基于 DEA 的两阶段系统中间产品公平设定研究①

安庆贤[1]，陈晓红[2,1]，余亚飞[3]，储军飞[3]

(1. 中南大学商学院，长沙 410083; 2. 湖南商学院，移动商务智能湖南省重点实验室，长沙 410205; 3. 中国科学技术大学管理学院，合肥 230026)

摘要： 在由两个子决策单元串联组成的两阶段系统中，公平设定中间产品目标对确保和激励两阶段相互合作以达到整个系统的最佳性能至关重要. 数据包络分析(DEA)作为系统绩效评估的一种非参数方法吸引了众多学者的注意; 基于此方法，本文提出一个考虑公平关切的两阶段 DEA 模型用于设定两阶段系统中间产品目标，并证明据此模型获得的设定方案正是一个纳什讨价还价博弈的均衡解.

关键词： 中间产品; 公平; 两阶段 DEA 模型; 讨价还价博弈

中图分类号： N94　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 1007 -9807(2017)01 -0032 -09

0 引 言

在一个串联两阶段系统中，例如企业生产部门和营销部门组成的系统，两个部门之间的合作和协调对企业实现最大生产率至关重要. 通常情况下，他们作为两个独立的业务单元去核算成本、利润或损失并据此进行效率评估，企业管理者根据评估结果对各部门予以奖励或惩罚。在这样的两阶段系统中，两个部门之间的交互是通过中间产品即第一阶段产出(也即第二阶段投入)实现。因此，为了更好地实现系统两阶段的有效协调，企业需要合理地设定中间产品的生产目标.

数据包络分析(data envelopment analysis，DEA)是一种评价一组同质决策单元相对效率的数学规划方法; 决策单元(decision making unit，DMU)的效率可以看作是它的生产率. 由于 DEA 方法可以很好的处理多投入多产出复杂系统，其在 1978 年被 Charnes，Cooper 和 Rhodes 提出之后，得到了学者们的广泛关注，并在理论和应用方面获得了迅速的发展[1-6]. 然而传统的 DEA 模型假设系统的内部结构是一个“黑箱”，其并不能很好地测定复杂系统的效率，因此打开“黑箱”的两阶段 DEA 方法应运而生. Cook 等[7] 将两阶段 DEA 的研究方法归为四大类: 标准型 DEA 方法，效率分解类方法，网络 DEA 方法，博弈论方法; 后三种方法又可以分为集中化方法，非集中化方法，网络 DEA 方法. 集中化方法假定存在一个集中控制者管理两个阶段，因此两个阶段过程被集成一个系统去设定目标中间产品和获得两个阶段效率值[8]. 比如 Kao 和 Huang [9] 通过假设中间产品在第一阶段的权重与第二阶段的权重相等建立了一个 DEA 模型，并利用该模型获得整个系统的效率值和两个阶段的阶段效率值. 非集中化的方法则是从非合作博弈角度研究两阶段系统，比如 Liang 等[10] 提出基于 Leader-Follower 博

① 收稿日期: 2015 -02 -08; 修订日期: 2015 -08 -27.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71501189); 国家自然科学基金资助重点项目(71431006; 71210003; 71631008); 移动医疗教育部 - 中国移动联合重点实验室开放课题资助.
作者简介: 安庆贤(1988—)，男，安徽蚌埠人，博士，讲师. Email: anqingxian@163.com

弈的 DEA 模型研究了一个阶段作为领导者先做决策另一个阶段后决策的情形。值得注意的是文献[7]分类中的网络 DEA 方法都是包络模型，该方法分别考虑一个系统的两个阶段，并利用中间产品和目标函数建立两个阶段之间的关系(详见 Färe 和 Grosskopf[11]). 近年来，其他比较具有代表性的两阶段 DEA 工作有: Du 等[12]提出了一个两阶段纳什讨价还价博弈 DEA 模型. 该模型中，两个阶段被当作两个参与者相互讨价还价以得到更好的收益(更高的效率值). Sahoo 等[13]从政策的观点提出了两种效率分解的方法. 对于两阶段系统，分别使用不同方向型的 DEA 模型评估两个阶段的整体效率，技术效率和规模效率; 第一阶段利用投入导向模型，第二阶段利用产出导向模型，而系统整体效率通过两个阶段效率得到. Paradi 等[14]提出了一个两阶段 DEA 方法并应用在加拿大银行以评估其分行效率，并从不同的维度对决策单元进行标杆测量; 一个改进的 SBM 模型被用于聚合两个阶段的效率值以得出系统效率值. Li 等[15]运用两阶段 DEA 模型对 2012 年伦敦夏季奥运会的参与国效率进行了效率评价. Halkos 等[16]运用了加性效率分解形式的两阶段 DEA 模型对 65 个国家的中等教育的“学习环境效率”和“学生表现效率”进行了测定. 刘德彬等[17]考虑了包含非期望的两阶段系统并构建了相应的两阶段 DEA 模型，最后应用于我国上市公司的效率评价. 冯志军和陈伟[18]构建了资源约束型两阶段 DEA 模型，并对中国高技术产业 17 个细分行业研发创新整体效率及各子阶段的效率进行了评估分析.

