第19卷第9期 管理科学学报 Vol. 19 No. 9
2016年9月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Sep. 2016

基于期望准则和分布自由的回购契约协调模型①

蹇 明[1]，方 新[1,2*]，靳留乾[3,4]，周亚军[1]
(1. 西南交通大学交通运输与物流学院，成都 610031; 2. 重庆工商大学商务策划学院，重庆 400067;
3. 西南交通大学经济管理学院，成都 610031; 4. 重庆邮电大学经济管理学院，重庆 400065)

摘要: 将供应链管理引入需求分布自由的市场环境中，以回购契约作为管理的激励机制，研究均为风险中性的供应商—零售商构成的供应链系统的最优订购—定价决策以及回购契约的协调性问题. 研究需求分布自由环境下供应链系统的协调性具有重要意义，尤其是对缺乏充分历史销售数据的新产品，短生命周期产品而言. 基于期望收益准则和需求分布自由，分别建立供应链系统、零售商和供应商的上界、下界和最小期望收益模型，并在不同的需求依赖价格模式(加型模式和乘型模式)下，分析供应链的最优订购—定价决策以及回购契约的协调性. 研究发现，供应链系统的期望收益在由上界向下界乃至退化为最小期望收益时，回购契约的协调能力逐渐增强. 即，在上界期望收益模型中，回购契约无法协调供应链系统; 在下界期望收益模型中，存在唯一的一组回购契约参数协调供应链系统; 在最小期望收益模型中，回购参数是批发价格的反应函数，回购契约可以灵活地协调供应链系统.

关键词: 分布自由; 回购契约; 供应链协调; 需求依赖价格
中图分类号: F273.17 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2016)09-0067-12

0 引 言

供应链系统由多个相互独立的,但彼此在资金流、物流和信息流方面相互联系的企业构成，因此在各参与者之间提供一组有效机制，激励各参与者的决策行为趋于一致是十分有必要的. 供应链契约是有效的激励机制[1]. 在供应链管理研究中，通常假设产品的需求类型已知，然而，在现实生活中，由于市场需求的不确定性或者非精确性，使用概率理论刻画其需求分布类型具有一定程度的缺陷[2-4]，例如，当产品为短生命周期或者为时尚产品时，决策者很难获得具体的需求分布类型; 另外，有些产品的市场需求波动性较大，决策者很难获得标准的需求分布类型，因此，基于需求分布自由研究供应链管理具有重要的实践意义.

在需求分布自由的市场环境下，供应链下游企业无法掌握需求分布的具体类型，仅知道其均值和方差[4]，因此，供应链系统以及各个企业需要解决以下两个问题: 一是如何定购? 由于下游企业无法掌握市场需求分布类型，因此基于库存风险等因素的考虑，下游企业的订购量低于供应链的最优生产量; 而上游企业基于供应链系统最优或者出于规模效应等考虑，希望下游企业多订购产品. 其次是如何定价? 由于具有需求分布自由特征的产品通常属于缺乏充分历史数据的新产品或者需求波动性较大的产品，其市场价格体系处于不稳定状态，因此，研究该类产品的最优定

① 收稿日期: 2014-01-19; 修订日期: 2015-01-30.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61305074); 国家社会科学基金资助项目(10CGL013); 四川省科技厅创新苗子工程资助项目(2014-057).
通信作者: 方 新(1987—)，男，安徽定远人，博士研究生. Email: qbo10086@163.com

价很有必要.

为了解决上述问题，本文引入回购契约[1]作为供应链管理的激励机制. 一方面，上游企业通过提供回购契约激励下游企业多订购产品; 同时，承诺在产品的销售期末，下游企业可以返还全部剩余产品. 上游企业通过回购契约，分担下游企业面临的不确定需求风险，激励其增加订购量. 另一方面，上游企业通过回购契约向下游企业进行转移支付，激励其实施产品的最优销售价格. Pasternack[5]基于报童模型，研究回购契约的参数设计并指出回购契约可以协调供应链系统; Kandel[6]讨论回购契约与批发价格之间的关系; Emmons 和 Gilbert[7]将需求依赖价格引入到供应链管理中并讨论回购契约的协调性; 林润辉和侯如靖[8]研究互惠偏好如何影响回购契约的协调效果; 杜少甫等[9]讨论了公平关切行为对回购契约的协调影响; 鲁力和陈旭[10]研究不同碳排放政策下基于回购合同的供应链协调问题; 林润辉和侯如靖[11]从实验角度检验回购契约的实际协调效果，分析回购契约参数中批发价格和回购价格之间的关系，并对回购契约协调失效的原因进行动态分析. 更多关于回购契约的研究推荐读者参考文献[1，12].

当前，基于需求分布自由研究供应链管理的文献相对较少. Scarf[4]首次研究需求分布自由的报童问题. 在决策者仅知道市场需求均值和方差的假设下推导出其库存管理的最小—最大解; Gallego 和 Moon[13]证明并简化了 Scarf[4]的报童订购规则; Liao 等[14]从产品滞销和缺货惩罚的角度拓展了 Callego 和 Moon[13]的模型; Raza[15]研究需求分布自由的市场环境下，报童的定价问题，并从缺货成本和库存成本的角度进行拓展. Kamburowski[16]在需求分布自由环境下研究报童问题,并提供了寻找最大 - 最小订购量的方法. Moon 等[17]将具有服务水平约束和可变订购提前期时的供应链管理拓展至需求分布自由环境中.

基于上述文献综述可知，在需求分布自由的市场环境下，鲜有从供应链系统的视角进行相关管理研究. 本文借鉴 Scarf[4]的研究成果，将供应链管理引入需求分布自由的市场环境，并以回购契约作为激励机制，研究供应链系统的最优订购—定价决策以及回购契约的协调性. 不失一般性，本文依次假设供应链系统中的上下游企业分别为供应商和零售商，考虑由其构成的二级供应链系统.

首先，基于期望收益准则和需求分布自由，将供应链系统的期望收益 $E\pi$、供应商的期望收益 $E\pi_{\mathrm{s}}$ 和零售商的期望收益 $E\pi_{\mathrm{r}}$ 转化为上界、下界确定性期望收益模型以及最小期望模型. 具体地，模型(1)通过“供给恰好满足需求”这一理想状态构建($E\pi,E\pi_{\mathrm{s}},E\pi_{\mathrm{r}}$)的上界期望收益模型($E\overline{\pi},E\overline{\pi}_{\mathrm{s}},E\overline{\pi}_{\mathrm{r}}$). 它们的获得只依赖产品的市场需求均值，与产品的需求分布无关. 模型(2)根据 Scarf[4]规则构建($E\pi,E\pi_{\mathrm{s}},E\pi_{\mathrm{r}}$)的下界期望收益模型($E\underline{\pi},E\underline{\pi}_{\mathrm{s}},E\underline{\pi}_{\mathrm{r}}$). 它们的获得只依赖产品的市场需求均值和方差，与产品的需求分布类型无关. 模型(3)以下界期望收益模型为基础，构建供应链系统的最小期望收益模型($E\underset{\sim}{\pi}$，$E\underset{\sim}{\pi}_{\mathrm{s}},E\underset{\sim}{\pi}_{\mathrm{r}}$). 模型(3)是模型(2)在市场需求退化到最恶劣时的情形，研究模型(3)的目的是为决策者提供在最坏的情况下作最充分的准备.

然后,推导每个模型在不同需求依赖价格模式(加型模式和乘型模式)下，供应链的最优订购—定价决策以及回购契约的协调性.

本文将供应链管理研究引入需求分布自由的市场环境，并以回购契约作为激励机制研究供应链系统的最优订购 - 定价决策以及回购契约的协调性. 研究发现，随着供应链系统的期望收益由上界期望收益转变至下界期望收益乃至退化至最小期望收益，回购契约的协调能力逐渐增强. 本文的研究拓展了供应链管理，并为决策者提供理论和应用支撑.

1 研究背景和假设

考虑由单一供应商和单一零售商组成的二级供应链系统，供应商和零售商均是风险中性的且两者的机会成本均为零. 供应商和零售商进行 Stackelberg 博弈,其中供应商是领导者，零售商是跟随者. 供应商向零售商提供回购契约以追求系统的期望收益最大，并实现自身的帕累托改进. 回购契约参数为$\{w,b\}$，其中参数 w 为单位产品的批发价格，参数 b 为单位剩余产品的回购

价格. 零售商根据契约参数向供应商订购 q 单位产品，其单位销售价格为 p，为内生变量. 供应商根据零售商的订单组织生产并在销售季节开始前将其运送给零售商，产品的单位生产成本为 c. 零售商面临的市场需求 D 是随机的，$D = D(p, \varepsilon)$，它由两部分组成：1) 依赖销售价格的确定性需求 $h(p)$；2) 与销售价格无关的随机需求因子 ε. ε 的期望和标准差分别为 $\mathrm{E}(\varepsilon) = \mu$ 和 $\mathrm{SD}(\varepsilon) = \sigma$. 依赖销售价格的确定性需求 $h(p)$ 具有连续的、正的和二次可微性质，其定义域 $p \in [c, \ddot{p}]$，$\ddot{p}$ 为市场最高可接受销售价格. 同时假设 $h(p)$ 具有递增的价格弹性[18]. $\mathrm{E}(\cdot)$ 为期望算子. 为了降低模型计算的复杂度，不失一般性，文章不考虑缺货损失和剩余残值，这两项的缺失不影响本文的主要结论(见第 3 节局限部分的阐述).

