{ap}^{(w)} = \\ & g_w^{so}(\beta_k)_{\text{cost}}, \text{ 若 } f_{pw}^{(k)} > 0 \\ & \beta_k t_w^{(p)}(\hat{f}) + \sum_{a \in w} \sum_{j=1}^{n+1} \beta_k v_a^{(j)} \frac{dt_a(v_a)}{dv_a} \delta_{ap}^{(w)} \geq \\ & g_w^{so}(\beta_k)_{\text{cost}}, \text{ 若 } f_{pw}^{(k)} = 0 \end{aligned} \right. \quad (36)$$

既然 $\beta_k > \beta_{n+1}$, 则由式(33) - 式(36), 可得 $t_w^{(r)}(\hat{f}) = t_w^{(p)}(\hat{f})$. 结果与 $t_w^{(r)}(\hat{f}) > t_w^{(p)}(\hat{f})$ 相矛盾. 所以, 当 $M=n+1$ 时, 引理 2 也成立.

综上所述, 引理 2 成立.

证毕.

引理 2 表明, 旅行时间长的路径上的用户的时间价值小, 旅行时间短的路径上的用户的时间价值大.

定义 $S_w^{r-p} = S_w^{(r)} \cup \dots \cup S_w^{(p)}$, 结合引理 2, 有引理 3.

引理 3 若 $t_w^{(r-1)}(\hat{f}) > t_w^{(r)}(\hat{f}) = t_w^{(p)}(\hat{f}) > t_w^{(p+1)}(\hat{f})$,

则 $\sum_{k=r}^p t_w^{(k)}(\hat{f}) \int_{x \in S_w^{r-p}} \beta_w(x) dx = t_w^{(k)}(\hat{f}) \sum_{m=1}^M \sum_{k=r}^p \beta_m \hat{f}_{kw}^{(m)}$, $\beta_w(y) \leq \beta_w(x) \leq \beta_w(z)$ 其中 $\forall x \in S_w^{r-p}, y \in S_w^{(r-1)}, z \in S_w^{(p+1)}$.

证明 根据引理 2, $\beta_w(y) \leq \beta_w(x) \leq \beta_w(z)$, $\forall x \in S_w^{r-p}, y \in S_w^{(r-1)}, z \in S_w^{(p+1)}$. 根据定义 $t_w^{(r)}(\hat{f}) \geq t_w^{(r+1)}(\hat{f}) \geq \dots \geq t_w^{(p-1)}(\hat{f}) \geq t_w^{(p)}(\hat{f})$. 由 $t_w^{(r)}(\hat{f}) = t_w^{(p)}(\hat{f})$ 得 $t_w^{(r)}(\hat{f}) = t_w^{(r+1)}(\hat{f}) = \dots = t_w^{(p-1)}(\hat{f}) = t_w^{(p)}(\hat{f})$. 所以

$$\sum_{k=r}^p t_w^{(k)}(\hat{f}) \int_{x \in S_w^{r-p}} \beta_w(x) dx =$$

$$t_w^{(k)}(\hat{f}) \sum_{k=r}^p \int_{x \in S_w^{r-p}} \beta_w(x) dx =$$

$$t_w^{(k)}(\hat{f}) \sum_{m=1}^M \sum_{k=r}^p \beta_m \hat{f}_{kw}^{(m)}$$

证毕.

引理 3 表明,具有相同旅行时间的路径上的异质用户可以在这些路径之间进行互换,并不改变系统总成本.

引理 2 表明, MCSO 模型也满足较高时间价值的用户选择较低旅行时间的路径,较低时间价值的用户选择较高旅行时间的路径,与 GSO 模型是一致的.如图 4.结合引理 3, MCSO 模型可以转化为 GSO 模型.基于此,得出定理 2.

定理 2 $\beta_w(x) = \beta_m, \forall x \in S_w^{(m)}, w \in W, m = 1, 2, \dots, M$, GSO 模型与 MCSO 模型等价.

