

指令驱动市场中非知情交易者的最优交易策略^①

邴涛¹, 刘善存¹, 张强^{2*}, 赵尚梅¹

(1. 北京航空航天大学经济管理学院, 北京 100191; 2. 北京化工大学经济管理学院, 北京 100029)

摘要: 在非对称信息下, 综合非知情交易者对资产价值的预期、私人估值及资产价值波动, 构造指令驱动市场价格形成的动态模型, 给出非知情交易者指令提交策略的解析解, 并依此描述了非知情交易者对资产价值预期的动态更新过程. 研究发现: 私人估值和资产价值波动通过影响非知情交易者最优策略, 使得市场进入不同均衡状态; 在每个均衡状态下, 非知情交易者根据资产价值的预期变化更新交易策略, 进而引起知情交易者策略调整, 特别地, 使得知情交易者被挤出市场成为可能. 进一步分析表明, 私人估值、资产价值波动及知情交易者比例对市场流动性的影响依赖于每个均衡中限价指令执行风险的差异.

关键词: 指令驱动市场; 非知情交易策略; 私人估值; 资产价值预期; 流动性; 均衡

中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2017)03-0024-22

0 引言

按价格形成机制, 股票市场划分为指令驱动的竞价市场、报价驱动的做市商市场和混合市场. 目前包括我国沪、深交易所在内的全球范围内大多数交易所均引进指令驱动机制. 与其广泛应用相比, 关于指令驱动市场的最优交易策略及动态均衡定价过程的理论模型研究却相对较少. 原因在于没有做市商报价, 使得市场的流动性及流动性供给者均成为市场的内生变量, 市场统一出清条件难以刻画. 报价驱动市场的大多研究是将市场流动性供给与消耗分开, 通过供需平衡达到市场出清, 或单期或多期, 分别如 Chen 等^[1]、Cespa 和 Vives^[2]. 然而, 这种均衡条件无法移植到指令驱动市场, 交易者可以选择市价指令消耗市场流动性、选择限价指令提供流动性、或者选择不提交指令, 其策略内生于交易者的信息结构、偏好、禀赋、预期等特征, 每个交易行为包含了其对指令簿

已有状态的认识及对限价指令未来执行概率的预期; 限价指令簿成为市场所有投资者理性预期的聚集器, 而其动态演化则刻画了投资者的动态学习过程和信息博弈行为. 因此, 指令驱动市场的均衡可归结为交易者交易策略的动态演化进程.

早期的指令驱动市场动态模型关注对称信息下交易者的指令提交策略(如文献[3-7]). 之后, 学者引入知情交易者, 聚焦非对称信息下交易者的最优交易策略以及市场动态均衡的刻画^②, 如 Goettler 等^[10, 11] 研究视角从对称信息发展到非对称信息, 发现市场是一个波动率放大器; Rosu^[6, 12] 在动态策略基础上考虑价值随机波动的资产, 内生交易者的信息获取, 结果表明: 知情交易能够增加市场流动性. 但上述文献重点研究知情交易者的交易策略, 而非知情交易者的交易策略完全由外生参数给定, 如 Goettler 等^[10] 中的私人估值以及 Rosu^[12] 中的私人估值和时间偏好.

① 收稿日期: 2015-11-25; 修订日期: 2016-10-10.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71371023; 71371024; 71373017); 本文入选“第十三届全国青年管理科学与系统科学学术会议(2015年, 西安) 优秀论文”.

通讯作者: 张强(1976—), 男, 辽宁本溪人, 博士, 副教授. Email: jqx_zhq@buaa.edu.cn

② 更多关于指令驱动市场研究的文献请参阅文献[8-9].

O'Hara^[13]指出“非知情交易者对知情交易者提供了流动性,理解其行为才能深化关于交易过程的认识。基于信息的微观结构模型通常假定非知情交易者的交易行为是非策略的,既然知情交易者选择交易策略,那么非知情交易者也应当选择交易策略”,并将非知情交易者的交易策略问题视为市场微观结构理论研究的几个难题之一。就本文作者调研所限,目前仅有 Chiarella 等^[14]和 Wei 等^[15]利用计算实验的方法对非知情交易者的学习行为及其内生下单策略做了研究。在非对称信息下,关于非知情交易者动态交易策略的理论研究仍在探索中。

为更好的分析非知情交易者的交易策略,假设资产价值具有高波动率,将知情交易者的策略简化为只提交市价指令。Easley 等^[16]发现资产价值的高波动率反映了信息到达的高频率。高频率的信息环境下,知情交易者的私人信息具有短时效性^[15]。此外,Goettler 等^[10]和 Chiarella 等^[14]发现在信息短期有效以及资产价值波动率较大时,知情交易者更倾向于提交市价指令。

在高资产波动率的市场环境下,基于 Handa 等^[17]的分析框架,引入 Rosu^[12]中非知情交易者对资产价值的预期变量,以实现非知情交易者对指令流信息的学习,并根据其类型及预期确定动态最优交易策略。通过构造指令驱动市场动态模型,刻画了非知情交易者对资产价值预期的动态更新过程以及价格的动态形成过程,并分析了市场参数对流动性的影响。这不仅有助于理解非知情交易者的交易行为,同时有助于加深对交易过程的认识。