需求依赖价格一般有两种模式：1) 加型模式；2) 乘型模式. 这两种模式的具体讨论见 Petruzzi 和 Dada[19]，Yao 等[18]. 在加型模式和乘型模式下，需求依赖价格可分别表述为 $D = h(p) + \varepsilon$；$D = h(p) \times \varepsilon$. Petruzzi 和 Dada[19] 建议在加型模式下 $h(p)$ 采用线性形式，如 $h(p) = \alpha - \beta p$；在乘型模式下采用 $h(p)$ 的价格弹性为定值的形式，如 $h(p) = \alpha p^{-\beta}$. 本文采纳 Petruzzi 和 Dada[19] 的建议.

2　最优订购－定价决策和协调性分析

在回购契约框架下，零售商的期望收益 $E\pi_r(q,p;w,b)$、供应商的期望收益 $E\pi_s(q,p;w,b)$ 和供应链系统的期望收益 $E\pi(q,p;w,b)$ 分别为

$$E\pi_r(q,p;w,b) = (p-w)q - (p-b)\mathrm{E}(q-D)^+ \tag{1}$$

$$E\pi_s(q,p;w,b) = (w-c)q - b\mathrm{E}(q-D)^+ \tag{2}$$

$$E\pi(q,p;w,b) = (p-c)q - p\mathrm{E}(q-D)^+ \tag{3}$$

其中 $(x)^+ = \max(x, 0)$. 为了便于表述，将 $E\pi_r(q,p;w,b)$、$E\pi_s(q,p;w,b)$ 和 $E\pi(q,p;w,b)$ 分别简写成 $E\pi_r$、$E\pi_s$ 和 $E\pi$；式(1)～式(3) 构成的问题称为 P 环境.

给定 P 环境，供应商和零售商之间的博弈顺序为：1) 供应商首先向零售商提供一组回购契约参数；2) 零售商根据回购契约参数，向供应商订购产品以获取自身期望收益最大；3) 双方根据契约参数分摊供应链系统最优期望收益，实现帕累托改进.

当随机变量 ε 的累积分布函数 $F(\cdot)$ 未知时，本文基于 Scarf[4] 的研究成果，采用最大－最小原则分析 P 环境中供应链的最优决策和回购契约对供应链系统的协调性. 首先通过“供给恰好满足需求”这一理想情形，构建供应链的上界期望收益模型并对模型进行分析；然后根据 Scarf[4] 规则构建供应链系统的下界期望收益模型并对模型进行分析.

2.1　上界期望收益模型

当零售商的订购量恰好满足市场需求量时，产品完全销售. 供应链系统不会产生 1 单位产品的剩余，也不会发生 1 单位的缺货损失. 因此供应链上界期望收益模型的构建是以零售商的订购量恰好满足市场需求量这一理想状态为前提.

在理想状态下，零售商的期望收益 $E\overline{\pi}_r(q,p;w,b)$、供应商的期望收益 $E\overline{\pi}_s(q,p;w,b)$ 和供应链系统的期望收益 $E\overline{\pi}(q,p;w,b)$ 分别为

$$E\overline{\pi}_r(q,p;w,b) = (p-w)\mathrm{E}(D) = (p-w)z \tag{4}$$

$$E\overline{\pi}_s(q,p;w,b) = (w-c)\mathrm{E}(D) = (w-c)z \tag{5}$$

$$E\overline{\pi}(q,p;w,b) = (p-c)z \tag{6}$$

其中，当需求依赖价格的模式为加型模式时 $z = \alpha - \beta p + \mu$，为乘型模式时；$z = \mu\alpha p^{-\beta}$.

为了便于后文表述，将 $E\overline{\pi}_r(q,p;w,b)$，$E\overline{\pi}_s(q,p;w,b)$ 和 $E\overline{\pi}(q,p;w,b)$ 分别简写成 $E\overline{\pi}_r$、$E\overline{\pi}_s$ 和 $E\overline{\pi}$；式(4)～式(6) 构成的问题称为 $\overline{\mathrm{P}}$ 环境；当前文所定义的符号上方加“－”时，表示其是 $\overline{\mathrm{P}}$ 环境中的变量.

性质 1　在 $\overline{\mathrm{P}}$ 环境中，从供应链系统的角度分析有下列命题成立：

1) $E\overline{\pi}$ 是销售价格 $\overline{p}$ 的拟凹函数；供应链系统存在唯一最优销售价格 $\overline{p}^*$，它满足 $\left(\dfrac{\partial E\overline{\pi}}{\partial p}\right)\Big|_{p=\overline{p}^*} = 0$.

2) 最优销售价格 $\overline{p}^*$ 的确定依据需求依赖价格模式. 具体地：

①当 $h(p) = \alpha - \beta p$ 时，$\overline{p}^* = \overline{p}^*_+$；

② 当 $h(p) = \alpha p^{-\beta}$ 时，$\bar{p}^* = \bar{p}^*_{\times}$.

3) 供应链系统的最优生产量 $\bar{q}^*$ 存在且唯一，具体地：

①当 $h(p) = \alpha - \beta p$ 时，$\bar{q}^* = h(\bar{p}^*_{+}) + \mu$；

②当 $h(p) = \alpha p^{-\beta}$ 时，$\bar{q}^* = \mu h(\bar{p}^*_{\times})$.

其中 $\bar{p}^*_{+} = \dfrac{\alpha + \beta c + \mu}{2\beta}$；$\bar{p}^*_{\times} = \dfrac{\beta c}{\beta - 1}$.

证明 见附录‘性质 1 证明’.

性质 2 在 $\bar{P}$ 环境中，从零售商的角度分析有下列命题成立：

1) $E\bar{\pi}_{\mathrm{r}}$ 是销售价格 $\bar{p}_{\mathrm{r}}$ 的拟凹函数；零售商存在唯一最优销售价格 $\bar{p}^*_{\mathrm{r}}$，它满足 $\left(\dfrac{\partial E\bar{\pi}_{\mathrm{r}}}{\partial p}\right)\Bigg|_{p=\bar{p}^*_{\mathrm{r}}} = 0.$

2) 最优销售价格 $\bar{p}^*_{\mathrm{r}}$ 的确定依据需求依赖价格模式. 具体地：

①当 $h(p) = \alpha - \beta p$ 时，$\bar{p}^*_{\mathrm{r}} = \bar{p}^*_{\mathrm{r}+}$；

②当 $h(p) = \alpha p^{-\beta}$ 时，$\bar{p}^*_{\mathrm{r}} = \bar{p}^*_{\mathrm{r}\times}$.

3) . 零售商的最优订购量 $\bar{q}^*_r$ 存在且唯一. 具体地：

①当 $h(p) = \alpha - \beta p$ 时，$\bar{q}^*_r = h(\bar{p}^*_{r+}) + \mu$；

②当 $h(p) = \alpha p^{-\beta}$ 时，$\bar{q}^*_r = \mu h(\bar{p}^*_{r\times})$.

其中 $\bar{p}^*_{r+} = \dfrac{\alpha + \beta w + \mu}{2\beta}$；$\bar{p}^*_{r\times} = \dfrac{\beta w}{\beta - 1}$.

证明 见附录‘性质 2 证明’.

从性质 1 可以看出，在 $\bar{P}$ 环境下，供应链系统存在唯一的最优销售价格 $\bar{p}^*$，同时存在最优生产量 $\bar{q}^*$. 由后文的分析可知，$\bar{p}^*$ 是供应链系统允许销售价格变动的上界. 根据 Cachon[1] 对供应链系统的协调性的定义，回购契约协调 $\bar{P}$ 环境下的供应链系统，需满足零售商的订购量达到 $\bar{q}^*$，零售商的最优销售价格为 $\bar{p}^*$，供应商和零售商均可实现帕累托改进. 对比分析性质 1. 3) 和性质 2. 3) 可知，零售商的最优订购量等于供应链系统的最优生产量的充要条件是 $\bar{p}^*_{\mathrm{r}} = \bar{p}^*$. 再结合性质 1. 2) 和性质 2. 2) 可知，$\bar{p}^*_{\mathrm{r}} = \bar{p}^*$ 的充要条件是 $w = c$，$b = 0$，与需求依赖价格的模式无关. 此时，$E\bar{\pi}_{\mathrm{r}} = E\bar{\pi}$；$E\bar{\pi}_{\mathrm{s}} = 0$，零售商获得供应链系统的全部期望收益，供应商获得的期望收益为零. 即，零售商实现帕累托改进，而供应商没有获得任何帕累托改进. 因此，在需求分布自由的市场环境下，回购契约无法协调理想状态下的供应链系统.