时间价值/元 · min⁻¹

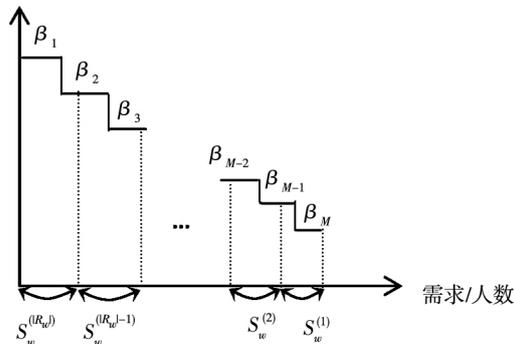


图 4 基于成本计量的系统最优流量分布

Fig. 4 Cost-based optimal path flow pattern

证明 当 $\beta_w(x) = \beta_m, \forall x \in S_w^{(m)}, w \in W, m = 1, 2, \dots, M$, MCSO 模型的目标函数变为

$$Z(f) = \sum_{w \in W} \sum_{r=1}^{|R_w|} t_w^{(r)}(f) \int_0^{f_w^{(r)}} \beta_w(\sum_{k=r+1}^{|R_w|} f_w^{(k)} + x) dx$$

$$= \sum_{w \in W} \sum_{r=1}^{|R_w|} t_w^{(r)}(f) \sum_{m=1}^M f_{rw}^{(m)} \beta_m$$

$$= \sum_{w \in W} \sum_{r=1}^{|R_w|} \sum_{m=1}^M \beta_m f_{rw}^{(m)} t_w^{(r)}(f)$$

$$= \sum_{a \in A} \sum_{m=1}^M \beta_m v_a^{(m)} t_a(v_a)$$

另外,约束条件自然变为 $\sum_{k \in R_w} f_{kw}^{(m)} = d_w^{(m)}, m = 1, 2, \dots, M, w \in W, f_{kw}^{(m)} \geq 0, m = 1, 2, \dots, M, k \in R_w$, 其中 $v_a^{(m)} = \sum_{w \in W, r \in R_w} f_{rw}^{(m)} \delta_{ar}^{(w)}, v_a = \sum_{m=1}^M v_a^{(m)}$.

可见, GSO 模型可以转化为 MCSO 模型. 根据引理 2 和引理 3, MCSO 模型也可以转化为 GSO 模型. 所以, GSO 模型与 MCSO 模型等价. 证毕.

定理 1 和定理 2 表明,基于路段的 SSO 模型和 MCSO 模型与基于路径的 GSO 模型形式不同,但内在本质一致. 总之,当所有用户同质时, GSO 模型退化为 SSO 模型; 当用户的时间价值呈阶梯分布时, GSO 模型与 MCSO 模型是等价的.

3 算 例

3.1 算例 1

算例 1 的交通网络由 4 个节点、2 个 OD 对、4 条路径和 5 条路段组成,如图 5. 各路段的旅行时间函数: $t_1 = 20 + 2v_1, t_2 = v_2, t_3 = v_3, t_4 = 20 + v_4, t_5 = 2v_5$. OD 对 (1, 4) (用“a”表示) 和 OD 对 (2, 4) (用“b”表示) 的交通需求分别为 $d_a = 20, d_b = 30$. OD 对 a 之间有两条路径,路径 1(用“1, a”表示) 只含路段 1, 路径 2(用“2, a”表示) 包括路段 2 和路段 3; OD 对 b 之间也有两条路径,路径 1(用“1, b”表示) 路段 4 与路段 3 组成, 路径 2(用“2, b”表示) 只含路段 5. OD 对 a 与 OD 对 b 的用户时间价值分布函数分别是 $\beta_a(x) = 2 - x/20, x \in [0, 20], \beta_b(x) = 3 - x/30, x \in [0, 30]$.

