第 19 卷第 6 期 管 理 科 学 学 报 Vol. 19 No. 6
2016 年 6 月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Jun. 2016

Knight 不确定与随机汇率下外商投资决策①

费为银，夏登峰，唐仕冰
（安徽工程大学金融工程系，芜湖 241000）

摘要： 在奈特不确定及机制转换环境下研究了汇率变动对跨国投资决策的影响. 首先，通过 Itô 公式，推导得出机制转换环境下利润流的动力学方程. 其次，利用最大最小期望效用（α-MEU）偏好模型对项目投资期望值进行了刻画. 再利用随机分析方法推导出在奈特不确定及机制转换环境下考虑汇率变动的项目预期价值公式及利润流临界现值. 最后，对结果进行数值模拟，分析了不同参数对跨国投资的影响.

关键词： 奈特不确定；机制转换；随机汇率；α - 最大最小期望效用；伊藤公式
中图分类号： O211.6；F224.5 **文献标识码：** A **文章编号：** 1007 - 9807(2016)06 - 0125 - 11

0 引 言

传统的投资策略问题研究，大多是在完备的金融市场假设条件下进行. Merton[1] 在 1971 年研究了连续时间下的最优消费和投资问题. 但实际上投资过程是一种经济行为，因此在投资过程中，投资者的信仰、经济周期、实际经济环境等因素都具有不确定性，这些不确定因素会使得最终收益发生一些改变. 因此利用传统的方法来确立最优投资策略将会与实际投资情况存在偏差.

针对这一现实经济问题，国内外学者做过大量研究. Chen 和 Epstein[2] 建立了多先验效用的连续时间跨期模型，并对风险溢价和含糊溢价进行了阐述，由于其模型仅考虑最坏情形下的决策问题，对含糊的态度是极端否定的，但在现实生活中，不是所有的决策者都是完全的悲观主义者，这使得其所建模型在一定程度上忽视了含糊所带来的积极影响. Ghiradato 等[3] 在 2004 年研究并建立了 α-MEU 偏好模型，它是两种极端情形（最好的情形与最坏的情形）的凸组合. Olszewski[4] 于 2007 年使用该模型研究了决策者面对含糊情况下的相关问题. α-MEU 偏好框架的建立，使得检验决策者对含糊持有的不同态度所带来的影响成为可能. Schroder[5] 指出即使一个投资者只拥有少许乐观态度，他仍会期待含糊及含糊所带来的收益. Heath 等[6] 在 1991 年也指出由于投资者的过分自信，他们在面对含糊时往往趋向于只看最好的情形. 这表明了 Knight 不确定性将在一定程度上影响投资者最终的投资决策. Liu[7] 考虑了在连续时间内，当预期收益率不可测且遵循一个两状态马尔科夫模型时，引入含糊性的投资组合和消费决策问题. 研究了含糊性和参数不确定性是如何影响跨期对冲需求、最优投资组合策略和最优消费财富比率的. Fei[8] 于 2007 年研究了含糊和预期条件下的最优消费和投资组合问题. 韩立岩等[9] 研究 Knight 不确定环境下基于模糊测度的期权定价模型. 2008 年张慧等[10] 研究了不确定环境下再装股票期权的稳健定价模型. Fei[11] 在 2009 年利用 α - 最大最小期望效用（α-MEU）模型研究了在含糊环境下的最优消费和投资问题. 2010 年张慧[12] 研究了 Knight 不确

① 收稿日期：2015 - 03 - 26；修订日期：2015 - 12 - 26.
基金项目：国家自然科学基金资助项目（71171003；71571001）；安徽省自然科学基金资助项目（1608085MA02）. 本文入选“第十二届金融系统工程与风险管理年会”优秀论文（山西大学，2014 年 8 月）.
作者简介：费为银（1963—），男，安徽芜湖人，博士，教授，博士生导师. Email：wyfei@ahpu.edu.cn

定性与一般风险资产的动态最小定价问题. 2011年韩立岩等[13]研究了不确定环境下的期权价格上下界问题. 2012年韩立岩等[14]研究了基于奈特不确定性随机波动率期权定价. 但是,以上的研究过程中并没有考虑到机制转换. 他们仅仅处理了无限时间段内的投资决策的相关问题,即使在现实经济中这个时间段内的许多投资项目都拥有固定到期日或者有限生命周期.

Hamilton[15]是最早将机制转换环境引入问题研究的学者. 2003年Driffill等[16]仅在机制转换环境下研究了进出口问题引入机制转换环境对金融和行为经济学的研究具有十分重要意义. 例如Jang等[17]指出是否考虑机制转换环境对交易成本的确立有着重要影响,他强调考虑机制转换环境下的交易成本将会远远大于没有考虑机制转换环境下的交易成本. Fuh等[18]还利用隐Markov机制转换模型研究了微笑波动率等问题. 如果投资利润流是依赖于商业周期的,决策者一定会在决策时将其考虑在内. 众所周知,当一个市场处于低迷状态时,此时的产品价格可能会降低甚至导致公司的破产. 由此可见项目的利润流会在市场状态不同的情形产生差异. 正因如此,人们逐渐将机制转换环境引入最优投资消费决策问题的研究中,不断优化完善投资模型.

另一方面根据已有的研究成果,随着经济全球化的不断加深,跨国投资已成为投资选择中的重要组成部分. 谈毅[19]探讨了本土化经验是如何影响跨境风险投资绩效的. 国内学者对汇率变动也做了相关研究. 段玉婉等[20]分析了人民币升值对我国国内物价的影响; 尹力博等[21]基于随机规划方法分析了人民币外汇期权套保策略; 李晓峰等[22]从行为金融视角下研究了人民币汇率决定因素. 进一步,1995年Kathryn[23]研究了汇率变动对投资所带来的影响. 2011年刘慧[24]研究了人民币汇率变动对我国外商投资的影响. 其研究结果表明外汇汇率在跨国经济贸易中起着重要作用,汇率的变动对一国经济有着深刻的影响. 2012年李宏等[25]研究了人民币汇率变动对我国贸易平衡的影响. 王志鹏[26]在2002年讨论研究了外商直接投资对实际汇率的影响. 2005年魏锋等[27]研究了融资约束、不确定性与公司投资行为. 2006年孙霄翀等[28]研究了汇率调整对外商直接投资的影响. 同年,邱立成和刘文军[29]研究了人民币汇率水平的高低与波动对外国直接投资的影响. 2007年王松奇等[30]研究了汇率的决定机制、波动区间与政策搭配问题. 2008年闫伟等[31]研究了带有汇率因素的不连续价格过程的最优投资组合. 程瑶等[32]在2009年研究了人民币汇率波动对外商直接投资影响的实证分析. 2009年王晋斌等[33]研究了中国汇率传递效应问题. 同年,吴吉林等[34]研究了基于机制转换与随机波动的我国短期利率问题. 2010年孙文莉等[35]研究了汇率的不确定性、投资区位选择与公司内贸易问题. 2011年彭红枫[36]基于实物期权的理论分析与中国的实证研究了汇率对FDI的影响.