2.2 下界期望收益模型

为了分析 $\underline{P}$ 环境中各参与方的下界期望收益，本文引入 Scarf[4] 规则，有下式成立

$$\mathrm{E}(q-D)^+ \leqslant 1/2\left[(\sigma^2+(q-z)^2)^{1/2}+(q-z)\right] \tag{7}$$

将式(7) 的右项分别代入式(1) ~式(3) 中得

$$E\underline{\pi}_{\mathrm{r}}(q,p;w,b) = (p-w)q - (p-b)/2 \times \left[(\sigma^2+(q-z)^2)^{1/2}+(q-z)\right] \tag{8}$$

$$E\underline{\pi}_{\mathrm{s}}(q,p;w,b) = (w-c)q - b/2 \times \left[(\sigma^2+(q-z)^2)^{1/2}+(q-z)\right] \tag{9}$$

$$E\underline{\pi}(q,p;w,b) = (p-c)q - p/2 \times \left[(\sigma^2+(q-z)^2)^{1/2}+(q-z)\right] \tag{10}$$

为了便于后文表述，将 $E\underline{\pi}_{\mathrm{r}}(q,p;w,b)$，$E\underline{\pi}_{\mathrm{s}}(q,p;w,b)$ 和 $E\underline{\pi}(q,p;w,b)$ 分别简写成 $E\underline{\pi}_{\mathrm{r}}$、$E\underline{\pi}_{\mathrm{s}}$ 和 $E\underline{\pi}$；式(8) ~式(10) 构成的问题称为 $\underline{P}$ 环境；当前文所定义的符号下方加“－”时，表示是 $\underline{P}$ 环境中的变量.

性质 3 在 $\underline{P}$ 环境中，从供应链系统的角度分析有下列命题成立：

1) 对于任意给定的销售价格 $\underline{p} \in [c, \ddot{p}]$，$E\underline{\pi}$ 是生产量 $\underline{q}$ 的拟凹函数；同时供应链系统的最优生产量

$$\underline{q}^* = z + \frac{\sigma(2\tau - 1)}{2(\tau(1-\tau))^{1/2}}$$

其中 $\tau = \dfrac{\underline{p} - c}{\underline{p}}$.

2) $E\underline{\pi}$ 是销售价格 $\underline{p}$ 的拟凹函数，且存在唯一的最优销售价格 $\underline{p}^*$，满足一阶最优条件，即 $\dfrac{\partial E\underline{\pi}}{\partial p}\Bigg|_{p=\underline{p}^*} = 0$.

3) 最优销售价格 $\underline{p}^*$ 的定价区间依据需求依赖价格模式. 具体地：

①当 $h(p) = \alpha - \beta p$ 时，$\underline{p}^* \in [\underline{p}_{+}, \bar{p}_{+}]$；

② 当 $h(p) = \alpha p^{-\beta}$ 时，$\underline{p}^* \in [\underline{p}_{\times}, \bar{p}_{\times}]$.

其中

$$\underline{p}_{+} = \frac{\alpha + 2\beta c + \mu}{3\beta},\ \bar{p}_{+} = \frac{\alpha + \beta c + \mu}{2\beta},$$

$\underline{p}_{\times}=\dfrac{2\beta c}{2\beta-1}$，$\bar{p}_{\times}=\dfrac{\beta c}{\beta-1}$

证明　见附录‘性质 3 证明’.

性质 4　在问题$\underline{P}$中，从零售商的角度分析有下列命题成立:

1) 对于任意给定的销售价格 $\underline{p}_r\in[w,\ddot{p}]$，$E\underline{\pi}_r$ 是订购量 $\underline{q}_r$ 的拟凹函数; 同时零售商的最优订购量

$$\underline{q}_r^*=z+\frac{\sigma(2\tau-1)}{2(\tau(1-\tau))^{1/2}}$$

其中 $\tau=\dfrac{p-w}{\underline{p}-b}$.

2) $E\underline{\pi}_r$ 是销售价格 $\underline{p}_r$ 的拟凹函数，且存在唯一最优销售价格 $\underline{p}_r^*$，满足一阶最优条件，即 $\left.\dfrac{\partial E\underline{\pi}_r}{\partial p}\right|_{p=\underline{p}_r^*}=0$.

3) 最优销售价格 $\underline{p}_r^*$ 的定价区间依据需求依赖价格模式. 具体地:

①当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$\underline{p}_r^*\in[\underline{p}_{r+},\bar{p}_{r+}]$;

② 当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$\underline{p}_r^*\in[\underline{p}_{r\times},\bar{p}_{r\times}]$.

其中

$$\underline{p}_{r+}=\frac{1}{2}\left(w-b+\left((w-b)^2+\frac{4b(\alpha+\mu)}{\beta}\right)^{1/2}\right),$$

$$\bar{p}_{r+}=\frac{\alpha+\beta w+\mu}{2\beta},\ \underline{p}_{r\times}=\frac{w\beta+b}{\beta},\ \bar{p}_{r\times}=\frac{\beta w}{\beta-1}$$

证明　见附录‘性质 4 证明’.

从性质 3 可知，在$\underline{P}$环境下,供应链系统存在唯一的最优销售价格 $\underline{p}^*$，再根据性质 3.1) 得出其最优的生产量 $\underline{q}^*$. 根据 Cachon[1] 对供应链系统的协调性的定义,回购契约协调环境下的供应链系统,需满足: 零售商的订购量达到 $\underline{q}^*$，零售商的最优销售$\underline{P}$价格为 $\underline{p}^*$，供应商和零售商均可实现帕累托改进. 对比分析性质 3.1) 和性质 4.1) 知，当零售商的最优销售价格 $\underline{p}_r^*=\underline{p}^*$ 时，零售商的订购量 $\underline{q}_r^*=\underline{q}^*$ 的充要条件是

$$\frac{2\tau-1}{(\tau(1-\tau))^{1/2}}=\frac{2\tau_r-1}{(\tau_r(1-\tau_r))^{1/2}}$$

其中 $\tau=\dfrac{p-c}{p}$，$\tau_r=\dfrac{p-w}{p-b}$.

当 $b=\underline{p}^*\dfrac{w-c}{\underline{p}^*-c}$[1]，可得 $w^*=c+c\dfrac{\underline{p}^*-c}{\underline{p}^*}$，所以 $b=\underline{p}^*\dfrac{w^*-c}{\underline{p}^*-c}$. 从 (w^*,b^*) 可以看出，回购契约是唯一确定的. 再将回购契约参数 (w^*,b^*) 分别代入性质 3.2) 和性质 4.2)，验证得 $\underline{p}_r^*=\underline{p}^*$. 此时零售商的期望收益 $E\underline{\pi}_r=\left(1-\dfrac{c}{\underline{p}^*}\right)E\underline{\pi}>0$，供应商的期望收益 $E\underline{\pi}_s=\left(\dfrac{c}{\underline{p}^*}\right)E\underline{\pi}>0$，即，供应商和零售商均实现帕累托改进. 因此，在$\underline{P}$环境下，存在唯一的一组契约参数使得回购契约协调供应链系统.

从性质 3 和性质 4 的证明过程中知，供应链系统的下界期望收益 $E\underline{\pi}$、零售商的下界期望收益 $E\underline{\pi}_r$ 分别为

$$E\underline{\pi}=(p-c)z-p\sigma(\tau(1-\tau))^{1/2},$$

$$E\underline{\pi}_r=(p-w)z-(p-b)\sigma(\tau_r(1-\tau_r))^{1/2}$$

虽然 τ 与 τ_r 不相等，但两者中均含有 $(\tau(1-\tau))^{1/2}$ 的形式. 接下来通过分析 $(\tau(1-\tau))^{1/2}$ 的取值区间来构建最小期望收益模型. 研究最小期望收益模型的目的是为了分析当决策者面对最差期望收益时的最优决策，以便于决策者在最坏的情况下作最充分的准备.

2.3　最小期望收益模型

为了构建最小期望收益模型,首选需要推导出$\underline{P}$环境下 $(\tau(1-\tau))^{1/2}$ 的取值范围.

性质 5　在$\underline{P}$环境中,有 $(\tau(1-\tau))^{1/2}\leqslant 1/2$，且 $(\tau(1-\tau))^{1/2}=1/2$ 的充要条件是 $\tau=1/2$.

证明　设函数 $f(\tau)=(\tau(1-\tau))^{1/2}$，其关于 τ 的一阶导数为 $\dfrac{\partial f(\tau)}{\partial\tau}=\dfrac{1-2\tau}{2(\tau(1-\tau))^{1/2}}$，根据一阶最优条件 $\dfrac{\partial f(\tau)}{\partial\tau}=0$，推导得 $\tau=1/2$. 因为 $\dfrac{\partial^2 f(\tau)}{\partial\tau^2}=-\dfrac{1}{4(\tau(1-\tau))^{3/2}}<0$，即 $f(\tau)$ 在 $\tau\in(0,1)$ 上是严格凹函数，因此 $f(\tau)$ 在 $\tau\in(0,1)$ 上有唯一的最大值，即 $f(\tau)\leqslant 1/2$，且 $f(\tau)=1/2$ 的充要条件是 $\tau=1/2$.　　证毕.