综上可知，现有研究大多关注两阶段系统效率的测度及其分解，而对生产前沿面的研究则较少. 生产前沿面可以用于确定给定产出的最小投入量或给定生产投入的最大产出量，对决策单元改进效率具有很重要的现实意义. 在 DEA 中，生产前沿面通过决策单元的实际观察值获得[19]. Chen 等[20]指出 Kao 和 Hwang[9]的方法对非有效 DMU 如何投影到前沿面上没有提供具体信息，提出了投入导向型和产出导向型两种模型获得被评估决策单元在生产前沿面上的投影. 前沿面上的点可以为决策单元改善性能提供标杆，因此不合理的投影点将成为 DMU 改进效率的障碍. 在投入导向型的模型中，前沿面上的点可以用来估算在系统当前的产出下所使用的最小投入，因此，中间产品目标值很可能被设置的比较低; 类似地，如果中间产品的目标设定是基于产出导向模型，它们被设置的值就很可能较高. 在这两种方法下，中间产品目标的设定对一个阶段有益的同时会损失另外一个阶段，因而是不公平的. 考虑上述原因，研究两阶段系统的中间产品目标公平设定问题将具有重要的现实意义和理论价值.

目前来看，现有两阶段 DEA 研究大都着重测定整个系统的效率和效率分解. 虽然有个别关于两阶段系统中间产品目标公平设定的研究，但是公平作为两阶段系统有效运作的一个关键因素却一直未被重视. 假定一个系统的初始投入和最终产出计划确定后，我们可知第一阶段希望被要求生产更少的中间产品以减少其工作量而第二阶段则希望获得更多的中间产品以增加其资源量，所以两个阶段必须在中间产品的设置上相互协调才能达到预期的整个系统效率. 如果生产过程中第一阶段产生的中间产品量较低，第二阶段为了实现系统预期的生产率不得不在较低的投入下生产目标最终产出，显然对第二阶段不公平. 如果一个阶段被不公平地对待，例如其目标生产率的设置高于其最大可接受的水平，它将不会愿意和另外一个阶段合作，这不仅会阻碍系统整体生产率目标的实现，还可能会影响未来两个阶段之间的协调.

因此，本文将研究公平设定两阶段中间产品目标问题，以期为系统中每个阶段提供一个合理的生产目标. 为此，首先从每个阶段的角度自身出发，通过各阶段和其他单元同质阶段相对比较得出其个体效率(个体生产率). 然后，尽可能得使

系统设定的两阶段目标生产率比率接近两阶段个体效率的比率，以实现在两阶段系统中公平设置中间产品的目标(在第三部分将给出详细的解释). 通过这种方式构建模型，不仅可以公平地设定两阶段系统的中间产品目标，还能确定两个阶段的目标生产率; 另外，该模型还可以得到系统在生产前沿面上的投影点，从而可以为系统改进效率提供具体的指导. 由于在中间产品设定中两个阶段都得到了公平对待，设定的目标中间产品以及系统在生产前沿面上的标杆更容易被两个阶段接受和执行. 本文首次将公平关切引入到两阶段系统的目标中间产品设定中，更为重要的是，从博弈论角度讨论和分析本文提出方法的科学合理性，是对两阶段系统中间产品设定这一现实问题的有益探索.

1 传统两阶段网络 DEA 模型

假设存在 n 个待评价的决策单元，如图 1 所示，每个决策单元包含 m 个不同的投入，t 个中间产品和 s 个不同的产出. x_{ij} $(i = 1,2,\cdots,m)$，z_{dj} $(d = 1,2,\cdots,t)$ 和 y_{rj} $(r = 1,2,\cdots,s)$ 分别为 DMU_j $(j = 1,2,\cdots,n)$ 的第 i 个投入，第 d 个中间产品和第 r 个产出. $x_{ij} \geqslant 0$，$y_{rj} \geqslant 0$，$z_{dj} \geqslant 0$ 并且必须有至少一个正的投入指标值，一个正的中间产品指标值和一个正的产出指标值. 在该系统的第一阶段，投入 $X_j(x_{1j},\cdots,x_{mj})$ 生产中间产品(第一阶段的产出) $Z_j(z_{1j},\cdots,z_{dj})$; 在第二阶段，投入中间产品 $Z_j(z_{1j},\cdots,z_{dj})$ 生产产出 $Y_j(y_{1j},\cdots,y_{sj})$. 定义被评估的决策单元为 DMU0.

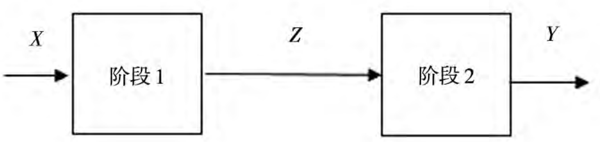

图 1 两阶段系统

Fig. 1 A two-stage system

Färe 和 Grosskopf[11] 提出了一个两阶段的网络 DEA 效率模型

$$
\begin{aligned}
& \min \phi \\
& \text{s.t.} \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_{ij} \leqslant \phi x_{i0}, i = 1,\cdots,m, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j z_{dj} \geqslant \tilde{z}_{d0}, d = 1,\cdots,t, \\
& \quad \gamma_j \geqslant 0, j = 1,\cdots,n, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \pi_j z_{dj} \leqslant \tilde{z}_{d0}, d = 1,\cdots,t, \\
& \quad \sum_{j=1}^{n} \pi_j y_{rj} \geqslant y_{r0}, r = 1,\cdots,s, \\
& \quad \pi_j \geqslant 0, j = 1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{1}
$$

$\gamma(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$，$\pi(\pi_1,\cdots,\pi_n)$ 分别是第一阶段和第二阶段对应的强度向量，设定模型(1)的最优解为 ϕ^*，即系统的总体效率; $\tilde{z}_{d0}$ $(d = 1,\cdots,t)$ 代表实现总体效率的目标中间产品量. 由于每个阶段都是规模收益不变的，因此两阶段系统也是规模收益不变的. 除此之外，Kao 和 Hwang[9] 提出的乘数两阶段模型也可用来进行两阶段效率评价，不再赘述. Chen 等[21] 指出两阶段系统的整体效率可以通过乘数 DEA 模型或包络 DEA 模型获得，但是系统中各阶段的效率却只能利用乘数模型中获得，而前沿面投影只能利用包络模型获得. 基于此，本文采用 DEA 包络模型来设定系统的目标中间产品，同时获得 DMU 在生产前沿面上投影.