通过上述文献综述分析,可知在不确定性的研究中通常分为概率不确定性和奈特不确定性,概率不确定性是指变量具有明确的概率分布的不确定,又称为风险; 而奈特不确定指变量不具有明确的概率分布的不确定,它不同于风险,此时的不确定可用某一先验集加以刻画. 另一方面,机制转换是由于现实的经济环境的突然变化引起的经济模式的改变,例如国家政治体制的变化、经济体制的改变,自然灾害等. 由于国际投资者对国际形势的信息了解不全面,对决策对象的很多方面的基本状况掌握不具体,使得决策是具有某种不确定性,往往具有随机性又有奈特不确定的共存,所以在跨国投资决策中自然需要考虑奈特不确定又有机制转换特点的国际经济环境,以便更为有效的提供决策分析. 事实上,本模型中就将奈特不确定和机制转换的特性进行了有机的结合,模型中先验集就体现了奈特不确定并分析了奈特不确定的结论表现,同时结果中也体现了机制转换的速率和国际市场汇率是如何影响最优决策的. 通常的模型分析中并未同时将奈特不确定性和机制转换加以考虑. 尤其,基于奈特不确定环境和机制转换的跨国投资中将汇率作为模型输入变量是合理的,所得投资决策分析不仅具有更为深刻的理论意义和较高应用的实际经济意义. 不确定性、机制转换和汇率变动都会在很大程度上影响项目投资的结果. 因此,本文在上述模型的基础上考虑奈特不确定和汇率变动,对现有模型进行

进一步推广和量化分析. 作者将综合考虑奈特不确定性、机制转换及汇率变动环境下的项目投资决策问题,利用随机分析方法不仅在理论上得出了在奈特不确定及机制转换环境下考虑汇率变动的项目估值公式,而且对相关理论结果进行了数值分析并给予经济学解释,得出一些有经济意义的结论.

1　奈特不确定及机制转换环境下的模型构建

假设一个跨国投资的投资商面临两个不确定市场环境,其一是面临投资所在国的市场不确定性,另一个是面临国际金融市场汇率变动给投资者以本币表示的投资收益的影响. 设投资所在国的经济环境是"扩张(expansion)"和"紧缩(contraction)"两种机制交错发生的. 当独立于市场且强度为 λ_i 的 Poisson 过程发生跳跃时,经济状态从机制 i 转变到 j,其中 $i \neq j, i,j \in \{E,C\}$.

在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上存在两个标量 Wiener 过程 $W(t)$ 和 $Z(t)$, $t \in [0,T]$. $Z(t)$ 构建汇率变动的不确定性,构建利润流的不确定性. P 表示单一的原始概率测度,且假定所有随机过程都是适应的, $W(t)$ 与 $Z(t)$ 相关. γ 表示过程 $W(t)$ 与 $Z(t)$ 间的相关系数,即 $E[\mathrm{d}W(t)\mathrm{d}Z(t)] = \gamma \mathrm{d}t$. 令 $\mathscr{F}_t = \sigma\{W(s),Z(s),N(s); s \leqslant t\}$. 定义国际投资商所在国的货币为本币,跨国投资所在国的货币为外币,假设时刻 t 汇率(跨国投资所在国货币/本国货币) $H(t)$ 的动力学可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{H(t)} = h\mathrm{d}t + \delta \mathrm{d}Z(t), H(0) = H_0 \tag{1}$$

其中 h 与 δ 为正常数, h 表示即期预期汇率, δ 表示汇率波动率, H_0 为已知.

设投资商以投资所在国货币表示的利润流 $\pi(t)$ 可以由以下随机微分方程给出

$$\frac{\mathrm{d}\pi(t)}{\pi(t)} = \mu(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W(t) \tag{2}$$

其中

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_E, & \text{扩张}, \\ \mu_C, & \text{紧缩}, \end{cases} \quad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_E, & \text{扩张} \\ \sigma_C, & \text{紧缩} \end{cases}$$

初始利润流 $\pi(0) \in \mathbb{R}$ 且假设已知.

则投资商以本币表示的利润为 $\tilde{\pi}(t) \triangleq H(t)\pi(t)$. 由 Itô 公式及式(1)、式(2)可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\tilde{\pi}(t)) &= \mathrm{d}(H(t)\pi(t)) \\ &= \pi(t)\mathrm{d}H(t) + H(t)\mathrm{d}\pi(t) + \mathrm{d}\pi(t)\mathrm{d}H(t) \\ &= \tilde{\pi}(t)(h + \mu(t) + \sigma(t)\delta\gamma)\mathrm{d}t + \tilde{\pi}(t)(\sigma(t)\mathrm{d}W(t) + \delta\mathrm{d}Z(t)) \\ &= \tilde{\pi}(t)(h + \mu(t) + \sigma(t)\delta\gamma)\mathrm{d}t + \tilde{\pi}(t)\sqrt{\sigma^2(t) + \delta^2 + 2\sigma(t)\delta\gamma}\,\mathrm{d}B(t) \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}B(t) = \dfrac{\sigma(t)\mathrm{d}W(t) + \delta\mathrm{d}Z(t)}{\sqrt{\sigma^2(t) + \delta^2 + 2\sigma(t)\delta\gamma}}$, $B(t)$ 为 P 下标准布朗运动.

由于投资商对投资所在国的经济环境不是十分熟悉,在投资决策时往往担心模型的误定(model misspecification)或是有奈特不确定性. 现给出投资商的奈特不确定程度的刻画.

首先给定密度生成元集为[11]

$$\Theta = \{\theta = (\theta_t) \mid |\theta_t| \leqslant k, \forall t \in [0,T]\}$$

其中 k 为非负常数,表示含糊(ambiguity)的程度. 因此概率测度族 $\mathscr{P} = \{Q^\theta \mid \theta \in \Theta\}$,其中 Q^θ 由下式给出

$$\frac{\mathrm{d}Q^\theta}{\mathrm{d}P} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(s)\mathrm{d}s - \int_0^T \theta(s)\mathrm{d}B(s)\right\}$$

由 Girsanov 定理,在 $B_\theta(t) = B(t) + \int_0^T \theta(s)\mathrm{d}s$ 为 Q^θ 下的标准布朗运动. 因此,在 Q^θ 下考虑汇率变动时,投资商的利润流 $\tilde{\pi}(t)$ 动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\pi}(t)}{\tilde{\pi}(t)} = (\tilde{\mu}(t) - \tilde{\sigma}(t)\theta(t))\mathrm{d}t + \tilde{\sigma}(t)\mathrm{d}B_\theta(t) \tag{3}$$

其中

$$\tilde{\mu}(t) = h + \mu(t) + \sigma(t)\delta\gamma = \begin{cases} h + \mu_E + \sigma_E\delta\gamma, & \text{扩张} \\ h + \mu_C + \sigma_C\delta\gamma, & \text{紧缩} \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \sqrt{\sigma^2(t) + \delta^2 + 2\sigma(t)\delta\gamma} = \begin{cases} \sqrt{\sigma_E^2 + \delta^2 + 2\sigma_E\delta\gamma}, & \text{扩张} \\ \sqrt{\sigma_C^2 + \delta^2 + 2\sigma_C\delta\gamma}, & \text{紧缩}. \end{cases}$$

再利用 Itô 公式,可以得出在奈特不确定及机制转

换条件下利润流 $\hat{\pi}(t)$ 为

$$\hat{\pi}(t) = \tilde{\pi}(0)\exp\left[\int_0^t(\tilde{\mu}(s) - \tilde{\sigma}(s)\theta(s) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t\tilde{\sigma}(s)\,\mathrm{d}B_\theta(s)\right] \quad (4)$$

其中 $\tilde{\mu}$,$\tilde{\sigma}$ 由式(3)给出.