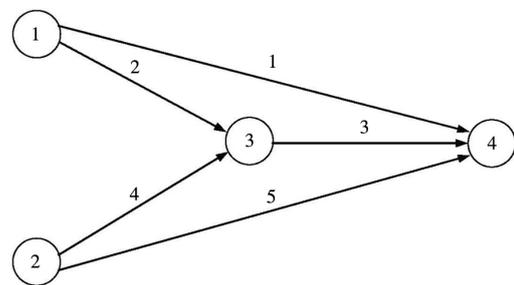


图 5 两个 OD 对的交通网络

Fig. 5 Network with two OD pairs

求解 SSO 模型,最优路径流量分布为 $f_a^{(1)} = 10, f_a^{(2)} = 10, f_b^{(1)} = 10, f_b^{(2)} = 20$; 最优路段流量分布为 $v_1 = 10, v_2 = 10, v_3 = 20, v_4 = 10, v_5 = 20$. 求解 GSO 模型,可得: $f_a^{(1)} = 11.74, f_a^{(2)} = 8.26, f_b^{(1)} = 11.52, f_b^{(2)} = 18.48; v_1 = 11.74, v_2 = 8.2597, v_3 = 11.52, v_4 = 11.52, v_5 = 18.48$.

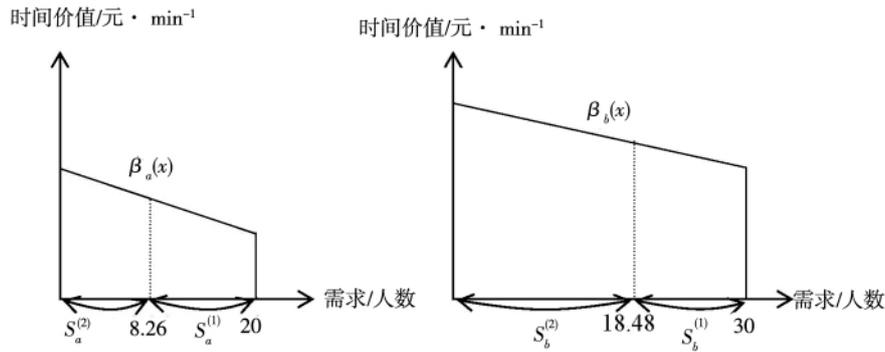


图 6 算例 1 的 GSO 模型的最优路径流量分布

Fig. 6 Path flow pattern of GSO model in the first numerical example

数值结果表明,算例 1 的 SSO 模型与 GSO 模型的路径解和路段解都唯一。另外,SSO 模型只能显示路径选择的累计结果,不能刻画个体的路径选择行为。但是,GSO 模型能够刻画个体的路径选择行为,即时间价值较高的用户选择旅行时间较低的路径,时间价值较低的用户选择旅行时间较高的路径,见图 6。

3.2 算例 2

算例 2 的交通网络由 3 个节点、1 个 OD 对、4 条路径以及 4 条路段组成,如图 7。各路段的旅行时间函数: $t_1 = 60$, $t_2 = 10 + v_2$, $t_3 = 20 + v_3$, $t_4 = 40$ 。OD 对(1,3)之间的四条路径分别用“a, b, c, d”表示。路径 a 含路段 1 与路段 2; 路径 b 含路段 1 与路段 4; 路径 c 含路段 3 与路段 2; 路径 d 含路段 3 与路段 4。网络总需求 100, 用户的时间价值分布函数是 $\beta(x) = 2 - x/100$, $x \in [0, 100]$ 。

求解 SSO 模型,最优路径流量分布满足 $f^a + f^c = 15$, $f^c + f^d = 20$, $f^a + f^b + f^c + f^d = 20$, $f^a, f^b, f^c, f^d \geq 0$; 最优路段流量分布为 $v_1 = 85$, $v_2 = 15$, $v_3 = 20$, $v_4 = 80$ 。GSO 模型路径解为 $f^a = 17.52$, $f^b = 65.56$, $f^c = 0$, $f^d = 16.92$; 其路段解为 $v_1 = 83.08$, $v_2 = 17.52$, $v_3 = 16.92$, $v_4 = 82.48$ 。