2 考虑公平的非导向网络 DEA 模型

本节将提出一个公平设置两阶段中间产品的非导向网络 DEA 模型进而确定两阶段系统的前沿面. 对于图 1 所示的两阶段过程，一旦投入 X 和产出 Y 给定，如何为两个阶段公平设置中间产品 $\tilde{z}$ 成为有效管理系统的一个主要问题. 由于 $\tilde{z}$ 既决定第一阶段的效率又决定第二阶段的效率，通过公平设置两个阶段的效率可以达到公平设置中间产品的目的. $\tilde{z}$ 的确定需要考虑两个阶段之间的协调性. 例如，如果第一阶段的目标

效率为 $\theta^{1'}$，对应的产出为 $\tilde{Z}^1$，第二阶段的目标效率为 $\theta^{2'}$，对应的投入为 $\tilde{Z}^2$；当 $\tilde{Z}^1$ 和 $\tilde{Z}^2$ 不相等时，两阶段的生产不协调，他们之间的差异将导致系统的资源浪费，因此这种非有效情况应该尽量被避免.

下面将解释为了公平设置两阶段系统的中间产品应该保持两阶段目标效率的比率尽可能接近两阶段个体效率比值. 假设两阶段的总体效率为 θ，第一阶段和第二阶段的个体效率分别为 θ^1，θ^2，设置第一阶段和第二阶段的目标效率分别为 $\theta^{1'}$ 和 $\theta^{2'}$，通过每阶段的目标效率可以推导出中间产品的值. θ 是通过模型(1)获得的系统效率，即等于最优值 ϕ^*；θ^1，θ^2 是通过对阶段 1 和阶段 2 分别运用投入型 CCR 模型获得. 通过定理 2 可知 $\theta^{1'}$ 和 $\theta^{2'}$ 的乘积必定等于 θ. 因此，两阶段系统整体效率以及各阶段个体效率值存在如下三种可能情况：$\theta^1 \cdot \theta^2 = \theta$，$\theta^1 \cdot \theta^2 < \theta$，$\theta^1 \cdot \theta^2 > \theta$. 关于情况 1，当两个阶段形成一个两阶段系统时，两个阶段各自的效率值保持不变；关于情况 2，阶段需要付出更多努力提高他们的效率，从而实现整个系统的目标效率；关于情况 3，两个阶段只需要更少的努力即可实现系统的目标效率值. 通过上述分析可知，要想实现两个阶段之间的公平则意味着两个阶段所做的努力(增加或减少)应该是大致相等的. 这里通过效率相对于每个阶段效率 θ^i 变化百分比表示，即 $\frac{\theta^{i'} - \theta^i}{\theta^i}$，$i = 1, 2$ 来衡量每个阶段所做的努力. 因此，若要公平地设置系统的中间产品，则需要使比率 $\frac{\theta^{1'} - \theta^1}{\theta^1}$ 和 $\frac{\theta^{2'} - \theta^2}{\theta^2}$ 的差异尽可能小，即，使得 $\frac{\theta^{1'}}{\theta^{2'}}$ 和 $\frac{\theta^1}{\theta^2}$ 的值差异尽可能小.

针对图 1 所示的两阶段系统，Chen 等[22]提出了如下模型(2)评估系统的整体效率并给出了确定系统前沿面的方法.

$$
\begin{aligned}
&\min\ \alpha - \beta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_{ij} \leqslant \alpha x_{i0}, i = 1, \cdots, m, \\
&\sum_{j=1}^{n} \gamma_j z_{dj} \geqslant \tilde{z}_{d0}, d = 1, \cdots, t, \\
&\alpha \leqslant 1, \\
&\gamma_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n, \\
&\sum_{j=1}^{n} \pi_j z_{dj} \leqslant \tilde{z}_{d0}, d = 1, \cdots, t, \\
&\sum_{j=1}^{n} \pi_j y_{rj} \geqslant \beta y_{r0}, r = 1, \cdots, s, \\
&\beta \geqslant 1, \\
&\pi_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

在模型中，γ_j，π_j，$\tilde{z}_{d0}$，α 和 β 是变量，其他为已知的常数. 虽然上面的模型在评估两阶段过程整体效率时考虑了两个阶段各自的目标效率，但在这个模型中第一阶段的效率值 α^* 却总等于 1[20]. 如果用这个模型设置中间产品，第一阶段则需实现其最高效率而第二阶段则需实现其最低效率，这将导致一个阶段主导支配另一个阶段的情形，从而有违公平. 为了公平对待两个阶段，本文提出多目标规划模型来设定两阶段的目标效率，如下所示.