另一方面,假设面对奈特不确定的投资商在投资时对不确定性存有不同的态度,用 $\alpha \in [0,1]$ 表示投资者面对不确定时的乐观程度. 正如 Fei[11] 所述,投资商的态度既不是极度悲观的也不是极度乐观的,而是介于极度悲观与乐观之间的. 因此,将刻画投资商决策问题.

设存在一个随机函数 $f(x)$,其期望值为最好情形(权重为 α)与最坏情形(权重为 $1-\alpha$)的凸组合. 利用 α-MEU 偏好模型,可以检验投资商的含糊态度(ambiguity attitude)对投资的影响. 定义 α–期望值为

$$E^\alpha[f(x)] = \alpha\sup_{Q^\theta\in\mathscr{P}}E_t^{Q^\theta}[f(x)\mid\sigma(t)=\sigma_i] + (1-\alpha)\inf_{Q^\theta\in\mathscr{P}}E^{Q^\theta}[f(x)\mid\sigma(t)=\sigma_i],\quad i=E,C \quad (5)$$

其中 $E_t^{Q^\theta}[\cdot\mid\sigma(t)=\sigma_i]$ 表示 t 时项目期望值是依赖于给定机制 i 的,假定投资商知道在 t 时刻市场所处状态.

假设 ρ 为投资商的主观折现率,T 为项目周期,则基于 α-MEU 偏好模型和奈特不确定及汇率变化环境,可得出利润流 $\tilde{\pi}(t)$ 在 0 时刻的 α 期望值为

$$\begin{aligned}V_i(\pi(0)\mid\alpha) &= E^\alpha\left[\int_0^T e^{-\rho s}H(s)\pi(s)\,\mathrm{d}s\right] = \\ &\alpha\sup_{\substack{Q^\theta\in\mathscr{P}\\ i=E,C}}E^{Q^\theta}\left[\int_0^T e^{-\rho s}H(s)\pi(s)\,\mathrm{d}s\mid\sigma(0)=\sigma_i\right] + (1-\alpha)\inf_{Q^\theta\in\mathscr{P}}E^{Q^\theta}\times \\ &\left[\int_0^T e^{-\rho s}\pi(s)\,\mathrm{d}s\mid\sigma(0)=\sigma_i\right]\end{aligned} \quad (6)$$

则投资商对项目的估值为

$$F_i(\pi(0)\mid\alpha) = \max\{V_i(\pi(0)\mid\alpha) - I, 0\},\quad i=E,C \quad (7)$$

其中 I 表示项目的初始成本. 项目估值 F_i 将用于判断是否进行投资,若 F_i 为正,表示项目存在收益则进行投资,若 F_i 小于 0,表示项目亏损则放弃投资.

2 考虑汇率变动环境下的跨国投资决策

为了计算投资的期望值 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$,定义一个随机过程 $I(t)$ 为

$$I(t) \triangleq \begin{cases}1, & \text{扩张}\\ 0, & \text{紧缩}\end{cases}$$

假定一个在 0 到 t 时间内扩张期利润流的占位时(occupation time)

$$\zeta(s) \triangleq \int_0^s I(t)\,\mathrm{d}t$$

引理 1 若 Y_1 与 Y_2 为概率测度 P 下标准正态变量,且相关系数为 ρ,则对于常数 a,b 来说,满足

$$E[e^{aY_1+bY_2}] = e^{(a^2+b^2+2\rho ab)/2}$$

引理 2[37] 对于任意实常数 a,b,c 有下列等式成立

$$E^{Q^\theta}[\exp\{a\zeta(s)+bB_\theta(s)+cX(s)\}\mid\sigma(0)=\sigma_i] = \int_0^s\exp\{(\frac{b^2}{2})s+(a+bc+\frac{c^2}{2})u\}f_i(s,u)\,\mathrm{d}u$$

其中 $f_i(s,u)$ 为 $\zeta(s)$ 的概率密度函数.

证明见附录.

定理 1 当利润流均值计算公式由式(6)定义时,考虑汇率变动,则以下等式成立

$$\begin{aligned}&\sup_{Q^\theta\in\mathscr{P}}E^{Q^\theta}\left[\int_0^T e^{-\rho s}H(s)\pi(s)\,\mathrm{d}s\mid\sigma(0)=\sigma_i\right] = \\ &\pi(0)H_0\int_0^T\left[\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C-k\tilde{\sigma}_C)s)\times\right. \\ &\int_0^s\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C+k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\}\times \\ &\left.f_i(s,u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s\end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}&\inf_{Q^\theta\in\mathscr{P}}E^{Q^\theta}\left[\int_0^T e^{-\rho s}H(s)\,\mathrm{d}s\mid\sigma(0)=\sigma_i\right] = \\ &\pi(0)H_0\int_0^T\left[\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C-k\tilde{\sigma}_C)s)\times\right. \\ &\int_0^s\exp((\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C-k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u)\times \\ &\left.f_i(s,u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s\end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\tilde{\mu}(s)$,$\tilde{\sigma}(s)$ 满足

$$f_E(s,u) \triangleq e^{-\lambda_E s}\delta_0(s-u) + c^{-\lambda_C(s-u)-\lambda_E u} \times \left(\left(\frac{\lambda_E\lambda_{C^u}}{s-u}\right)^{\frac{1}{2}} I_1\left(2(\lambda_E\lambda_C u(s-u))^{\frac{1}{2}}\right) + \lambda_E I_0\left(2(\lambda_E\lambda_C u(s-u))^{\frac{1}{2}}\right)\right) \times \quad (10)$$

$$f_C(s,u) \triangleq e^{-\lambda_C s}\delta_0(s-u) + c^{-\lambda_C(s-u)-\lambda_E u} \times \left(\left(\frac{\lambda_E\lambda_{C(s-u)}}{u}\right)^{\frac{1}{2}} I_1\left(2(\lambda_E\lambda_C u(s-u))^{\frac{1}{2}}\right) + \lambda_C I_0\left(2(\lambda_E\lambda_C u(s-u))^{\frac{1}{2}}\right)\right) \quad (11)$$

这里 Bessel 修正函数定义为

$$I_a(z) \triangleq \left(\frac{z}{2}\right)^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n!\,\Gamma(a+n+1)}$$

证明见附录.

由上述定理可以推导出以下结论.