根据性质 5，得到供应链系统和零售商的最小期望收益，其函数表达式如式(11) 和式(12).

$$E\underset{\sim}{\pi}_r(q,p;w,b)=(p-w)z-(p-b)\sigma/2\quad(11)$$

$$E\underset{\sim}{\pi}(q,p;w,b)=(p-c)z-p\sigma/2\quad(12)$$

此外，供应商的期望收益函数为

$$E\underset{\sim}{\pi}_s(q,p;w,b)=(w-c)z-b\sigma/2 \tag{13}$$

为了便于后文表述，将 $E\underset{\sim}{\pi}_r(q,p;w,b)$，$E\underset{\sim}{\pi}_s(q,p;w,b)$ 和 $E\underset{\sim}{\pi}(q,p;w,b)$ 分别简写成 $E\underset{\sim}{\pi}_r$，$E\underset{\sim}{\pi}_s$ 和 $E\underset{\sim}{\pi}$；式(11)~式(13)构成的问题称为 $\underset{\sim}{P}$ 环境；当前文所定义的符号下方加"~"时，表示其是 $\underset{\sim}{P}$ 环境中的变量.

注意，在最小期望收益模型中，无需研究供应商期望收益的大小. 因为根据 Cachon[1] 对供应链系统的协调性的定义，供应商在 $\underset{\sim}{P}$ 环境下只要能实现帕累托改进即可.

性质 6 在 $\underset{\sim}{P}$ 环境中，从供应链系统的角度分析有下列命题成立：

1）$E\underset{\sim}{\pi}$ 是销售价格 $\underset{\sim}{p}$ 的拟凹函数，供应链系统存在唯一的最优销售价格 $\underset{\sim}{p}^*$，它满足 $\left.\dfrac{\partial E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p}\right|_{p=\underset{\sim}{p}^*}=0$.

2）最优销售价格 $\underset{\sim}{p}^*$ 的确定依据需求依赖价格模式. 具体地：

①当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$\underset{\sim}{p}^*=\underset{\sim}{p}_+^*$；

②当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$\underset{\sim}{p}^*=\underset{\sim}{p}_\times^*$.

3）供应链系统的最优生产量 $\underset{\sim}{q}^*$ 的确定依据需求依赖价格模式. 具体地：

①当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$\underset{\sim}{q}^*=h(\underset{\sim}{p}_+^*)+\mu$；

②当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$\underset{\sim}{q}^*=\mu h(\underset{\sim}{p}_\times^*)$.

其中 $\underset{\sim}{p}_+^*=\dfrac{\beta+\beta c+\mu-\sigma/2}{2\beta}$；$\underset{\sim}{p}_\times^*$ 满足

$$\mu\alpha(\underset{\sim}{p}_\times^*)^{-\beta}(\underset{\sim}{p}_\times^*(1-\beta)+\beta c)-\sigma\underset{\sim}{p}_\times^*/2=0$$

证明 见附录'性质 6 证明'.

性质 7 $\underset{\sim}{P}$ 环境中，从零售商的角度分析有下列命题成立：

1）$E\underset{\sim}{\pi}_r$ 是销售价格 $\underset{\sim}{p}_r$ 的拟凹函数；零售商存在唯一的最优销售价格 $\underset{\sim}{p}_r^*$，它满足 $z(1-\tau\eta)-\sigma/2=0$，其中

①当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$\underset{\sim}{p}_r^*=\underset{\sim}{p}_{r+}^*$、$z=h(\underset{\sim}{p}_{r+}^*)+\mu$、$\tau=\dfrac{\underset{\sim}{p}_{r+}^*-w}{\underset{\sim}{p}_{r+}^*-b}$、$\eta=\dfrac{\underset{\sim}{p}_{r+}^*\beta}{\alpha-\beta\underset{\sim}{p}_{r+}^*+\mu}$；

②当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$\underset{\sim}{p}_r^*=\underset{\sim}{p}_{r\times}^*$、$z=h(\underset{\sim}{p}_{r\times}^*)\mu$、$\tau=\dfrac{\underset{\sim}{p}_{r\times}^*-w}{\underset{\sim}{p}_{r\times}^*-b}$、$\eta=\beta$.

2）零售商的最优订购量 $\underset{\sim}{q}_r^*$ 的确定依据需求依赖价格模式. 具体地：

①当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$\underset{\sim}{q}_r^*=h(\underset{\sim}{p}_{r+}^*)+\mu$；

②当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$\underset{\sim}{q}_r^*=\mu h(\underset{\sim}{p}_{r\times}^*)$.

证明 见附录'性质 7 证明'.

从性质 6 可知，在 $\underset{\sim}{P}$ 环境下，供应链系统存在唯一的最优销售价格 $\underset{\sim}{p}^*$，同时存在最优生产量 $\underset{\sim}{q}^*$. 根据 Cachon[1] 对供应链系统的协调性的定义，回购契约协调 $\underset{\sim}{P}$ 环境下的供应链系统，需满足：零售商的订购量达到 $\underset{\sim}{q}^*$、零售商的最优销售价格为 $\underset{\sim}{p}^*$、供应商和零售商均可实现帕累托改进. 通过对比分析性质 6. 3）和性质 7. 2）知：零售商的最优订购量 $\underset{\sim}{q}_r^*=\underset{\sim}{q}^*$ 的充要条件是 $\underset{\sim}{p}_r^*=\underset{\sim}{p}^*$. 再结合性质 6. 1）和性质 7. 1）知，$\underset{\sim}{p}_r^*=\underset{\sim}{p}^*$ 的充要条件是 $b=\underset{\sim}{p}^*\dfrac{w-c}{\underset{\sim}{p}^*-c}$，即回购契约参数 b 是批发价格 w 的反应函数，此时 $w\in[c,\underset{\sim}{p}^*]$. 这时，零售商的期望收益 $E\underset{\sim}{\pi}_r=\left[\dfrac{\underset{\sim}{p}^*-w}{\underset{\sim}{p}^*-c}\right]E\underset{\sim}{\pi}\geqslant 0$；供应商的期望收益 $E\underset{\sim}{\pi}_s=\left[\dfrac{w-c}{\underset{\sim}{p}^*-c}\right]E\underset{\sim}{\pi}\geqslant 0$. 即，供应商和零售商均实现帕累托改进. 因此，在 $\underset{\sim}{P}$ 环境下，回购契约可以协调供应链系统.

2.4 小结

从 2.1 节~2.3 节的分析可知，不同环境下，回购契约协调供应链系统绩效和协调参数不同（见表 1）.

从表 1 知，随着市场环境由 $\overline{P}$ 转变至 $\underline{P}$ 再转变至 $\underset{\sim}{P}$，回购契约的协调性越来越灵活. 即在问题 $\overline{P}$ 环境下，回购契约无法协调供应链系统，因为供应商的期望收益为零，没有实现任何帕累托改进. 在问题 $\underline{P}$ 环境下，回购契约可以协调供应链系统，零售商和供应商之间按照一定的比例分摊供应链系统的最优期望收益，双方实现帕累托改进. 但此时的回购契约参数（w，b）具有唯一性，即回购参数设计不具有灵活性. 在问题 $\underset{\sim}{P}$ 环境下，回购契约可以灵活地协调供应链，因为此时的回购契约参数 b 是契约参数 w 的反应函数，只

要供应商设定的参数 w 在合理的范围内，零售商和供应商均可按照比例分摊供应链系统的最优期望收益，双方均可实现帕累托改进. 导致上述现象发生的解释是，当零售商面临的随机需求的不确定性增大，同时分摊供应链系统最优期望收益又在降低时，零售商的最优订购量会逐渐降低. 即使供应商提供的回购契约能激励零售商订购系统的最优生产量，这个量也不足以使得供应商从规模效益中获利，因此供应商提供的回购契约越来越灵活，以便于双方灵活的分享低利润时的供应链整体利润.

表 1　不同环境下回购契约参数设计及其协调性

Table 1 Parameters designing of buyback contract and its coordination under different environment

环境	回购契约参数	期望收益	协调性
$\overline{P}$	$w = c; b = 0$	$E\overline{\pi}_r = \overline{\pi}; E\overline{\pi}_s = 0$	无法协调
$\underline{P}$	$w^* = c + c\frac{\underline{p}^* - c}{\underline{p}^*}; b^* = \underline{p}^* \frac{w - c}{\underline{p}^* - c}$	$E\underline{\pi}_r = (1 - \lambda) E\underline{\pi}; E\underline{\pi}_s = \lambda E\underline{\pi}, \lambda = c/p^*$	单一协调
$\underset{\sim}{P}$	$w \in [c, \underset{\sim}{p}^*]; b = \underset{\sim}{p}^* \frac{w - c}{\underset{\sim}{p}^* - c}$	$E\underset{\sim}{\pi}_r = (1-\varphi) E\underset{\sim}{\pi}; E\underset{\sim}{\pi}_s = \varphi E\underset{\sim}{\pi}, \varphi = \frac{w - c}{\underset{\sim}{p}^* - c}$	灵活协调

3　结束语

为了克服新产品、短生命周期产品缺乏充分的销售数据来刻画需求分布，或者难以用概率理论刻画产品的标准分布的困难，本文从需求分布自由的角度分析供应链系统、零售商和供应商的期望收益. 通过最大 – 最小原则建立供应链和各参与方的上界期望收益、下界期望收益和最小期望收益模型. 讨论每个模型在不同的需求依赖价格模式下，供应链的最优订购 – 定价决策以及回购契约的协调性.