$$
\begin{aligned}
&\min\ \alpha \\
&\min\ 1/\beta \\
&\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_{ij} \leqslant \alpha x_{i0}, i = 1, \cdots, m, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j z_{dj} \geqslant \tilde{z}_{d0}, d = 1, \cdots, t, \\
&\quad \alpha \leqslant 1. \\
&\quad \gamma_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \pi_j z_{dj} \leqslant \tilde{z}_{d0}, d = 1, \cdots, t, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \pi_j y_{rj} \geqslant \beta y_{r0}, r = 1, \cdots, s, \\
&\quad \beta \geqslant 1. \\
&\quad \pi_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

模型(3)中，每个阶段都追求自身目标效率的最小化，从而可以付出更少努力实现系统分配给其的生产任务. 对这个多目标优化模型，它的帕累托最优解通常不是唯一的，定义如下：

定义 1　对于模型(3)的一个可行解 $p^* =$

$(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \tilde{z}_0^*, \pi^*)$，如果不存在一个可行解 $p' = (\alpha', \beta', \gamma', \tilde{z}_0', \pi')$ 使得 $\alpha' \leqslant \alpha^*, 1/\beta' \leqslant 1/\beta^*$，那么 p^* 是这个模型的一个帕累托最优解.

假定模型(3)所有的帕累托解构成的集合为 P，对于任何一个解 $p^* = (\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \tilde{z}_0^*, \pi^*) \in P$，$\alpha^*$ 和 $1/\beta^*$ 分别是第一阶段和第二阶段的目标效率. 一旦确定解集 P 中的 p^*，目标中间产品的值 $\tilde{z}_0^*$ 就可以被相应地确定.

通过任何一组模型(3)的帕累托最优解给定权重构成的投入线性组合，中间产品的线性组合和产出的线性组合可以得到被评估决策单元的一个投影点，模型(3)的帕累托最优解有以下特点:

定理 1 对于一个由帕累托最优解 $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \tilde{z}_0^*, \pi^*)$ 所决定的投影点 $\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j^* x_{ij}, \tilde{z}_{d0}^*, \sum_{j=1}^{n} \pi_j^* y_{rj}\right)$ 是弱有效的.

证明 假设 $p^* = (\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \tilde{z}_0^*, \pi^*)$ 是模型(3)的一组 Pareto 最优解，需要证明投影点 $\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j^* x_{ij}, \tilde{z}_{d0}^*, \sum_{j=1}^{n} \pi_j^* y_{rj}\right)$ 形成的决策单元是弱有效的. 如果该决策单元不是弱效的，那么必存在一个可行解 $p' = (\alpha', \beta', \gamma', \tilde{z}_0', \pi')$ 使得 $\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j' x_{ij}, -\sum_{j=1}^{n} \pi_j' y_{rj}\right) < \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j^* x_{ij}, -\sum_{j=1}^{n} \pi_j^* y_{rj}\right)$. 因此，两组最优解满足 $(\alpha', \beta') < (\alpha^*, \beta^*)$. 这与 p^* 是模型(3)的 Pareto 最优解相矛盾，因此投影点决策单元是弱有效的. 证毕.

根据上面的定理可知投影点 $\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j^* x_{ij}, \tilde{z}_{d0}^*, \sum_{j=1}^{n} \pi_j^* y_{rj}\right)$ 是弱有效的，该投影点即为被评估决策单元的标杆，可用于指导决策单元 DMU0 改进效率. 由模型(3)可知，决策单元 DMU0 的目标中间产品可由两个阶段的目标效率 α^* 和 $1/\beta^*$ 所决定. 模型(3)的前四个约束条件用于约束第一个阶段而后四个约束条件用于约束第二阶段. 由于这个模型有两个目标函数 $\min \alpha$ 和 $\min 1/\beta$，模型(3)不容易被求解，其存在无穷多个帕累托最优解.

为此，通过引入两个新变量 $\vartheta = 1/\beta$ 和 $\tau_j = \pi_j \vartheta$，先将模型(3)转化成一个新的非线性的多目标规划问题.

$$
\begin{aligned}
& \min \alpha \\
& \min \vartheta \\
\text{s.t.} \ & \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_{ij} \leqslant \alpha x_{i0}, i = 1, \cdots, m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \gamma_j z_{dj} \geqslant \tilde{z}_{d0}, d = 1, \cdots, t, \\
& \alpha \leqslant 1. \\
& \gamma_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n, \\
& \sum_{j=1}^{n} \tau_j z_{dj} \leqslant \vartheta \tilde{z}_{d0}, d = 1, \cdots, t, \\
& \sum_{j=1}^{n} \tau_j y_{rj} \geqslant y_{r0}, r = 1, \cdots, s, \\
& \vartheta \leqslant 1. \\
& \tau_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

关于模型(4)的解，存在有如下特性.

定理 2 对于模型(4)的任何一个帕累托最优解，α^* 和 ϑ^* 的乘积等于模型(1)获得的系统的整体效率 ϕ^*.

证明见附录 1.