推论 1　在机制 $i \in \{E,C\}$ 时,对于一个乐观的程度值为 $\alpha \in [0,1]$ 的投资商来说,项目的 α - 期望值如下

$$V_i(\pi(0) \mid \alpha) = \pi(0) H_0\Big\{\alpha\int_0^T \exp((-\rho+\tilde{\mu}_C + k\tilde{\sigma}_C)s)\int_0^s [\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C+k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))\times u\}f_i(s,u)\,du]\,ds + (1-\alpha)\int_0^T \exp((-\rho+\tilde{\mu}_C-k\tilde{\sigma}_C)s)\int_0^s [\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C-k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\}f_i(s,u)\,du]\,ds\Big\} \quad (12)$$

其中 $f_i(s,u)$ 由式(10) 和式(11) 给出.

现令

$$\phi_i^\alpha = \alpha\int_0^T [\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C+k\tilde{\sigma}_C)s) \times \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C+k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\}f_i(s,u)\,du]\,ds + (1-\alpha)\int_0^T [\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C-k\tilde{\sigma}_C)s) \times \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C-k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\} \times f_i(s,u)\,du]\,ds \quad (13)$$

则由推论 1 可以得到 $V_i(\pi(0) \mid \alpha) = \pi(0) H_0\phi_i^\alpha$.

推论 2　(完全悲观) 在机制 $i \in \{E,C\}$ 时,对于一个乐观程度值 $\alpha = 0$ (即此时投资者对于不确定性完全处于悲观状态) 的投资商来说,项目的 α - 期望值给定如下

$$V_i(\pi(0) \mid \alpha) = \pi(0) H_0\int_0^T [\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C - k\tilde{\sigma}_C)s)\int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C-k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\} \times f_i(s,u)\,du]\,ds$$

其中 $f_i(s,u)$ 由式(10) 和式(11) 给出.

推论 3　(不考虑奈特不确定) 只考虑单一概率测度时,投资商对含糊的不确定程度将为 0(此时不考虑 Knight 不确定性对于投资决策所产生的影响),即 $k = 0$. 汇率变动动力学方程由式(1) 给出,利润流的动力学方程可以由方程(2) 和(3) 给出. 在 $k = 0$ 条件下利用公式(12),可得

$$V_i(\pi(0) \mid \alpha) = \pi(0) H_0\int_0^T [\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C)s) \times \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C)u\}f_i(s,u)\,du]\,ds \triangleq \phi_i$$

其中 $f_i(s,u)$ 由式(10) 和式(11) 给出.

接下来将进行模型参数的敏感性分析.

1) 投资商的预期利润流对参数 α 的敏感性.

由于

$$\frac{\partial V_i(\pi(0) \mid \alpha)}{\partial\alpha} = \pi(0) H_0\Big\{\int_0^T [\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C+k\tilde{\sigma}_C)s)\int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C+k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\} \times f_i(s,u)\,du]\,ds - \int_0^T [\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C-k\tilde{\sigma}_C)s) \times \int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C-k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\}f_i(s,u)\,du]\,ds\Big\}$$

所以 $\frac{\partial V_i(\pi(0) \mid \alpha)}{\partial\alpha} > 0$,因此 α 对应 $V_i(\pi(0) \mid \alpha)$ 曲线呈单调增曲线,意味着随着 α 的增长,$V_i(\pi(0) \mid \alpha)$ 也将呈现增长状态.

2) 投资商的预期利润流对预期汇率 h 的敏感性.

由于

$$\frac{\partial V_i(\pi(0) \mid \alpha)}{\partial h} = \pi(0) H_0\Big\{\alpha\int_0^T [\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C + \sigma_C\delta\gamma + k\tilde{\sigma}_C)s)\int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C + k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\}f_i(s,u)\,du]\,ds + (1-\alpha) \times \int_0^T [\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C-k\tilde{\sigma}_C)s)\int_0^s \exp\{(\tilde{\mu}_E - \tilde{\mu}_C-k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\}f_i(s,u)\,du]\,ds\Big\}$$

$$\frac{\partial V_i(\pi(0)\mid\alpha)}{\partial h^2}=\pi(0)H_0\{\alpha\int_0^T[\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C+k\tilde{\sigma}_C)s)\int_0^s\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C+k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\}\times f_i(s,u)\,\mathrm{d}u]\,\mathrm{d}s+(1-\alpha)\times\int_0^T[\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C-k\tilde{\sigma}_C)s)\int_0^s\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C-k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\}f_i(s,u)\,\mathrm{d}u]\,\mathrm{d}s\}$$

所以 $\frac{\partial V_i(\pi(0)\mid\alpha)}{\partial h}>0$，且 $\frac{\partial V_i(\pi(0)\mid\alpha)}{\partial h^2}>0$. 这表明 h 对应 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ 曲线呈单调增趋势，且随着 h 逐渐增长 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ 的增长幅度逐渐增强.

3) 投资商的预期利润流对汇率波动率 δ 的敏感性.

由于

$$\frac{\partial V_i(\pi(0)\mid\alpha)}{\partial\delta}=\pi(0)H_0\sigma r\int_0^T[\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C)s)\times\int_0^s\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C)u\}f_i(s,u)\,\mathrm{d}u]\,\mathrm{d}s$$

$$\frac{\partial V_i(\pi(0)\mid\alpha)}{\partial\delta^2}=\pi(0)H_0\sigma^2r^2\times\int_0^T[\exp((-\rho+\tilde{\mu}_C)s)\int_0^s\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C)u\}f_i(s,u)\,\mathrm{d}u]\,\mathrm{d}s$$

易得$\frac{\partial V_i(\pi(0)\mid\alpha)}{\partial\delta}>0$，且$\frac{\partial V_i(\pi(0)\mid\alpha)}{\partial\delta^2}>0$. 这表明 δ 对应 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ 曲线呈单调增走势，且 δ 随着逐渐增长 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ 的增长幅度逐渐增强.

另一方面，定义 π_i^*，其中 $i\in\{E,C\}$，令其为使得投资利润流的期望值恰好等于初始成本时的值，即等价于 $F_i(\pi(0)\mid\alpha)=0$. 若当前利润流大于 π_i^*，则投资商进行投资; 其他情形下放弃投资. 现令初始即期预期汇率 $H_0=6.24$、$\pi_0=0.16$，则可得如下结论（其中 ϕ_i^α 由式(13)给出）.

1) 考虑机制转换及奈特不确定环境下带汇率变动的利润流的临界现值计算公式为

$$\pi_i^*=\frac{I}{\phi_i^\alpha},i\in\{E,C\},\alpha\in[0,1] \tag{14}$$

2) 考虑 $\alpha=0$ 及机制转换环境下带汇率变动的利润流的临界现值为

$$\pi_i^*=\frac{I}{\phi_i^{\alpha=0}},i\in\{E,C\}$$

3) 仅考虑机制转换环境下带汇率变动的利润流的临界现值为

$$\pi_i^*=\frac{I}{\phi_i},i\in\{E,C\}$$

3 数值分析

在本节中，将投资利润流模型进行数值模拟分析. 固定模型中某些参数值，观察变动量对预期利润流及利润流的临界现值所带来的影响程度. 首先假定存在一个准备进行跨国投资的中国籍投资商，将投资于美国项目工程. 现给定模型中参数值扩张及紧缩机制下泊松跳过程的强度 λ_i 分别为 $\lambda_E=0.29$，$\lambda_C=3.413$，定义不同机制下随机过程中漂移项μ_i分别为$\mu_E=0.056\,349\,723$，$\mu_C=0.030\,692\,00$，类似设定波动项分别为 $\sigma_E=0.14$，$\sigma_C=0.3$，$\rho=0.1$，$\pi(0)=0.16$，初始成本值设为 $I=10$，$\gamma=0.5$，$H_0=6.24$，$\delta=0.13$. 令即期预期汇率（美元/人民币）$h=6.297\,2$. 利用 Matlab 软件，可以得到以下结论.