研究发现，随着供应链系统的期望收益由上界期望收益转变至下界期望收益乃至退化至最小期望收益，回购契约协调供应链系统的能力逐渐增强. 在供应链的上界期望收益模型中，回购无法协调供应链系统，因为此时零售商实现帕累托最优，供应商无法获得帕累托改进; 在供应链的下界期望收益模型中，存在唯一的一组回购契约参数实现供应链协调协调，供应商和零售商均实现帕累托改进; 在供应链的最小期望收益模型中，回购价格是批发价格的反应函数，回购契约可以灵活的协调供应链系统，供应商和零售商均实现帕累托改进. 上述的推导结论对现实有一定的指导意义. 如当某一新产品刚投放市场时，由于需求的不确定性很大，企业无法获得具体的需求分布，供应商可以通过灵活的调整批发价格以实现双方的帕累托改进; 当产品逐步打开市场局面，获得一定的市场份额且短时期内企业无法通过历史数据完全刻画需求分布时，供应商和零售商之间可以形成一种稳定的定价策略和契约机制.

本文的研究具有一定程度的局限.

1) 基于需求分布自由建立的模型虽然不依赖需求的具体分布，但依赖随机需求的均值和方差，因此，对有效历史数据的筛选和收集同样提出较高的要求.

2) 本文没有考虑缺货损失和剩余产品的残值对供应链绩效以及契约的协调性影响. 事实上，这两项的缺失并不影响本文的主要结论. 一方面，根据期望剩余量 $\mathrm{E}(q - D)^+$ 和期望缺货量 $\mathrm{E}(D - q)^+$ 的函数表达式可知两者存在如下关系 $\mathrm{E}(D - q)^+ = \mu - q + \mathrm{E}(q - D)^+$. 因此，可以通过代数运算将二者进行线性变换，而线性变换不改变函数性质. 另一方面，Cachon[1] 指出，当剩余产品交由零售商自行处理时，供应商将回购参数 b 调整为 $b - v$ 即可. 本文假设剩余产品是由零售商自行处理的，因此，在本文中缺失的这两项不影响文章的主要结论，虽然，考虑这两项更符合现实情况.

3) 本文假设决策者均为风险中性的. 然而，当面临需求分布自由的市场环境时，决策者往往表现为风险规避. 此外，对比分析需求分布自由与需求分布已知的市场环境下时，供应链模型之间的精度和效率以及将基于需求分布自由拓展至其它供应链契约的研究中是进一步研究的重点.

参 考 文 献:

[1] Cachon G. Supply Chain Coordination with Contracts [M] // Graves S, de Kok T, eds. Handbooks in Operations Research and Management Science: Supply Chain Management, Amsterdam: North-Holland, 2003.

[2] Kao C, Hsu W K. A single-period inventory model with fuzzy model [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2002, 43(1): 841 – 848.

[3] Yu Y, Zhu J, Wang C W. A newsvendor model with fuzzy price-dependent demand [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(5): 2644 – 2661.

[4] Scarf H. A Min-Max Solution of an Inventory Problem [M] // Arrow K, Karlin S, Scarf H. (eds) Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, California: Stanford University Press, 1958: 201 – 209.

[5] Pasternack B A. Optimal pricing and returns policies for perishable commodities [J]. Management Science, 1985, 4(2): 166 – 176.

[6] Kandel E. The right to return [J]. Journal of Law and Economics, 1996, 39(2): 329 – 356.

[7] Emmons H, Gilbert S M. Note: The role of returns policies in pricing and inventory decision of catalogue goods [J]. Management Science, 1998, 44(2): 276 – 283.

[8] 林润辉，侯如靖. 互惠偏好对回购契约协调效果和决策行为影响 [J]. 工业工程与管理，2014，19(1): 85 – 90.
Lin Runhui, Hou Rujing. The effect of reciprocity on buyback contract coordination and decision behaviors [J]. Industrial Engineering and Management, 2014, 19(1): 85 – 90. (in Chinese)

[9] 杜少甫，杜 婵，梁 樑，等. 考虑公平关切的供应链契约与协调 [J]. 管理科学学报，2010，13(11): 41 – 48.
Du Shaofu, Du Chan, Liang Liang, et al. Supply chain coordination considering fairness concerns [J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(11): 41 – 48. (in Chinese)

[10] 鲁 力，陈 旭. 不同碳排放政策下基于回购合同的供应链协调策略 [J]. 控制与决策，2014，29(12): 2212 – 2221.
Lu Li, Chen Xu. Supply chain coordination with buyback contract under different carbon emission policies [J]. Control and Decision, 2014, 29(12): 2212 – 2221. (in Chinese)

[11] 林润辉，侯如靖. 回购契约协调效果的实验室检验和失效原因分析 [J]. 管理科学，2014，27(3): 75 – 82.
Lin Runhui, Hou Rujing. Experimental tests of buyback contract coordination and analysis for its failure [J]. Journal of Management Science, 2014, 27(3): 75 – 82. (in Chinese)

[12] 王迎军. 顾客需求驱动的供应链契约问题综述 [J]. 管理科学学报，2005，8(2): 68 – 76.
Wang Yingjun. Overview of supply chain contract problems driven by customer demand [J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(2): 68 – 76. (in Chinese)

[13] Gallego G, Moon I. The distribution free newsboy problem: Review and extensions [J]. The Journal of the Operational Research Society, 1993, 44(8): 825 – 834.

[14] Liao Y, Banerjee A, Yan C Y. A distribution-free newsvendor model with balking and lost sales penalty [J]. International Journal of Production Economics, 2011, 133(1): 224 – 227.

[15] Raza S A. A distribution free approach to newsvendor problem with pricing [J]. The Quarterly Journal of Operation Research, 2013, 10: 1 – 24.

[16] Kamburowski J. The distribution-free newsboy problem under the worst-case and best-case scenarios [J]. European Journal of Operational Research, 2014, 237(1): 106 – 112.

[17] Moon I. Shin E, Sarkar B. Min-max distribution free continuous-review model with a service level constraint and variable lead time [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 229(2): 310 – 315.

[18] Yao L, Chen Y F, Yan H. The newsvendor problem with pricing: Extension [J]. International Journal of Management Science and Engineering Management, 2006, 1(1): 3 – 16.

[19] Petruzzi N C, Dada M. Pricing and the news vendor problem: A review with extensions [J]. Operation Research, 1999, 47

(2): 183 - 194.

Coordination model of buyback contract based on expected revenue criterion and distribution-free demand

JIAN Ming[1], *FANG Xin*[1,2*], *JIN Liu-qian*[3,4], *ZHOU Ya-jun*[1]

1. School of Transportation and Logistics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;
2. School of Business Planning, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;
3. School of Economics and Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;
4. School of Economics and Management, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

Abstract: Taking buyback contract as an incentive mechanism of supply chain system, the optimal ordering quantity, pricing, and system coordination in a single-supplier single-retailer supply chain under distribution-free environment is investigated. The supplier and the retailer are both risk neutral. Researches on the performance and coordination of supply chain under distribution-free environment are of great importance, especially for new products with insufficient historic sales data, short life cycle products, and products which are difficult to identify the demand distribution by Probability Theory. An upper-bound expected revenue model, a lower-bound expected revenue model and a minimum expected revenue model are established, respectively, for the supplier-retailer supply based on the expected revenue criterion and distribution-free approach. The optimal ordering quantity, pricing decision, and system coordination under the different demand-dependent pricing modes are analyzed. The result shows that the coordination ability of the buyback contract increases as the supply-chain system's expected revenue changes from the upper-bound expected revenue model to the lower-bound expected revenue model and finally to the minimum expected revenue model. Namely, for the upper-bound expected revenue model, the buyback contract cannot coordinate the supply chain; for the lower-bound expected revenue model, there exists a unique buyback contract; and for the minimum expected revenue model, the buyback contract is a reactive function of the wholesale contract, which can flexibly coordinate the supply-chain system.