帕累托最优解的两个值 α^* 和 ϑ^* 之间的关系如图 2 所示:

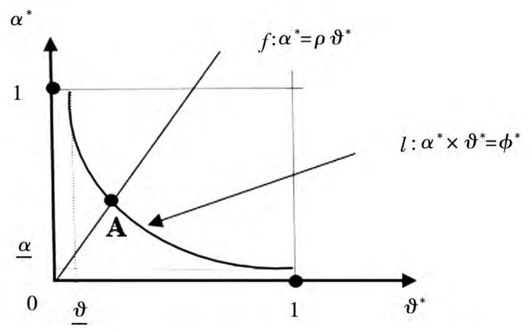

图 2 两阶段目标效率(生产率)关系图

Fig. 2 Relationship between two divisional target efficiencies

图 2 中，横轴表示第一阶段的目标效率 α^*，纵轴表示第二阶段的目标效率 ϑ^*，对于曲线 l 上的任意一点满足 $\alpha^* \times \vartheta^* = \phi^*$，其中 α^* 和 ϑ^* 是模型(4)的帕累托最优解. 图 2 中 $\underline{\alpha}$ 表示模型(4)得到的第一阶段最小可能目标效率值. 同样，$\underline{\vartheta}$ 表示第二阶段最小可能目标效率值. α^* 和 ϑ^* 这两

个值之间存在竞争，因为如果一个值变大，另外一个值将随之变小，除此之外，α^*，ϑ^* 和 ϕ^* 都处于[0，1] 这个范围，这也符合效率的概念.

不同组合的(α^*，ϑ^*)很可能导致设定的目标中间产品不同，例如，如果 α^* 或 ϑ^* 中的某一个值被设置的更大，相应的阶段则需付出更多的努力以实现其目标效率. 如上所述，要想设置两个阶段中的目标中间产品相对两阶段更为公平，应该使两个阶段的目标效率的比值尽可能接近两个阶段个体效率的比率. 再由定理 2，可以构建下面的单目标模型，模型(5)，来实现公平设定中间产品目标.

$$
\begin{aligned}
&\min DR = (\alpha - \rho_0 \vartheta)^2 \\
&\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_{ij} \leqslant \alpha x_{i0}, i = 1, \cdots, m, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j z_{dj} \geqslant \tilde{z}_{d0}, d = 1, \cdots, t, \\
&\qquad \alpha \leqslant 1. \\
&\qquad \gamma_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \tau_j z_{dj} \leqslant \vartheta \tilde{z}_{d0}, d = 1, \cdots, t, \qquad (5) \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \tau_j y_{rj} \geqslant y_{r0}, r = 1, \cdots, s, \\
&\qquad \vartheta \leqslant 1. \\
&\qquad \tau_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n.
\end{aligned}
$$

在模型(5)中 ρ_0 表示被评估决策单元 DMU0 两个阶段个体效率的比率，即 $\rho_0 = e_0^{1*}/e_0^{2*}$，其中两阶段的个体效率 e_0^{1*} 和 e_0^{2*} 利用投入导向 CCR 模型得到. ρ_0 表示两阶段系统的参考比率. 目标函数 $\min DR = (\alpha - \rho_0\vartheta)^2$ 表示最小化第一阶段的目标效率值和第二阶段目标效率乘以参考比例值之间的距离，从而使两个阶段的目标效率比与参考比率的差异尽可能小.

假设固定参数 ϑ 的值，模型(5)则转化为一个具有线性约束的凸二次规划，该规划可以通过如下算法实现：把模型(5)看成一个关于参数 ϑ 的线性规划，通过 ϑ 在区间 $[\underline{\vartheta}, 1]$（其中 $\underline{\vartheta}$ 是第二阶段的最小可能的目标效率值）的不同取值去得出模型的最优解. 由于区间 $\underline{\vartheta}$ 和 1 之间存在无限个 ϑ 值，需要将这个区间离散化，即 $\vartheta_k = \underline{\vartheta} + k \times \Delta$，$k = 0, 1, \cdots, K$，其中 K 是等于$(1 - \underline{\vartheta})/\Delta$ 的最大整数，Δ 是一个步长. 对于每一个 ϑ_k，通过模型(5)可获得它对应的目标函数值 DR_{k}.，最后比较所有的 DR_{k}.，$k = 0, 1, \cdots, K$ 取最小值获得最接近模型(5)最优目标值的目标函数值. 如果把 Δ 设置的足够小(例如 $\Delta = 0.000\,01$)，该算法所获得值将会非常接近模型(5)的最优目标值.

模型(5)有以下特性：

定理 3　模型(5)的一个最优解为(γ_j^*，$\tilde{z}_{d0}^*$，τ_j^*，ϑ^*)所构成的投影点是弱有效的.

证明　模型(5)的最优解是模型(4)的一个 Pareto 最优解，根据定理 1 可知，模型(5)得到的投影点是弱有效的.　　证毕.

从图 2 和定理 2 可知，第一阶段 α 的取值范围是 $[\underline{\alpha}, 1]$，第二阶段 ϑ 的取值范围是 $[\underline{\vartheta}, 1]$，并且 $\alpha\vartheta$ 等于常数 ϕ^*. 设定 $\rho = \alpha/\vartheta$ 是经过曲线 $\alpha\vartheta = \phi^*$ 上某点的直线，则 ρ 的最小值和最大值分别为 $\rho_{\min} = \underline{\alpha}$ 和 $\rho_{\max} = 1/\underline{\vartheta}$. 因此，当 $\underline{\alpha} \leqslant \rho_0 \leqslant 1/\underline{\vartheta}$，那么曲线上必存在一点($\alpha^*$，$\vartheta^*$)满足 $\alpha^* \times \vartheta^* = \phi^*$ 并且 $\alpha^*/\vartheta^* = \rho_0$($\alpha^* = \rho_0\vartheta^*$). 进一步地，如果两阶段系统的参考比率 ρ_0 满足 $\underline{\alpha} \leqslant \rho_0 \leqslant 1/\underline{\vartheta}$，那么模型(5)的最优目标值为 0，即系统目标中间产品的设置可以使得两阶段目标效率的比率等于参考比率.