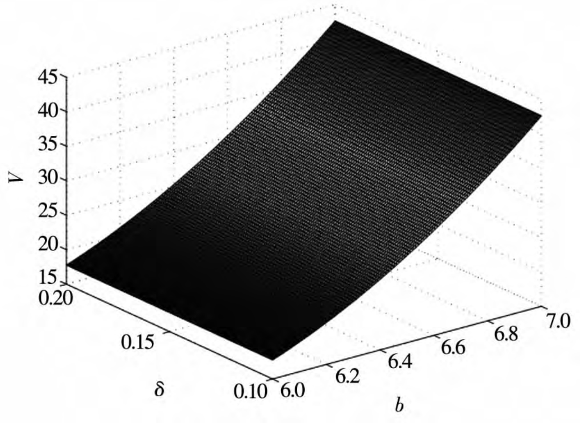

图1　当 $T=5$，$\gamma=0.5$，$\alpha=0.5$，$K=0.1$ 时，扩张机制下项目投资平均收益 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ 随即期预期汇率 h 及汇率波动率 δ 的变化情况（见式(12)）

Fig.1 For $T=5$, $\gamma=0.5$, $\alpha=0.5$, $K=0.1$ and the expanded regime, the effects of the instantaneous expected exchange rate h and the volatility of the exchange rate δ on the mean return of the project investment $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ (see (12))

1) 由图 1 可知在扩张机制下且 $T=5$ 时，随即期预期汇率 h 的增大，投资平均收益 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$

呈上升趋势，随汇率波动率 δ 增大，投资收益 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ 同样呈上升趋势，增幅较即期预期汇率偏低. 图形表明，当汇率波动率及即期预期汇率上升时，都会对投资平均收益带来有益影响. 在此情形下，中国籍投资商进行跨国项目投资的几率也将增大.

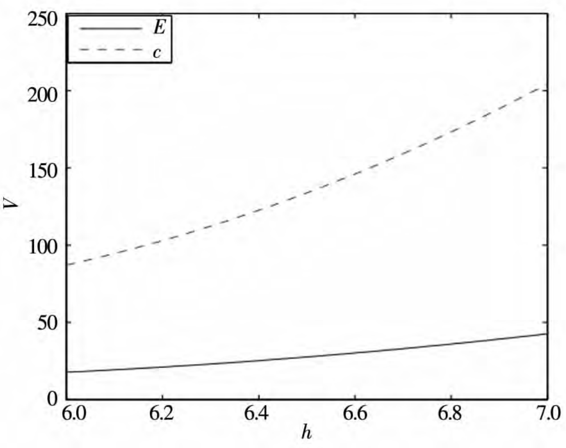

图2　当 $T=5,\gamma=0.5,\alpha=0.5,K=0.1$ 时，项目投资平均收益 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ 随即期预期汇率 h 的变化情况(见式(12))

Fig. 2 For $T=5,\gamma=0.5,\alpha=0.5,K=0.1$, the effects of the instantaneous expected exchange rate h on the mean return of the project investment $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ (see (12))

2) 由图 2 可知在扩张及紧缩机制下且 $T=5$ 时，随 h(即期预期汇率)值增大时，投资平均收益 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ 呈上升趋势. 意味着，当即期预期汇率 h 上升(人民币贬值)时，中国投资商进行跨国项目投资的几率越大，且在紧缩机制下投资商进行的跨国投资几率大于扩张机制. 而从现实经济情况分析，当即期预期汇率上升时，进行跨国投资收益值增大，进而投资者倾向于进行跨国投资，因此模型中汇率与投资的平均收益数值模拟结果与现实经济相符.

3) 由图 3 可知在扩张及紧缩机制下且 $T=5$ 时，随汇率波动率 δ 增大，利润流的临界现值呈下降趋势，且在紧缩机制下趋势较缓. 即当汇率波动率增大时，利润流的临界现值降低，跨国投资的可能性增大. 总体来说，图 3 显示了汇率波动率对投资利润流临界现值的影响程度. 可知在不同机制下汇率波动率都会对投资利润流临界现值带来负面的影响，并逐步趋于平稳. 在扩张机制下，汇率波动对投资临界现值影响程度高于紧缩机制下. 联系现实经济，可知面对汇率波动的不确定性，存在的投资的利润与风险也在不断加大，部分风险偏好投资者乐于在此时投资特别是在经济环境良好的情形下. 投资过程的利润流呈上升趋势利润流的临界现值呈下降趋势. 并且随波动率的增长，逐步趋向于平稳. 因此模型中考虑汇率对投资临界现值的影响结果与实际相符.

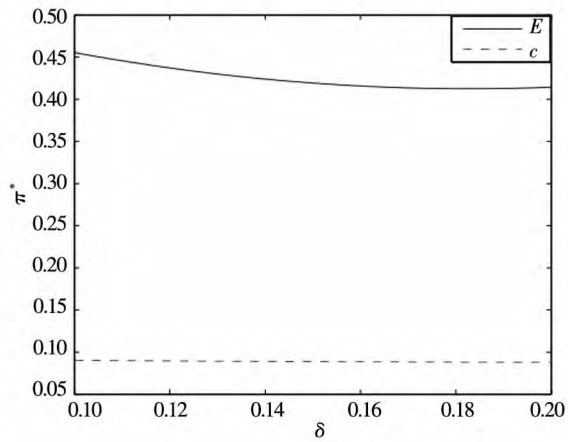

图3　当 $T=5,\gamma=0.5,\alpha=0.5,K=0.1$ 时，利润流的临界现值 π^* 随汇率波动率 δ 的变化情况(见式(14))

Fig. 3 For $T=5,\gamma=0.5,\alpha=0.5,K=0.1$, the effects of the volatility of the exchange rate δ on the present value of the profit flows π^* (see (14))

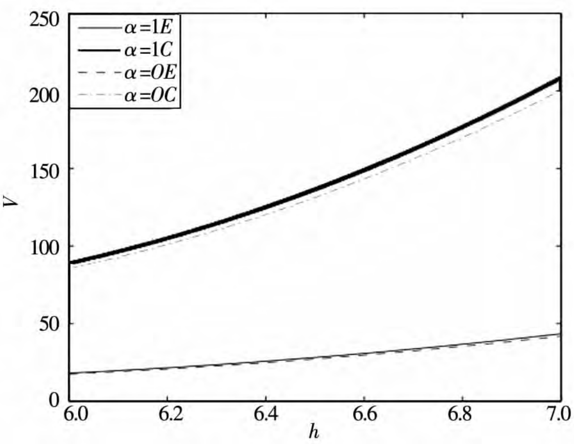

图4　当 $T=5,\gamma=0.5,K=0.1$ 时，项目投资平均收益 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ 随即期预期汇率波动率 h 的变化情况(见式(12))