Key words: distribution free; buyback contract; supply chain coordination; price-depended demand

附录

性质 1 证明:

1) 考虑供应链系统期望收益 $E\overline{\pi}$. $E\overline{\pi} = (p-c)z$, 其关于 p 的一阶导数为 $\frac{\partial E\overline{\pi}}{\partial p} = (p-c)\frac{\partial \bar{z}}{\partial p} + z = z(1-\tau\eta)$. 由一阶最优条件, $\frac{\partial E\overline{\pi}}{\partial p} = 0$, 可得供应链系统的最优销售价格 $\bar{p}^*$ 满足 $1-\tau\eta = 0$, 式中 $\tau = \frac{p-c}{p}$; $\eta = \frac{-p}{z}\frac{\partial z}{\partial p}$. 为了证明 $\bar{p}^*$ 的唯一性, 令 $f(p) = \tau\eta$. 则其一阶导数为 $\frac{\partial f(p)}{\partial p} = \eta\frac{\partial \tau}{\partial p} + \tau\frac{\partial \eta}{\partial p}$, 因为 $\frac{\partial \tau}{\partial p} = \frac{c}{p^2} > 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial p} \geqslant 0$, 所以 $\frac{\partial f(p)}{\partial p} > 0$, 即 $f(p)$ 是 p 的严格单调递增函数. 又因为 $\lim_{p\to c} f(p) \to 0$, 所以存在唯一的 $\bar{p}^*$, 使得 $\left.\frac{\partial E\overline{\pi}}{\partial p}\right|_{p=\bar{p}^*} = 0$. 为了证明 $E\overline{\pi}$ 是销售价格 $\bar{p}$ 的拟凹函数, 只需要证明 $\left.\frac{\partial^2 E\overline{\pi}}{\partial p^2}\right|_{\frac{\partial E\overline{\pi}}{\partial p}=0} \leqslant 0$ 即可. $E\overline{\pi}$ 关于销售价格 $\bar{p}$ 的二阶导数为 $\frac{\partial^2 E\overline{\pi}}{\partial p^2} = (1-\tau\eta)\frac{\partial z}{\partial p} - z\left(\eta\frac{\partial \tau}{\partial p} + \tau\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)$. 因为 $1-\tau\eta = 0$, $z > 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial p} \geqslant 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial p} \geqslant 0$, 所以 $\left.\frac{\partial^2 E\overline{\pi}}{\partial p^2}\right|_{\frac{\partial E\overline{\pi}}{\partial p}=0} \leqslant 0$.

2）由上述证明可知，供应链系统存在唯一销售价格 $\vec{p}^*$，使得 $1-\tau\eta=0$，其中 $\eta=\frac{-p\frac{\partial z}{\partial p}}{z}=\frac{p\beta}{\alpha-\beta p+\mu}$.

① 当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$z=\alpha-\beta p+\mu$. 则 $\eta=\frac{-p\frac{\partial z}{\partial p}}{z}=\frac{p\beta}{\alpha-\beta p+\mu}$. 所以，$\vec{p}^*=\vec{p}_+^*=\frac{\alpha+\beta c+\mu}{2\beta}$.

② 当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$z=\mu\alpha p^{-\beta}$. 则 $\eta=\frac{-p\frac{\partial z}{\partial p}}{z}=\beta$. 所以，$\vec{p}^*=\vec{p}_\times^*=\frac{\beta c}{\beta-1}$.

3）因为 $\vec{p}^*=z$，所以，当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$\vec{q}^*=h(\vec{p}_+^*)+\mu$；当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$\vec{q}^*=\mu h(\vec{p}_\times^*)$. 证毕.

性质 2 证明:

1）考虑零售商的期望收益函数 $E\overline{\pi}_r$. $E\overline{\pi}_r=(p-w)z$，其关于 p 的一阶导数为 $\frac{\partial E\overline{\pi}_r}{\partial p}=(p-w)\frac{\partial z}{\partial p}+z=z(1-\tau\eta)$，式中 $\tau=\frac{p-w}{p}$；$\eta=\frac{-p\frac{\partial z}{\partial p}}{z}$. 由一阶最优条件，$\frac{\partial E\overline{\pi}_r}{\partial p}=0$，可得零售商的最优销售价格 $\vec{p}_r^*$ 满足 $1-\tau\eta=0$. 为了证明 $\vec{p}_r^*$ 具有唯一性，令 $f(p)=\tau\eta$，则其一阶导数 $\frac{\partial f(p)}{\partial p}=\eta\frac{\partial\tau}{\partial p}+\tau\frac{\partial\eta}{\partial p}$，因为 $\frac{\partial\tau}{\partial p}=\frac{w}{p^2}>0$，$\frac{\partial\eta}{\partial p}\geqslant 0$，所以 $\frac{\partial f(p)}{\partial p}>0$，即 $f(p)$ 是 p 的严格递增函数，又因为 $\lim_{p\to w}f(p)\to 0$，所以存在唯一的 $\vec{p}_r^*$，使得 $\left.\frac{\partial E\overline{\pi}_r}{\partial p}\right|_{p=\bar{p}_r^*}=0$. 为了证明 $E\overline{\pi}_r$ 是销售价格 $\bar{p}_r$ 的拟凹函数，只需要证明 $\left.\frac{\partial^2 E\overline{\pi}_r}{\partial p^2}\right|_{\frac{\partial E\overline{\pi}_r}{\partial p}=0}\leqslant 0$ 即可. $E\overline{\pi}_r$ 关于销售价格 $\bar{p}_r$ 的二阶导数为 $\frac{\partial^2 E\overline{\pi}_r}{\partial p^2}=(1-\tau\eta)\frac{\partial z}{\partial p}-z\left(\eta\frac{\partial\tau}{\partial p}+\tau\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)$. 因为 $1-\tau\eta=0$，$z>0$，$\frac{\partial\tau}{\partial p}\geqslant 0$，$\frac{\partial\eta}{\partial p}\geqslant 0$，所以 $\left.\frac{\partial^2 E\overline{\pi}_r}{\partial p^2}\right|_{\frac{\partial E\overline{\pi}_r}{\partial p}=0}\leqslant 0$.

2）由上述证明可知，零售商存在唯一的销售价格 $\bar{p}_r^*$，使得 $1-\tau\eta=0$，其中 $\tau=\frac{p-w}{p}$.

① 当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$z=\alpha-\beta p+\mu$，则 $\eta=-\frac{\frac{p\partial z}{\partial p}}{z}=\frac{p\beta}{\alpha-\beta p+\mu}$. 所以 $\vec{p}_r^*=\vec{p}_{r+}^*=\frac{\alpha+\beta w+\mu}{2\beta}$.

② 当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$z=\mu\alpha p^{-\beta}$，则 $\eta=-\frac{\frac{p\partial z}{\partial p}}{z}=\beta$. 所以 $\bar{p}_r^*=\bar{p}_{r\times}^*=\frac{\beta w}{\beta-1}$.

3）因为 $\vec{q}_r^*=z$，所以，当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$\vec{q}_r^*=h(\vec{p}_{r\times}^*)+\mu$；当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$\vec{q}_r^*=\mu h(\vec{p}_{r+}^*)$. 证毕.

性质 3 证明:

1）考虑供应链系统的期望收益函数 $E\underline{\pi}$. $E\underline{\pi}=(p-c)q-p/2\left[(\sigma^2+(q-z)^2)^{1/2}+(q-z)\right]$，其关于 q 的一阶导数为 $\frac{\partial E\underline{\pi}}{\partial q}=p-c-\frac{p}{2}\left[\frac{q-z}{(\sigma^2+(q-z)^2)^{1/2}}+1\right]$. 由一阶最优条件，$\frac{\partial E\underline{\pi}}{\partial q}=0$，可得供应链系统的最优生产量 $\underline{q}^*$ 满足 $\underline{q}^*=z+\frac{\sigma(2\tau-1)}{2(\tau(1-\tau))^{1/2}}$，其中 $\tau=\frac{p-c}{p}$. 为了证明 $E\underline{\pi}$ 是 $\underline{q}$ 的拟凹函数，只需要证明 $\left.\frac{\partial^2 E\underline{\pi}}{\partial q^2}\right|_{\frac{\partial E\underline{\pi}}{\partial q}}\leqslant 0$. 即可. $E\underline{\pi}$ 关于 q 的二阶导数为 $\frac{\partial^2 E\underline{\pi}}{\partial q^2}=-\frac{p\sigma^2}{2(\sigma^2+(q-z)^2)^{3/2}}\leqslant 0$，所以 $E\underline{\pi}$ 是 q 的拟凹函数.

2）将 $\underline{q}^*$ 代入 $E\underline{\pi}$ 中得 $E\underline{\pi}=(p-c)\left(z-\frac{\sigma(1-\tau)}{(\tau(1-\tau))^{1/2}}\right)$. 因为 $\tau=\frac{p-c}{p}$，进一步化简 $E\underline{\pi}$ 得 $E\underline{\pi}=(p-c)z-\sigma(c(p-c))^{1/2}$. $E\underline{\pi}$ 关于 p 的一阶导数 $\frac{\partial E\underline{\pi}}{\partial q}=(p-c)\frac{\partial z}{\partial p}+z-\frac{\sigma}{2}\left(\frac{c}{p-c}\right)^{1/2}$，由一阶最优条件 $\frac{\partial E\underline{\pi}(q^*)}{\partial q}=0$，可得供应链系统的最优销售价格 $\underline{p}^*$ 满足 $(p-c)\frac{\partial z}{\partial p}+z-\frac{\sigma}{2}\left(\frac{c}{p-c}\right)^{1/2}=0$. 因为 $\eta=-\frac{p\frac{\partial z}{\partial p}}{z}$，$\tau=\frac{p-c}{p}$，所以一阶最优条件等价于 $z(1-\tau\eta)-\frac{\sigma}{2}\left(\frac{c}{p-c}\right)^{1/2}=0$. 因为 $z\geqslant 0$，$\frac{\sigma}{2}\left(\frac{c}{p-c}\right)^{1/2}\geqslant 0$. 所以 $\tau\eta\leqslant 1$. 为了证明 $\underline{p}^*$ 的唯一性，令 $f(p)=z(1-\tau\eta)$；$g(p)=\frac{\sigma}{2}\left(\frac{c}{p-c}\right)^{1/2}$. 则有 $\frac{\partial f(p)}{\partial p}=(1-\tau\eta)\frac{\partial z}{\partial p}-z\left(\eta\frac{\partial\tau}{\partial p}+\tau\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)$；$\frac{\partial g(p)}{\partial p}=\frac{\sigma}{4}\left(\frac{c}{p-c}\right)^{1/2}\frac{1}{p-c}$. 因为 $1-\tau\eta\geqslant 0$、$\frac{\partial z}{\partial p}\leqslant 0$、$z\geqslant 0$、$\eta\frac{\partial\tau}{\partial p}\geqslant 0$、$\tau\frac{\partial\eta}{\partial p}\geqslant 0$. 所以 $\frac{\partial f(p)}{\partial p}\leqslant 0$，$\frac{\partial g(p)}{\partial p}\geqslant 0$. 即 $f(p)$ 是 p 的减函数，$g(p)$ 是 p 的增函数. 因为 $\lim_{p\to c}f(p)\to z>0$，$\lim_{p\to c}g(p)\to\infty<0$，所以