在 Chen 等[22]提出的模型(2)中，最优解 $\alpha^* = 1$，而 $1/\beta^*$ 代表系统的整体效率[20]. 将模型(2)中用 1 替代 α，可以看出其即为 Chen 等[20]中产出导向 DEA 模型. 该模型是在保持第一阶段目标效率为 1 的情况下最小化第二阶段的目标效率，因此，第一阶段需要生产更多的中间产品，这对阶段 1 是不公平的. 同理可知 Chen 等[20]产出导向 DEA 模型来设定中间产品目标量对阶段 2 是不公平的.

3　讨论与分析

本节将从理论上证明按照本文的方法设定的目标中间产品符合讨价还价博弈均衡结果.

当考虑系统的两个阶段是博弈中的两个参与人时，目标效率设定问题可以看成是这两个参与人通过讨价还价最终确定各自效率值的问题. 因此，可以利用讨价还价博弈来研究. 讨价还价模型

中，如果双方所获得的收益都大于预期时，参与人则接受收益；如果双方所获得的收益都小于预期时，任何一方都不接受. Nash[23] 提出了一种满足四个公理（仿射转换不变性，帕累托最优性；无关备选方案的独立性；对称性）的方法，即 Nash 讨价还价博弈，用于公平分配两个参与人的收益. 假设 d_1 和 d_2 分别表示参与人 1（阶段 1）和参与人 2（阶段 2）的谈判破裂点. 谈判破裂点是指如果参与人能接受的最小收益值，如果小于这个值谈判就会破裂. 当收益值（x_1^*，x_2^*）是下面规划的最优解时，其就是 Nash 讨价还价解.

$$\begin{aligned} &\max_{x_1, x_2} \ (x_1 - d_1)(x_2 - d_2) \\ &\text{s.t.} \ (x_1, x_2) \in U \\ &\qquad (x_1, x_2) \geqslant (d_1, d_2) \end{aligned} \tag{6}$$

其中 x_1 和 x_2 指参与人 1 和参与人 2 所有可能讨价还价方案的收益.

假设系统的总体效率为 ϕ^*，即模型（1）的最优解. 设定阶段1 和阶段2 的目标生产率分别为 α' 和 ϑ'. 那么有 $\alpha' * \vartheta' = \phi^*$；设定 α 和 ϑ 为阶段 1 和阶段 2 的谈判破裂点，即每个阶段不接受谈判的临界效率值. 因为每个阶段都希望自己的目标生产率小于谈判破裂点，因此有 $\alpha' \leqslant \alpha$ 和 $\vartheta' \leqslant \vartheta$.

用 Nash 讨价还价博弈确定公平两阶段的目标生产率，首先转化非线性约束 $\alpha' * \vartheta' = \phi^*$ 为如下的线性约束 $\lg(\alpha') + \lg(\vartheta') = \lg(\phi^*)$，或者 $(-\lg(\alpha')) + (-\lg(\vartheta')) = -\lg(\phi^*)$. 因为每个阶段都希望自己的目标生产率更小，可以设定 $-\lg(\alpha')$，$-\lg(\vartheta')$ 为两个阶段的收益；$-\lg(\phi^*)$ 为两个阶段的总收益. 同时，各阶段的谈判破裂点为 $-\lg(\alpha)$ 和 $-\lg(\vartheta)$. 那么根据 Nash 讨价还价模型（6），一个公平设定两阶段目标生产率的方案必须最大化 $(-\lg(\alpha') - (-\lg(\alpha))) * (-\lg(\vartheta') - (-\lg(\vartheta)))$，即 $(\lg(\alpha) - \lg(\alpha')) * (\lg(\vartheta) - \lg(\vartheta'))$，受约束于 $\lg(\alpha') + \lg(\vartheta') = \lg(\phi^*)$. 因为 $\lg(\alpha) - \lg(\alpha') \geqslant 0$，$\lg(\vartheta) - \lg(\vartheta') \geqslant 0$ 和 $\lg(\alpha) - \lg(\alpha') + \lg(\vartheta) - \lg(\vartheta') = \lg(\alpha) + \lg(\vartheta) - \lg(\phi^*) \geqslant 0$，因此 Nash 讨价还价模型最优解必须满足 $\lg(\alpha) - \lg(\alpha') = \lg(\vartheta) - \lg(\vartheta')$，即 $\alpha'/\vartheta' = \alpha/\vartheta$ 受约束于 $\alpha' * \vartheta' = \phi^*$. 由于阶段 1 和阶段 2 独立来看时的生产率比整体看时的效率大，而目标生产率希望越小越好，同时独立时的生产率差异有效地反应了各阶段在相似结构的地位差异，可以假设谈判破裂点为各阶段独立时的生产率值. 由此可知，Nash 讨价还价的最优策略即是使得两阶段目标生产率的比例等于各阶段独立时的生产率比例. 若增加约束使得最优策略无法达到时，应使得前者的比例和后者比例的差异尽可能小.