Fig. 4 For $T=5,\gamma=0.5,K=0.1$, the effects of the instantaneous expected exchange rate h on the mean return of the project investment $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ (see (12))

4) 由图 4 可知在扩张及紧缩机制下且 $T=5$ 时，随即期预期汇率 h 的增大，投资平均收益 $V_i(\pi(0)\mid\alpha)$ 呈上升趋势，且无论在扩张或紧缩机制下 $\alpha=1$ 时投资平均收益高于 $\alpha=0$. 图形表明，当即期预期汇率上升时，中国籍投资商进行

跨国项目投资的几率也将增大. 且面对不确定时乐观程度越高的投资商更期待汇率变动所带来的项目收益,即其在即期预期汇率变动时更乐于跨国项目投资.

4 结束语

本文研究了投资商在奈特不确定及机制转换环境下考虑汇率波动时的跨国投资决策问题. 利用随机分析方法,推导出带有汇率波动的项目投资利润流的动力学方程. 并对模型进行了数值分析,结论表明即期预期汇率、汇率波动率对跨国投资的平均收益均存在正面影响,而乐观程度高的投资商更乐于进行跨国投资. 因此在跨国投资过程中投资商将在一定程度上期待项目所在国的汇率波动. 而对于本国来说,适当地调整汇率,也将在一定程度上带来更多的国际商机. 最后,知道影响外商跨国投资的因素还有例如投资所在国的通货膨胀等变量. 费为银等[38]基于通货膨胀研究了跳扩散环境下的最优动态资产配置问题; 尹力博和韩立岩[39]研究了对冲通胀风险的战略视角及微观选择问题. 事实上,在考虑随机通胀和汇率联合影响下的跨国投资问题是未来值得进一步探讨的课题.

参 考 文 献:

[1] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model [J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3: 373 – 413.

[2] Chen Z J, Epstein L G. Ambiguity, risk and asset returns in continuous time [J]. Econometrica, 2002, 70: 1403 – 1443.

[3] Ghirardato P, Maccheroni F, Marinacci M. Differentiating ambiguity and ambiguity attitude [J]. Journal of Economics Theory, 2004, 118: 133 – 173.

[4] Olszewski W. Preferences over sets of lotteries [J]. Review of Economic Studies, 2007, 2: 567 – 595.

[5] Schroder D. Investment under ambiguity with the best and worst in mind [J]. Math Finan Econ, 2011, 4: 107 – 133.

[6] Heath C, Tversky A. Preference and belief: Ambiguity and competence in choice under uncertainty [J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1991, 4: 5 – 28.

[7] Liu H N. Dynamic portfolio choice under ambiguity and regime switching mean returns [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2011, 35: 623 – 640.

[8] Fei W Y. Optimal consumption and portfolio choice with ambiguity and anticipation [J]. Information Sciences, 2007, 177: 5178 – 5190.

[9] 韩立岩, 周 娟. Knight 不确定环境下基于模糊测度的期权定价模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(12): 123 – 132.
Han Liyan, Zhou Juan. Option pricing with fuzzy measures under Knightian uncertainty [J]. Systems Engineering: Theory and Practice, 2007, 27(12): 123 – 132. (in Chinese)

[10] 张 慧, 陈晓兰, 聂秀山. 不确定环境下再装股票期权的稳健定价模型 [J]. 中国管理科学, 2008, 16: 25 – 31.
Zhang Hui, Chen Xiaolan, Nie Xiushan. Robust pricing model of reload stock option under uncertainty [J]. Chinese Journal of Management Science, 2008, 16: 25 – 31. (in Chinese)

[11] Fei W Y. Optimal portfolio choice based on α-MEU under ambiguity [J]. Stochastic Models, 2009, 25: 455 – 482.

[12] 张 慧. Knight 不确定性与一般风险资产的动态最小定价 [J]. 统计与决策, 2010, (6): 37 – 39.
Zhang Hui. The pricing of risk assets under Knightian uncertainty [J]. Statistics and Decision, 2010, (6): 37 – 39. (in Chinese)

[13] 韩立岩, 李 伟, 林忠国. 不确定环境下的期权价格上下界研究 [J]. 中国管理科学, 2011, 19: 1 – 11.
Han Liyan, Li Wei, Lin Zhongguo. Upper and lower bounds on option prices under uncertainty [J]. Chinese Journal of Management Science, 2011, 19: 1 – 11. (in Chinese)

[14] 韩立岩, 泮 敏. 基于奈特不确定性随机波动率期权定价 [J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(6): 1175 – 1183.
Han Liyan, Pan Min. Knightian uncertainty based option pricing with stochastic volatility [J]. Systems Engineering: Theory and Practice, 2012, 32(6): 1175 – 1183. (in Chinese)

[15] Hamilton J. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle [J]. Econometrica, 1989, 57: 357 – 384.

[16] Driffill J, Raybaudi M, Sola M. Investment under uncertainty with stochastically switching profit streams: Entry and exit over the business cycle [J]. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, 2003, Article 1.

[17] Jang B, Koo H K, Liu H, et al. Liquidity premia and transaction costs [J]. Journal of Finance, 2007, 62: 2329 – 2366.

[18] Fuh C D, Hu I, Lin S K. Empirical performance and asset pricing in Hidden Markov models [J]. Communications in Statistics: Theory and Methods, 2003, 13: 2477 – 2512.

[19] 谈　毅. 本土化经验对跨境风险投资绩效的影响研究 [J]. 证券市场导报, 2015, (9): 9 – 15.
Tan Yi. Study of the localization experience on the effect of cross-border venture capital performance in China market [J]. Securities Market Herald, 2015, (9): 9 – 15. (in Chinese)

[20] 段玉婉, 陈锡康, 杨翠红. 人民币升值对我国国内物价的影响分析 [J]. 管理科学学报, 2012, 15(7): 1 – 10.
Duan Yuwan, Chen Xikang, Yang Cuihong. The influence of RMB appreciation on Chinese price level [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(7): 1 – 10. (in Chinese)

[21] 尹力博, 韩立岩. 人民币外汇期权套保策略: 基于随机规划模型 [J]. 管理科学学报, 2012, 15(11): 31 – 44.
Yin Libo, Han Liyan. The hedging value and strategy of RMB foreign currency options: Based on the perspective of stochastic programming [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(11): 31 – 44. (in Chinese)

[22] 李晓峰, 陈　华. 行为金融视角下的人民币汇率决定模型研究 [J]. 管理科学学报, 2012, 15(2): 72 – 83.
Li Xiaofeng, Chen Hua. Modeling RMB exchange rate determination from the perspective of behavioral finance [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(2): 72 – 83. (in Chinese)

[23] Kathryn I D. Do exchange rate changes drive foreign direct investment [J]. The Journal of Business, 1995, 68: 405 – 433.