供应链系统存在唯一的最优销售价格$\underline{p}^*$．为了证明$E\underline{\pi}$是p的拟凹函数，只需证明$\left.\frac{\partial^2 E\underline{\pi}}{\partial p^2}\right|_{\frac{\partial E\underline{\pi}}{\partial p}=0}\leqslant 0$即可．从上述证明知$\frac{\partial^2 E\overline{\pi}}{\partial p^2}=\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial g}{\partial p}$．即，$\frac{\partial^2 E\underline{\pi}}{\partial p^2}=(1-\tau\eta)\frac{\partial z}{\partial p}=-z\left(\eta\frac{\partial \tau}{\partial p}+\tau\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)+\frac{\sigma}{4}\left(\frac{c}{p-c}\right)^{1/2}\frac{1}{p-c}$．因为$\frac{\sigma}{2}\left(\frac{c}{p-c}\right)^{1/2}=z(1-\tau\eta)$．将其代入$\frac{\partial^2 E\underline{\pi}}{\partial p^2}$中，得$\frac{\partial^2 E\underline{\pi}}{\partial p^2}=\frac{z(1-\tau\eta)}{2(p-c)}(1-2\tau\eta)-z\left(\eta\frac{\partial \tau}{\partial p}+\tau\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)$．由于$\frac{z(1-\tau\eta)}{2(p-c)}\geqslant 0$、$z\left(\eta\frac{\partial \overline{\tau}}{\partial p}+\tau\frac{\partial \overline{\eta}}{\partial p}\right)\geqslant 0$，所以$\frac{\partial^2 E\underline{\pi}}{\partial p^2}\leqslant 0$的充分条件是$1/2\leqslant\tau\eta$．综上所述，$E\underline{\pi}$是关于$p$的拟凹函数的充分条件是$\tau\eta\in[0.5,1]$．

3）接来下推导供应链系统最优销售价格的区间．

① 当$h(p)=\alpha-\beta p$时，$z=\alpha-\beta p+\mu$，则$\eta=-\frac{p\frac{\partial z}{\partial p}}{z}=\frac{p\beta}{\alpha-\beta p+\mu}$．因为$\tau=\frac{p-c}{p}$，则由$\tau\eta\in[0.5,1]$可以推导出$\frac{\alpha+2\beta c+\mu}{3\beta}\leqslant\underline{p}^*\leqslant\frac{\alpha+\beta c+\mu}{2\beta}$．

② 当$h(p)=\alpha p^{-\beta}$时，$z=\mu\alpha p^{-\beta}$则$\eta=-\frac{p\frac{\partial z}{\partial p}}{z}=\beta$．因为$\tau=\frac{p-c}{p}$，则由$\tau\eta\in[0.5,1]$可以推导出$\frac{2\beta c}{2\beta-1}\leqslant\underline{p}^*\leqslant\frac{\beta c}{\beta-1}$．　　证毕．

性质 4 证明：

1）考虑零售商的期望收益函数$E\underline{\pi}_r$．$E\underline{\pi}_r=(p-w)q-1/2(p-b)\left[(\sigma^2+(q-z)^2)^{1/2}+(q-z)\right]$，其关于$q$的一阶导数为$\frac{\partial E\underline{\pi}_r}{\partial q}=(p-w)-\frac{p-b}{2}\left(\frac{q-z}{(\sigma^2+(q-z)^2)^{1/2}}+1\right)$．由一阶最优条件，$\frac{\partial E\underline{\pi}_r}{\partial q}=0$，可得零售商的最优订购量$\underline{q}_r^*$满足$\underline{q}_r^*=z+\sigma\frac{2\tau-1}{2(\tau(1-\tau))^{1/2}}$，其中$\tau=\frac{p-w}{p-b}$．考虑到$E\underline{\pi}_r$关于$q$的二阶导数为$\frac{\partial^2 E\overline{\pi}_r}{\partial q^2}=-\frac{(p-b)\sigma^2}{2((q-z)^2+\sigma^2)^{3/2}}\leqslant 0$，即对于任意给定的销售价格$p\in[w,\ddot{p}]$，$E\underline{\pi}(q)$是关于$q$的拟凹函数．

2）将$\underline{q}_r^*$代入$E\underline{\pi}_r$中，得零售商的期望收益$E\underline{\pi}_r=(p-w)\left(z-\frac{\sigma(1-\tau)}{(\tau(1-\tau))^{1/2}}\right)$．因为$\tau=\frac{p-w}{p-b}$，所以$E\underline{\pi}_r$化简为$E\underline{\pi}_r=(p-w)z-\sigma((p-w)(w-b))^{1/2}$，则$E\underline{\pi}_r$的一阶导数为$\frac{\partial E\underline{\pi}_r}{\partial p}=(p-w)\frac{\partial z}{\partial p}+z-\frac{\sigma}{2}\left(\frac{w-b}{p-w}\right)^{1/2}$．由一阶最优条件$\frac{\partial E\underline{\pi}_r}{\partial p}=0$，可得零售商最优销售价格$p_r^*$满足$z\left(1-\tau\eta\frac{p-b}{p}\right)-\frac{\sigma}{2}\left(\frac{w-b}{p-w}\right)^{1/2}=0$．因为$z>0$，$\frac{\sigma}{2}\left(\frac{w-b}{p-w}\right)^{1/2}\geqslant 0$，所以$\tau\eta\leqslant\frac{p}{p-b}$．为了证明零售商存在唯一销售价格$\underline{p}_r^*$，令$f(p)=z\left(1-\tau\eta\frac{p-b}{p}\right)$；$g(p)=-\frac{\sigma}{2}\left(\frac{w-b}{p-w}\right)^{1/2}$，则$\frac{\partial g(p)}{\partial p}=\frac{\sigma}{4}\left(\frac{w-b}{p-w}\right)^{1/2}\frac{1}{p-w}\geqslant 0$；$\frac{\partial f(p)}{\partial p}=\left(1-\tau\eta\frac{p-b}{p}\right)\frac{\partial z}{\partial p}-z\left(\tau\eta\frac{b}{p^2}+\eta\frac{p-b}{p}\frac{\partial \tau}{\partial p}+\tau\frac{p-b}{p}\times\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)$．因为$\frac{\partial \eta}{\partial p}\geqslant 0$，$\frac{\partial z}{\partial p}\leqslant 0$，$\frac{\partial \tau}{\partial p}=\frac{w-b}{(p-b)^2}\geqslant 0$，$1-\tau\eta\times\frac{p-b}{p}\geqslant 0$，所以$\frac{\partial f(p)}{\partial p}\leqslant 0$成立．即$f(p)$是$p$的单调递减函数，$g(p)$是$p$的单调递增函数．因为$\lim\limits_{p\to w}f(p)\to z>0$，$\lim\limits_{p\to w}g(p)\to-\infty<0$，所以存在唯一的销售价格$\underline{p}_r^*$使得一阶最优条件成立．为了证明$E\underline{\pi}_r$是关于$p$的拟凹函数，只需证明$\left.\frac{\partial^2 E\underline{\pi}_r}{\partial p^2}\right|_{\frac{\partial E\underline{\pi}}{\partial p}=0}\leqslant 0$即可．$E\underline{\pi}_r$关于$q$的二阶导数为$\frac{\partial^2 E\underline{\pi}_r}{\partial p^2}=\frac{\partial f(p)}{\partial p}+\frac{\partial g(p)}{\partial p}$．因为$\frac{\sigma}{2}\left(\frac{w-b}{p-w}\right)^{1/2}=z\left(1-\tau\eta\frac{p-b}{p}\right)$，所以$\frac{\partial^2 E\underline{\pi}_r}{\partial p^2}$化简为$\frac{\partial^2 E\underline{\pi}_r}{\partial p^2}=\frac{z}{2\tau p}\left(1-\tau\eta\frac{p-b}{p}\right)\left(\frac{b}{p-b}-\eta\tau\right)-z\left(\tau\eta\frac{b}{p^2}+\eta\frac{p-b}{p}\frac{\partial \tau}{\partial p}+\tau\frac{p-b}{p}\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)$．因为$\frac{z}{2\tau p}\left(1-\tau\eta\frac{p-b}{p}\right)\geqslant 0$，$\frac{\partial \eta}{\partial p}\geqslant 0$，$\frac{\partial \tau}{\partial p}\geqslant 0$．因此当$\frac{b}{p-b}\leqslant\tau\eta$时$\frac{\partial^2 E\underline{\pi}_r}{\partial p^2}\leqslant 0$．即当$\tau\eta\in\left[\frac{b}{p-b},\frac{p}{p-b}\right]$时，$E\underline{\pi}_r$是销售价格$p$的拟凹函数．