4 结束语

串联两阶段系统在生产或服务系统中非常普遍，比如供应商 – 生产商供应链，两阶段银行系统等. 现有的两阶段 DEA 文献主要关注于系统效率评估和分解，而且大部分是投入导向型或者产出导向型. 鲜有关于设定两阶段系统目标中间产品量的研究，尽管这类研究对协调企业的两阶段以实现系统总目标具有重大的意义. 本文首次将公平关切引入设定两阶段系统目标中间产品量；具体来说，通过两阶段目标生产率比率与参考比率的差异来衡量公平程度，并据此建立一个非方向型 DEA 模型设定目标中间产品量. 更为重要的是，本文证明了由此模型获得的设定方案对两个阶段来说正是一个纳什讨价还价博弈的均衡解.

本文虽然是基于决策单元规模报酬保持不变的假设，但该方法可以拓展到规模报酬可变情形下. 但不同的是，在规模报酬不变情况下存在的一个重要性质“两阶段的 Pareto 最优效率值的积等于模型（1）的最优值”在规模报酬可变情况下将不再存在；然而，本文公平确定目标中间产品量的思想仍然适用；此外，探究其最优解与纳什讨价还价均衡解的关系是一个很有趣的方向.

参考文献:

[1] 查　勇，宋阿丽，杨宏林，等. 考虑决策者风险偏好的机会约束 DEA 模型 [J]. 管理科学学报，2014，17(1)：11 –20.
Zha Yong，Song Ali，Yang Honglin，et al. Chance constrained DEA model considering decision maker's risk appetite [J]. Journal of Management Sciences in China，2014，17(1)：11 –20.(in Chinses)

[2] 李永立，吴　冲. 考虑非期望产出弱可处置性的随机 DEA 模型 [J]. 管理科学学报，2014，17(9)：17 –28.
Li Yongli，Wu Chong. Random DEA model considering the weak disposability of undesirable outputs [J]. Journal of Management Sciences in China，2014，17(9)：17 –28.(in Chinese)

[3] Cook W D，Seiford L M. Data envelopment analysis (DEA)：Thirty years on [J]. European Journal of Operational Research，2009，192：1 –17.

[4] Avilés Sacoto S，Güemes Castorena D，Cook. W D，et al. Time-staged outputs in DEA [J]. Omega，2015，55：1 –9.

[5] 范建平，岳未祯，吴美琴. 基于误差传递和熵的区间 DEA 方法 [J]. 系统工程理论与实践，2015，35(5)：1293 –1303.
Fan Jianping，Yue Weizhen，Wu Meiqin. Dealing with interval DEA based on error propagation and entropy. Systems Engineering：Theory & Practice，2015，35(5)：1293 –1303.(in Chinese)

[6] 陈凯华，汪寿阳，寇明婷. 三阶段组合效率测度模型与技术研发效率测度 [J]. 管理科学学报，2015，18(3)，31 –44.
Chen Kaihua，Wang Shouyang，Kou Mingting. Enhanced hybrid three-stage model for efficiency measure with application to technological R&D efficiency [J]. Journal of Management Science in China，2015，1893)，31 –44.(in Chinese)

[7] Cook W D，Liang L，Zhu J. Measuring performance of two-stage network structures by DEA：A review and future perspective [J]. Omega，2010，38：423 –430.

[8] Liang L，Yang F，Cook W D，et al. DEA models for supply chain efficiency evaluation [J]. Annals of Operations Research，2006，145(1)：35 –49.

[9] Kao C，Hwang S N. Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis：An application to non-life insurance companies in Taiwan [J]. European Journal of Operational Research，2008，185(1)：418 –429.

[10] Liang L，Cook W D，Zhu J. DEA models for two-stage processes：Game approach and efficiency decomposition [J]. Naval Research Logistics，2008，55：643 –53.

[11] Färe R，Grosskopf S. Productivity and intermediate products：A frontier approach [J]. Economics Letters，1996，50：65 –70.

[12] Du J，Liang L，Chen Y，et al. A bargaining game model for measuring performance of two-stage network structures [J]. European Journal of Operational Research，2011，210：390 –397.

[13] Sahoo B K，Zhu J，Tone K，et al. Decomposing technical efficiency and scale elasticity in two-stage network DEA [J]. European Journal of Operational Research，2014，233：584 –594.

[14] Paradi J C，Rouatt S，Zhu H Y. Two-stage evaluation of bank branch efficiency using data envelopment analysis [J]. Omega，2011，39：99 –109.

[15] Li Y J，Lei X Y，Dai Q Z，et al. Performance evaluation of participating nations at the 2012 London Summer Olympics by a two-stage data envelopment analysis [J]. European Journal of Operational Research，2015，243(3)：964 –973.

[16] Halkos G E，Tzeremes N G，Kourtzidis S A. Weight assurance region in two-stage additive efficiency decomposition DEA model：An application to school data [J]. Journal of the Operational Research Society，2015，66(4)：696 –704.

[17] 刘德彬，马超群，周忠宝，等. 存在非期望输入输出的多阶段系统效率评价模型 [J]. 中国管理科学，2015，23(4)：129 –138.
Liu Debin，Ma Chaoqun，Zhou Zhongbao，et al. Efficiency evaluation models of multi-stage system with undesirable inputs and outputs [J]. Journal of Management Science in China，2015，23(4)：129 –138.(in Chinese)

[18] 冯志军，陈　伟. 中国高技术产业研发创新效率研究——基于资源约束型两阶段 DEA 模型的新视角 [J]. 系统工程理论与实践，2014，34(5)：1202 –1212.
Feng Zhijun，Chen Wei. R&D innovation efficiency of Chinese high-tech industries：Based on two-stage network DEA model with constrained resources. Systems Engineering：Theory & Practice，2014，34(5)：1202 –1212.(in Chinese)

[19] Charnes A，Cooper W W，Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units [J]. European Journal of Operational Research，1978，2(6)：429 –444.