[24] 刘　慧. 人民币汇率变动对我国外商直接投资影响的 VAR 分析 [J]. 金融与经济, 2011, (7): 40 – 42.
Liu Hui. The effect of RMB exchange rate on FDI in China [J]. Journal of Finance and Economics, 2011, (7): 40 – 42. (in Chinese)

[25] 李　宏, 何穆彬, 钱　利. 人民币汇率变动对我国贸易平衡的影响 [J]. 天津师范大学学报, 2012, (1): 67 – 71.
Li Hong, He Mubin, Qian Li. The effect of RMB exchange rate on trade balance of the different industries in China [J]. Journal of Tianjin Normal University, 2012, (1): 67 – 71. (in Chinese)

[26] 王志鹏. 论外商直接投资对实际汇率的影响 [J]. 经济评论, 2002, (2): 87 – 91.
Wang Zhipeng. Effect of foreign direct investment impact on real exchange rate [J]. Economic Review, 2002, (2): 87 – 91. (in Chinese)

[27] 魏　锋, 孔　煜. 融资约束、不确定性与公司投资行为 [J]. 中国软科学, 2005, (3): 43 – 49.
Wei Feng, Kong Yu. Financing constraints, uncertainty and corporate investment: An empirical analysis of China listed companies [J]. China Soft Science, 2005, (3): 43 – 49. (in Chinese)

[28] 孙霄翀, 刘士余, 宋逢明. 汇率调整对外商直接投资的影响 [J]. 数量经济技术经济研究, 2006, (8): 68 – 77.
Sun Xiaochong, Liu Shiyu, Song Fengming. Effect of exchange rate adjustment and its impact on foreign direct investment [J]. The Journal of Quantitative and Technical Economics, 2006, (8): 68 – 77. (in Chinese)

[29] 邱立成, 刘文军. 人民币汇率水平的高低与波动对外国直接投资的影响 [J]. 经济科学, 2006, (1): 74 – 84.
Qiu Licheng, Liu Wenjun. The effect of RMB exchange rate on FDI [J]. Economic Science, 2006, (1): 74 – 84. (in Chinese)

[30] 王松奇, 史文胜. 论汇率的决定机制、波动区间与政策搭配 [J]. 贸易经济, 2007, (4): 52 – 60.
Wang Songqi, Shi Wensheng. On the determining mechanism, fluctuating range of foreign exchange rate and the policy options [J]. Finance and Trade Economics, 2007, (4): 52 – 60. (in Chinese)

[31] 闫　伟, 李树荣. 带有汇率因素的不连续价格过程的最优投资组合研究 [J]. 运筹与管理, 2008, 17: 134 – 139.
Yan Wei, Li Shurong. Optimal portfolio with exchange rate based on discontinuous price process [J]. Operations Research and Management Science, 2008, 17: 134 – 139. (in Chinese)

[32] 程　瑶, 于津平. 人民币汇率波动对外商直接投资影响的实证分析 [J]. 世界经济研究, 2009, (3): 75 – 82.
Cheng Yao, Yu Jinping. The empirical study on how RMB exchange rate drives FDI in China [J]. World Economy Study,

2009，(3)：75－82. (in Chinese)

[33] 王晋斌，李　南. 中国汇率传递效应的实证分析[J]. 经济研究，2009，(4)：17－27.
Wang Jinbin，Li Nan. Exchange rate pass through：The case of China[J]. Economic Research Journal，2009，(4)：17－27. (in Chinese)

[34] 吴吉林，陶旺升. 基于机制转换与随机波动的我国短期利率研究[J]. 中国管理科学，2009，17：40－46.
Wu Jilin，Tao Wangsheng. Markov-regime swithcing and stochastic volatility model of short-term interest rate in China[J]. Chinese Journal of Management Science，2009，17：40－46. (in Chinese)

[35] 孙文莉，金　华. 汇率的不确定性、投资区位选择与公司内贸易[J]. 南方经济，2010，(6)：65－74.
Sun Wenli，Jin Hua. The exchange rate uncertainty，location-decision of FDI and intra-firm trade[J]. South China Journal of Economics，2010，(6)：65－74. (in Chinese)

[36] 彭红枫. 汇率对 FDI 的影响：基于实物期权的理论分析与中国的实证[J]. 中国管理科学，2011，19：60－67.
Peng Hongfeng. The impact of exchange rate on FDI：The theory analysis based on real option and empirical study in China[J]. Chinese Journal of Management Science，2011，19：60－67. (in Chinese)

[37] Jang B，Roh K. Valuing qualitative options with stochastic volatility[J]. Quantitative Finance，2009，9：819－825.

[38] 费为银，蔡振球，夏登峰. 跳扩散环境下带通胀的最优动态资产配置[J]. 管理科学学报，2015，18(8)：83－94.
Fei Weiyin，Cai Zhenqiu，Xia Dengfeng. Dynamic asset allocation with inflation under jump-diffusion environment[J]. Journal of Management Sciences in China，2015，18(8)：83－94. (in Chinese)

[39] 尹力博，韩立岩. 对冲通胀风险的战略视角与微观选择[J]. 管理科学学报，2015，18(3)：64－77.
Yin Libo，Han Liyan. Way of hedging against inflation：Strategic perspective and tactical selection[J]. Journal of Management Sciences in China，2015，18(3)：64－77. (in Chinese)

On study of a foreign investor's investment with random exchange rate under Knightian uncertainty

FEI Wei-yin，XIA Deng-feng，TANG Shi-bing

Department of Financial Engineering，Anhui Polytechnic University，Wuhu 241000，China

Abstract: This paper studies the optimal investment with random exchange rates under Knightian uncertainty and regime switching. Firstly，by using an Itô formula，the dynamics of profit flow under regime switching is obtained. Secondly，α-maxmin expected utility (α-MEU) model is utilized to characterize an investor's expected value of the investment. Thirdly，the profit flow calculation formula with random exchange rates are derived by the stochastic calculus，and the critical present values of the profit flow are also given. Finally，numerical simulations are provided to explain the effect of the parameters on an investor's investment decisions.