和算例 1 不同,算例 2 中 SSO 模型的路段流解唯一,但路径流量有无穷个解。有趣的是,虽然 GSO 模型不是凸规划,但是其路径流量和路段流解都唯一。路径流量解见图 8。

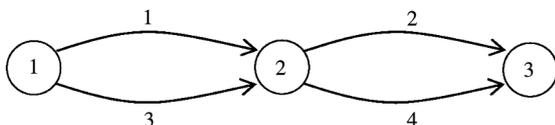


图 7 一个 OD 对的交通网络
Fig. 7 Network with one OD pair

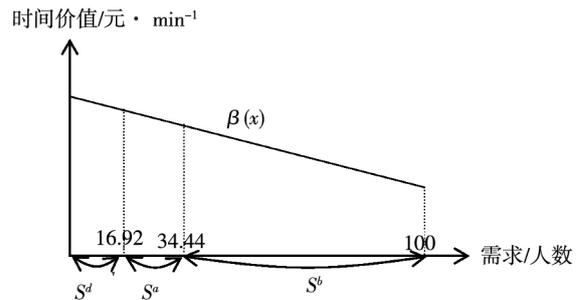


图 8 算例 2 的 GSO 模型的最优路径流量分布

Fig. 8 Path flow pattern of GSO model in the second example

4 结束语

考虑用户具有不同的社会经济特征和收入水平,并且其社会经济特征和收入水平在一定时间范围具有相对的稳定性,本文在固定需求交通网络中构建了一般系统最优数学规划模型,该模型适用于任何连续分布的用户时间价值或有限间断点的用户时间价值。当用户的时间价值呈连续分布时,通过模型分析,给出了一般系统最优模型的一阶最优性条件。另外,还研究了一般系统最优模型和标准系统最优模型以及多用户类系统最优模型之间的关系。研究结果表明:在同质用户网络中,一般系统最优模型退化为标准系统最优模型;在多用户类网络中,一般系统最优模型与多用户类系统最优模型是等价的。本文提出的基于路径的一般系统最优模型一般是非凸的,可能存在多个局部最优解,有待设计有效的算法进一步深入研究。本文的研究方法可拓展研究弹性需求网络中一般系统最优问题以及异质用户网络的拥挤收费问题。

参考文献:

- [1] Yang H, Huang H J. Principle of marginal-cost pricing: How does it work in a general road network [J]. *Transportation Research Part A*, 1998, 32(1): 45–54.
- [2] Yang H, Huang H J. *Mathematical and Economic Theory of Road Pricing* [M]. Oxford: Elsevier, 2005: 1–488.
- [3] Yang H, Huang H J. The multi-class, multicriteria traffic network equilibrium and system optimum problem [J]. *Transportation Research Part B*, 2004, 38(1): 1–15.
- [4] Guo X L, Yang H. User heterogeneity and bi-criteria system optimum [J]. *Transportation Research Part B*, 2009, 43(4): 379–390.
- [5] Clark A, Sumalee A, Shepherd S, et al. On the existence and uniqueness of first best tolls in networks with multiple user classes and elastic demand [J]. *Transportmetrica*, 2009, 5(2): 141–157.
- [6] 王 昕, 黄海军. 多用户弹性需求网络的双准则系统最优交通分配 [J]. *系统工程理论与实践*, 2011, 31(1): 94–102.
Wang Xin, Huang Haijun. Bi-criteria system optimum traffic assignment in networks with multi-user elastic demands [J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2011, 31(1): 94–102. (in Chinese)
- [7] Nagurney A. A multi-class, multicriteria traffic network equilibrium model [J]. *Mathematical and Computer Modeling*, 2002, 32(3/4): 393–411.
- [8] 田 琼, 刘 鹏. 基于乘客异质性的高峰期公交出行均衡研究 [J]. *管理科学学报*, 2013, 16(3): 82–87.
Tian Qiong, Liu Peng. Equilibrium properties of peak-period commuting in mass transit system with heterogeneous passengers [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2013, 16(3): 82–87. (in Chinese)
- [9] Lam T C, Small K A. The value of time and reliability: Measurement from a value pricing experiment [J]. *Transportation Research Part E*, 2001, 37(2): 231–251.
- [10] Verhoef E T, Small K A. Product differentiation on roads: constrained congestion pricing with heterogeneous users [J]. *Journal of Transport Economics Policy*, 2004, 38(1): 127–156.
- [11] Mayet J, Hansen M. Congestion pricing with continuously distributed values of time [J]. *Journal of Transport Economics and Policy*, 2000, 34(3): 359–370.
- [12] Xiao F, Yang H. Efficiency loss of private road with continuously distributed value-of-time [J]. *Transportmetrica*, 2008, 4(1): 19–32.
- [13] Nie Y M, Liu Y. Existence of self-financing and Pareto-improving congestion pricing: Impact of value of time distribution [J]. *Transportation Research Part A*, 2010, 44(1): 39–51.
- [14] Leurent F. Cost versus time equilibrium over a network [J]. *European Journal of Operational Research*, 1993, 71(2): 205–221.
- [15] Dial R B. Network-optimized road pricing part 1: A parable and a model [J]. *Transportation Science*, 1999a, 47(1): 54–64.
- [16] Dial R B. Network-optimized road pricing part 2: Algorithms and examples [J]. *Transportation Science*, 1999b, 47(2): 327–336.
- [17] Cantarella G E, Binetti M G. Stochastic equilibrium traffic assignment with value-of-time distributed among user [J]. *International Transactions of Operational Research*, 1998, 5(6): 541–553.
- [18] Meng Q, Liu Z Y, Wang S A. Optimal distance tolls under congestion pricing and continuously distributed value of time [J]. *Transportation Research Part E*, 2012, 48(5): 937–957.
- [19] Marcotte P, Zhu D L. Equilibria with infinitely many differentiated classes of customers [C] // *Complementarity and Variational Problems: State of the Art* (Ferris MC and Pang JS). Philadelphia: SIAM, 2000: 234–258.
- [20] Marcotte P, Zhu D L. Existence and computation of optimal tolls in multiclass network equilibrium problems [J]. *Opera-*

tions Research Letters , 2009 , 37(3) : 211 – 214.

[21] 谭志加, 杨海, 陈琼. 收费公路项目 Pareto 有效 BOT 合同与政府补贴 [J]. 管理科学学报, 2013, 16(3) : 10 – 20.

Tan Zhijia , Yang Hai , Chen Qiong. Pareto-efficient BOT contracts for road franchising with government subsidy [J]. Journal of Management Sciences in China , 2013 , 16(3) : 10 – 20. (in Chinese)

Generalized system optimal model and properties in traffic networks with fixed demand

WU Wen-xiang¹ , HUANG Hai-jun²

1. Beijing Key Lab of Urban Intelligent Traffic Control Technology , North China University of Technology , Beijing 100144 , China;
2. School of Economics and Management , Beihang University , Beijing 100191 , China

Abstract: Since network users have different socio-economic characteristics and different levels of income , this paper proposes a generalized system optimal model in traffic networks with fixed demand and then explicitly derives its first-order optimality conditions. The proposed model can deal with any continuously distributed value of time (VOT) or finite discrete VOT. The relationships among the generalized system optimal model , standard system optimal model and multi-class cost-based system optimal model are investigated. It is found that , for the fixed demand traffic networks with homogeneous users , the generalized system optimal model degenerates into a standard system optimal model , and for traffic networks with multi-class users , the generalized system optimal model and multi-classes cost-based system optimal model are equivalent.

Key words: fixed demand network; value of time; user equilibrium; system optimum