3）推导零售商销售价格的变动范围．

① 当$h(p)=\alpha-\beta p$时，$z=\alpha-\beta p+\mu$，则$\eta=\frac{p\beta}{\alpha-\beta p+\mu}$．因为$\tau=\frac{p-w}{p-b}$，所以由$\tau\eta\in\left[\frac{b}{p-b},\frac{p}{p-b}\right]$推导出$\frac{1}{2}\left(w-b+\left((w-b)^2+4b\frac{a+\mu}{\beta}\right)^{1/2}\right)\leqslant\underline{p}_r^*\leqslant\frac{\alpha+\beta w+\mu}{2\beta}$．

② 当$h(p)=\alpha p^{-\beta}$时，$z=\mu\alpha p^{-\beta}$，则$\eta=-\frac{p\frac{\partial z}{\partial p}}{z}=\beta$．因为$\tau=\frac{p-w}{p-b}$，所以由$\tau\eta\in\left[\frac{b}{p-b},\frac{p}{p-b}\right]$推导出$\frac{w\beta+b}{\beta}\leqslant\underline{p}_r^*\leqslant\frac{\beta w}{(\beta-1)}$．　　证毕．

性质 6 证明:

1) 考虑供应链系统的期望收益 $E\underset{\sim}{\pi}$. $E\underset{\sim}{\pi}=(p-c)z-\frac{p\sigma}{2}$，其关于 p 的一阶导数为 $\frac{\partial E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p}=(p-c)\frac{\partial z}{\partial p}+z-\frac{\sigma}{2}$. 由其一阶最优条件 $\frac{\partial E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p}=0$，可得供应链系统的最优销售价格 $\underset{\sim}{p}^*$ 满足 $z(1-\tau\eta)-\frac{\sigma}{2}=0$，其中 $\tau=\frac{p-c}{p}$. 由于 $z>0$，$\frac{\sigma}{2}>0$，所以 $\tau\eta\leqslant 1$. 接下来分析销售价格 $\underset{\sim}{p}^*$ 具有唯一性. 令 $f(p)=z(1-\tau\eta)$，$g(p)=-\frac{\sigma}{2}$，则 $\frac{\partial f}{\partial p}=(1-\tau\eta)\frac{\partial z}{\partial p}-z\left(\tau\frac{\partial \eta}{\partial p}+\eta\frac{\partial \tau}{\partial p}\right)$; $\frac{\partial g}{\partial p}=0$，因为 $1-\tau\eta\geqslant 0$，$\frac{\partial z}{\partial p}\leqslant 0$，$z\geqslant 0$，$\frac{\partial \tau}{\partial p}\geqslant 0$，$\frac{\partial \eta}{\partial p}\geqslant 0$，所以 $\frac{\partial f}{\partial p}\leqslant 0$. 即 $f(p)$ 是 p 的单调递减函数，$g(p)$ 是 p 的常数函数. 又因为 $\lim\limits_{p\to c}f(p)\to z$，$\lim\limits_{p\to c}g(p)\equiv-\frac{\sigma}{2}<0$，所以 $\underset{\sim}{p}^*$ 的唯一性即证. 为了证明 $E\underset{\sim}{\pi}$ 关于销售价格 $\underset{\sim}{p}$ 是拟凹函数，只需要证明 $\left.\frac{\partial^2 E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p^2}\right|_{\frac{\partial E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p}=0}\leqslant 0$ 即可，因为 $\frac{\partial^2 E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p^2}=\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial g}{\partial p}$，由上述分析知 $\frac{\partial^2 E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p^2}\leqslant 0$，所以 $E\underset{\sim}{\pi}$ 关于销售价格 $\underset{\sim}{p}$ 是拟凹函数.

2) 根据上述证明，供应链系统最优销售价格 $\underset{\sim}{p}^*$ 存在且唯一，它满足 $z(1-\tau\eta)-\frac{\sigma}{2}=0$，其中 $\tau=\frac{p-c}{p}$. 所以

① 当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$z=\alpha-\beta p+\mu$，则 $\eta=\frac{p\beta}{\alpha-\beta p+\mu}$. 所以 $\underset{\sim}{p}^*=\underset{\sim}{p}_+^*=\frac{\beta+\beta c+\mu-\sigma/2}{2\beta}$;

② 当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$z=\mu\alpha p^{-\beta}$，则 $\eta=-\frac{p\frac{\partial z}{\partial p}}{z}=\beta$. 所以 $\underset{\sim}{p}^*(=\underset{\sim}{p}_\times^*)$ 满足 $\mu\alpha(\underset{\sim}{p}_\times^*)^{-\beta}(\underset{\sim}{p}_\times^*(1-\beta)+\beta c)-\frac{\sigma}{2}\underset{\sim}{p}_\times^*=0$.

3) 根据上述求解的最优销售价格 $\underset{\sim}{p}^*$，所以: 当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$\underset{\sim}{q}^*=h(\underset{\sim}{p}_+^*)+\mu$; 当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$\underset{\sim}{q}^*=\mu h(\underset{\sim}{p}_\times^*)$. 证毕.

性质 7 证明:

1) 考虑 $E\underset{\sim}{\pi}_{\mathrm{r}}=(p-w)z-\frac{\sigma}{2}(p-b)$，其关于 p 的一阶导数为 $\frac{\partial E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p}=(p-w)\frac{\partial z}{\partial p}+z-\frac{\sigma}{2}$. 由一阶最优条件 $\frac{\partial E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p}=0$，可得零售商的最优销售价格 p_{r}^* 满足 $z(1-\tau\eta)-\sigma/2=0$，其中 $\tau=\frac{p-w}{p-b}$. 由于 $z>0$，$\sigma/2>0$，所以 $\tau\eta\leqslant 1$. 接下来分析销售价格 $\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}}^*$ 具有唯一性. 令 $f(p)=z(1-\tau\eta)$，$g(p)=-\sigma/2$，则 $\frac{\partial f}{\partial p}=(1-\tau\eta)\frac{\partial z}{\partial p}-z\left(\tau\frac{\partial \eta}{\partial p}+\eta\frac{\partial \tau}{\partial p}\right)$; $\frac{\partial g}{\partial p}=0$，因为 $1-\tau\eta\geqslant 0$，$\frac{\partial z}{\partial p}\leqslant 0$，$z\geqslant 0$，$\frac{\partial \tau}{\partial p}\geqslant 0$，$\frac{\partial \eta}{\partial p}\geqslant 0$，所以 $\frac{\partial f}{\partial p}\leqslant 0$. 即 $f(p)$ 是 p 的单调递减函数，$g(p)$ 是 p 的常数函数. 又因为 $\lim\limits_{p\to w}f(p)\to z$，$\lim\limits_{p\to w}g(p)\equiv-\sigma/2<0$，则 $\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}}^*$ 的唯一性即证. 为了证明 $E\underset{\sim}{\pi}_{\mathrm{r}}$ 是销售价格 $\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}}$ 的拟凹函数，只需证明 $\left.\frac{\partial^2 E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p^2}\right|_{\frac{\partial E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p}=0}\leqslant 0$ 即可，因为 $\frac{\partial^2 E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p^2}=\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial g}{\partial p}$，由上述分析知 $\frac{\partial^2 E\underset{\sim}{\pi}}{\partial p^2}\leqslant 0$，所以 $E\underset{\sim}{\pi}_{\mathrm{r}}$ 是 $\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}}$ 的拟凹函数. 根据上述证明，零售商的最优销售价格 $\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}}$ 存在且唯一，其满足 $z(1-\tau\eta)-\sigma/2=0$. 其中:

① 当 $h(p)=\alpha-\beta p$ 时，$\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}}^*=\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}+}^*$，$z=h(\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}+}^*)+\mu$; $\tau=\frac{\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}+}^*-w}{\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}+}^*-b}$; $\eta=\frac{\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}+}^*\beta}{\alpha-\beta p_{\mathrm{r}+}^*+\mu}$.

② 当 $h(p)=\alpha p^{-\beta}$ 时，$\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}}^*=\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}\times}^*$，$z=h(\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}\times}^*)\mu$，$\tau=\frac{\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}\times}^*-w}{\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}\times}^*-b}$; $\eta=\beta$.

2) 根据 $q=z$，得: 当 $h(p)=a-bp$ 时，$\underset{\sim}{q}^*=h(\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}+}^*)+\mu$; 当 $h(p)=ap^{-b}$ 时，$\underset{\sim}{q}^*=\mu h(\underset{\sim}{p}_{\mathrm{r}\times}^*)$. 证毕.