Key words: Knightian uncertainty; regime switching; random exchange rates; α-maxmin expected utility; Itô formula

附录：引理 2 及定理 1 的证明

引理 2 证明：容易知道下列等式成立

$$\int_0^S E^{Q\theta}\left[\exp\{a\zeta(v)+bB_\theta(v)+cX(v)\}\mid\sigma(0)=\sigma_i\right]\mathrm{d}v=$$

$$\int_0^S\left[\int_0^v E^{Q\theta}\left[\exp\{au+b\sqrt{v}\,\frac{B_\theta(v)}{\sqrt{v}}+c\sqrt{u}\,\frac{X(v)}{\sqrt{u}}\}\mid\sigma(0)=\sigma_i,\zeta(v)=u\right]f_i(v,u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v$$

由 Jang 等[37]中引理 3.2 可知 $\frac{B_\theta(s)}{\sqrt{s}}$ **与** $\frac{X(s)}{\sqrt{u}}$ **的相关系数为** $\sqrt{\frac{u}{s}}$**，再利用上述引理 1 可以得到**

$$\int_0^s\left[\int_0^v E^{Q^\theta}\left[\exp\{au+b\sqrt{v}\frac{B_\theta(v)}{\sqrt{v}}+c\sqrt{u}\frac{X(v)}{\sqrt{u}}\}\mid\sigma_0=\sigma_i,\zeta(v)=u\right]f_i(v,u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^s\left[\int_0^v\exp\{au+\frac{(b\sqrt{v})^2+(c\sqrt{u})^2+2b\sqrt{v}\cdot c\sqrt{u}\cdot\sqrt{u/v}}{2}\}f_i(v,u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^s\left[\int_0^v\exp\{(\frac{b}{2})^2v+(a+bc+\frac{c^2}{2})u\}f_i(v,u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v$$

证毕.

定理 1 证明　对于任意 $\theta(t)\in[-k,k]$，注意到 $\tilde{u}(s)$，$\tilde{\sigma}(s)$ 由公式(3)给出，有

$$E^{Q^\theta}\left[\int_0^T\exp\{-\rho s+\int_0^s(\tilde{\mu}(t)-\theta(t)\tilde{\sigma}(t)-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2)\,\mathrm{d}t+\int_0^s\tilde{\sigma}(t)\,\mathrm{d}B_\theta(t)\}\,\mathrm{d}s\mid\tilde{\sigma}(0)=\tilde{\sigma}_i\right]$$

$$=\int_0^T\exp\{(-\rho+\tilde{\mu}_C-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_C^2)s\}E^{Q^\theta}\left[\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C-\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_E^2-\tilde{\sigma}_C^2))\zeta(s)-\right.$$

$$\left.\int_0^s\theta(t)\tilde{\sigma}(t)\,\mathrm{d}t+\tilde{\sigma}_C B_\theta(s)+(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C)\int_0^s I(t)\,\mathrm{d}B_\theta(t)\}\mid\tilde{\sigma}(0)=\tilde{\sigma}_i\right]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_0^T\exp\{(-\rho+\tilde{\mu}_C-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_C^2)s\}E^{Q^\theta}\left[\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C-\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_E^2-\tilde{\sigma}_C^2))\zeta(s)-\right.$$

$$\left.\int_0^s k\tilde{\sigma}(t)\,\mathrm{d}t+\tilde{\sigma}_C B_\theta(s)+(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C)\int_0^s I(t)\,\mathrm{d}B_\theta(t)\}\mid\tilde{\sigma}(0)=\tilde{\sigma}_i\right]\mathrm{d}s$$

又由引理 2 可得

$$\int_0^T\exp\{(-\rho+\tilde{\mu}_C-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_C^2+k\tilde{\sigma}_C)s\}E^{Q^\theta}\left[\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C-\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_E^2-\sigma_C^2)+k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))\zeta(s)+\right.$$

$$\left.\tilde{\sigma}_C B_\theta(s)+(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C)\int_0^s I(t)\,\mathrm{d}B_\theta(t)\mid\tilde{\sigma}(0)=\tilde{\sigma}_i\}\right]\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^T\exp\{(-\rho+\tilde{\mu}_C+k\tilde{\sigma}_C)s\}\cdot\int_0^s\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C+k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\}f_i(s,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

另一方面

$$E^{Q^{(-k)}}\left[\int_0^T\exp\{-\rho s+\int_0^s(\tilde{\mu}(t)-\theta(t)\tilde{\sigma}(t)-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2)\,\mathrm{d}t+\int_0^s\tilde{\sigma}(t)\,\mathrm{d}B_{(-k)}(t)\}\,\mathrm{d}s\mid\tilde{\sigma}(0)=\tilde{\sigma}_i\right]$$

$$=\int_0^T\exp\{(-\rho+\tilde{\mu}_C-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}_C^2+k\tilde{\sigma}_C)s\}E^{Q^{-k}}\left[\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C-\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_E^2-\tilde{\sigma}_C^2)+k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))\zeta(s)+\right.$$

$$\left.\tilde{\sigma}_C B_{(-k)}(s)+(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C)\int_0^s I(t)\,\mathrm{d}B_{-k}(t)\}\mid\tilde{\sigma}(0)=\tilde{\sigma}_i\right]\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^T\exp\{(-\rho+\tilde{\mu}_C+k\tilde{\sigma}_C)s\}\cdot\int_0^s\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C+k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\}f_i(s,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

因此

$$E^{Q^\theta}\left[\int_0^T\exp\{-\rho s+\int_0^s(\tilde{\mu}(t)-\theta(t)\tilde{\sigma}(t)-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2)\,\mathrm{d}t+\int_0^s\tilde{\sigma}(t)\,\mathrm{d}B_\theta(t)\}\,\mathrm{d}s\mid\tilde{\sigma}(0)=\tilde{\sigma}_i\right]$$

$$\leqslant E^{Q^{(-k)}}\left[\int_0^T\exp\{-\rho s+\int_0^s(\tilde{\mu}(t)-k\tilde{\sigma}(t)-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2)\,\mathrm{d}t+\int_0^s\tilde{\sigma}(t)\,\mathrm{d}B_{(-k)}(t)\}\,\mathrm{d}s\mid\tilde{\sigma}(0)=\tilde{\sigma}_i\right]$$

又由于 $\theta(t)\in[-k,k]$，所以

$$\sup_{Q^\theta\in\mathscr{P}}E^{Q^\theta}\left[\int_0^T e^{-\rho s}H(s)\pi(s)\,\mathrm{d}s\mid\sigma(0)=\sigma_i\right]$$

$$=\tilde{\pi}(0)\sup_{Q^\theta\in\mathscr{P}}E^{Q^\theta}\left[\int_0^T\exp\{-\rho s+\int_0^s(\tilde{\mu}(t)-\theta(t)\tilde{\sigma}(t)-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2)\,\mathrm{d}t+\int_0^s\tilde{\sigma}(t)\,\mathrm{d}B_\theta(t)\}\,\mathrm{d}s\mid\tilde{\sigma}(0)=\tilde{\sigma}_i\right]$$

$$=\tilde{\pi}(0)E^{Q^{(-k)}}\left[\int_0^T\exp\{-\rho s+\int_0^s(\tilde{\mu}(t)-k\tilde{\sigma}(t)-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2)\,\mathrm{d}t+\int_0^s\tilde{\sigma}(t)\,\mathrm{d}B_{(-k)}(t)\}\,\mathrm{d}s\mid\tilde{\sigma}(0)=\tilde{\sigma}_i\right]$$

$$=\tilde{\pi}(0)\int_0^T\exp\{(-\rho+\tilde{\mu}_C+k\tilde{\sigma}_C)s\}\cdot\int_0^s\exp\{(\tilde{\mu}_E-\tilde{\mu}_C+k(\tilde{\sigma}_E-\tilde{\sigma}_C))u\}f_i(s,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

同样，也可以得到式(9).　　**证毕**.