[20] Chen Y，Cook W D，Zhu J. Deriving the DEA frontier for two-stage processes [J]. European Journal of Operational Research，2010，202：138 –142.

[21] Chen Y，Cook W D，Kao C，et al. Network DEA pitfalls：Divisional efficiency and frontier projection under general network structures [J]. European Journal of Operational Research，2013，226：507 –515.

[22] ChenY，Liang L，Zhu J. Equivalence in Two-Stage DEA Approaches [J]. European Journal of Operational Research，

2009, 193(2): 600 – 604.

[23] Nash J F. The bargaining problem [J]. Econometrica, 1950, 18(2): 155 – 162.

Fair setting for intermediate products in two-stage system based on DEA

AN Qing-xian[1], *CHEN Xiao-hong*[2,1], *YU Ya-fei*[3], *CHU Jun-fei*[3]

1. School of Business, Central South University, Changsha 410086, China;
2. Key Laboratory of Hunan Province for Mobile Business Intelligence, Hunan University of Commerce, Changsha 410205, China;
3. School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

Abstract: In a two-stage system with the two stages connected in series, fairly setting the target outputs for the first stage, which are also the inputs for the second stage, is critical for ensuring that the two stages have incentives to collaborate with each other so as to achieve the best performance. Data envelopment analysis (DEA), which is a non-parameter approach for performance evaluation of decision making units (DMUs), has drawn a lot of attention from many scholars. In this paper, a new two-stage DEA model taking account of fairness is proposed to set the target intermediate products in a two-stage system. We find that the optimal results of this model are exactly the Nash solution of a Nash bargaining game.

Key words: data envelopment analysis (DEA); two-stage; intermediate products; fairness; Nash bargaining game

附录

附录 1.

令 $\bar{z}_{d0} = \vartheta \tilde{z}_{d0}$，$\bar{\gamma}_j = \vartheta \gamma_j$，则模型(4) 可以转化为下面模型:

$$
\begin{aligned}
&\min \alpha \\
&\min \vartheta \\
&\text{s.t.}\ (\text{stage } 1) \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \bar{\gamma}_j x_{ij} \leqslant \alpha \vartheta x_{i0}, i = 1, \cdots, m, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \bar{\gamma}_j z_{dj} \geqslant \bar{z}_{d0}, d = 1, \cdots, t, \\
&\quad \alpha \leqslant 1. \\
&\quad \gamma_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n, \\
&\quad (\text{stage } 2) \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \tau_j z_{dj} \leqslant \bar{z}_{d0}, d = 1, \cdots, t, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \tau_j y_{rj} \geqslant y_{r0}, r = 1, \cdots, s, \\
&\quad \vartheta \leqslant 1. \\
&\quad \tau_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n.
\end{aligned}
\tag{1'}
$$

对于模型(4) 的任一一组 Pareto 最优解 (α^*, ϑ^*)，它也是模型(1') 的最优解. 假设 $\underline{\phi}$ 为模型(4) 的所有最优解 (α, ϑ) 乘积 $\alpha\vartheta$ 的最小值，那么 $\alpha^* \vartheta^* = \underline{\phi}$. 因为如果 $\alpha^* \vartheta^* > \underline{\phi}$，那么 α' 满足 $\alpha^* \vartheta^* > \alpha' \vartheta^* = \underline{\phi}$，其中 $0 \leqslant \alpha' < \alpha^* \leqslant 1$. 因为 $\underline{\phi}$ 是最小值，模型(1') 存在一组最优解 $(\underline{\alpha}, \underline{\vartheta}, \underline{\gamma}, \underline{\tilde{z}_0}, \underline{\tau})$ 满足，其中 $\underline{\phi} = \underline{\alpha\vartheta}$. 由于 $\alpha' \vartheta^* = \underline{\phi}$，可以得到模型(1') 的一组新可行解 $(\alpha', \vartheta^*, \underline{\gamma}, \underline{\tilde{z}_0}, \underline{\tau})$，这与 (α^*, ϑ^*) 是最优解的假设相冲突，因此 $\alpha^* \vartheta^* = \underline{\phi}$. 另外，假如令模型(1') 的 $\alpha = 1$，在把变量 ϑ 替换成 ϕ 的情况下，该模型就转化为模型(1). 这意味着 $(1, \phi^*)$ 是模型(1') 的一组 Pareto 最优解，因为如果不是的话，那么肯定存在一组最优解 (α^*, ϑ^*) 使得 $\alpha^* < 1$ 并且 $\vartheta^* \leqslant \phi^*$，或者 $\alpha^* \leqslant 1$ 并且 $\vartheta^* < \phi^*$. 在两种情形下，都会使得 $\alpha^* \vartheta^* < \phi^*$，由于 $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_{ij} \leqslant \alpha^* \vartheta^* x_{i0}, i = 1, \cdots, m$，那么可以找出模型(1) 的一组可行解，其中 $\phi = \alpha^* \vartheta^*$，其他变量值和模型(1') 相同. 这与 ϕ^* 是模型(1) 最小目标函数值相悖，因此 $(1, \phi^*)$ 是 Pareto 最优解. 这意味着 $\underline{\phi} = \phi^*$，即模型(4) 的任意一组最优解 α^* 和 ϑ^* 的乘积都等于模型(1) 的获得最优值 ϕ^*. 证毕.