需要指出的是本文与 Handa 等^[17]存在很大差别,Handa 等^[17]虽在 Foucault^[3]的基础上引入知情交易者,但其假设每期交易结束后,私人信息得到揭示,非知情交易者的交易策略实质上为静态策略。而本文通过引入非知情交易者对资产价值的预期变量,实现了动态交易策略的刻画。

与已有文献相比,本文的不同之处在于研究非对称信息框架下非知情交易者的最优交易策略。按研究内容来分,前人的理论模型研究主要分为两类:一是对称信息框架下非知情交易者的交易策略的研究;二是非对称信息框架下知情交易者交易策略的研究。对称信息框架下,Par-

lour^[4]和 Foucault^[3]开辟了指令驱动市场的动态策略研究。但囿于问题的复杂性,两位学者都假设市场信息为公共信息。而本文引入知情交易者,将指令簿动态策略研究推向非对称信息框架下。由知情交易者向市场传递资产价值的信息,非知情交易者通过学习指令流,形成对资产价值的预期,以确定动态最优策略。Foucault 等^[5]将 Parlour^[4]的两价位限价指令簿扩展到多价位,但假设条件苛刻,要求新提交的限价指令需改善市场价格,且买家、卖家交错序贯进入市场。本文放宽交易者进入市场条件,允许交易者序贯进入市场,且根据指令簿状态及其类型选择最优限价指令价格,使得决策更具有现实意义。Rosu^[6]在 Foucault 等^[5]的基础上建立多价位指令簿模型,并刻画了限价指令簿的动态演化过程。但模型假设资产价值没有变化,本文在这点上做了改善。非对称信息框架下,Rosu^[12]在 Rosu^[6]的基础上考虑价值随机波动的资产,内生知情交易者,并基于信息长期有效,重点分析了知情交易者的最优策略以及知情交易对市场流动性的影响。Goettler 等^[10]同样研究了知情交易者的交易策略,但其模型基于信息短期有效的假设,且只能通过数值求解得到模型均衡解。与 Rosu^[12]和 Goettler 等^[10]不同,本文基于知情交易者的私人信息短期有效,着重研究非知情交易者的最优策略。

此外,Handa 等^[17]在 Foucault^[3]的基础上引入知情交易者,刻画了非对称信息下非知情交易者的最优策略,但其模型实质上为静态模型,与本文刻画的动态交易策略不同。近年来,Chiarella 等^[14]和 Wei 等^[15]在信息短期有效的假设下,利用计算实验的方法对非知情交易者的学习行为及其内生下单策略做了研究。Chiarella 等^[14]发现在适应性学习条件下,长期私人估值对最优策略没有影响。与 Goettler 等^[10]类似,本文假设非知情交易者基于私人估值选择交易策略,并重点分析了私人估值对交易策略以及市场流动性的影响。

将本文的主要结论及发现概述如下。文中用价差、限价指令的成交概率以及限价指令积极性作为市场流动性的度量指标。

第一,非知情交易者策略分别依赖于其私人估值、资产价值波动及其对资产价值的预期。固定其他变量,随私人估值的增加或资产价值波动

的减小,市场先后进入低执行概率均衡、混合均衡及高执行概率均衡. Hollifield 等^[18] 实证研究结果与本文高执行概率均衡和低执行概率均衡相吻合. 此外,若交易者对资产价值的预期分歧较小时,非知情交易者的报价将知情交易者挤出市场.

第二,依低执行概率均衡、混合均衡及高执行概率均衡次序,三类均衡流动性依次增加. 在高、低执行概率均衡市场中,私人估值增加会降低市场流动性. 高执行概率均衡市场中,资产价值波动增加会增加市场流动性;而低执行概率均衡市场中,资产价值波动增加会降低市场流动性.

第三,知情交易者比例对价差的影响依赖于市场所处的均衡状态. 具体来讲,高执行概率均衡市场中,知情交易者比例增加,价差减小;而低执行概率均衡市场中,知情交易者比例增加,价差增大. 这为张强等^[19] 的实证结论提供了理论解释. 本文中,由于价差可分解为保留价差和逆向选择价差两部分,知情交易者比例与这两部分价差依次分别呈现负相关和正相关. 在两类均衡中,由于知情交易比例对这两部分价差的影响幅度不同,导致其中一种价差的变化主导另外一种的变化,从而对价差的影响出现截然相反的情况. 这在以往的理论文献中尚未得到发现.

1 模型

考虑一个无限期的限价指令市场动态模型. 市场上只有一种具有高波动率的资产. 交易在离散时间内发生. 风险中性的交易者序贯进入市场,交易者类型随机确定. 若交易者选择不进入市场,在该时刻会有其他交易者代替进入市场^③. 交易者选择最优交易策略交易一单位资产后,退

出市场^④.

1.1 市场假设

资产价值 v_t 只有两种状态: v^H 和 v^L , 分别表示资产的高价位和低价位,两者等概率出现. 假设资产价值具有高波动率特性,该特性具体表现为资产价值的高价位和低价位的差较大^⑤.

假设市场中的交易者分为知情交易者和非知情交易者两类,两者出现的概率分别为: π 和 $1 - \pi$. 知情交易者在每期交易前获得关于资产价值 v_t 的私人信息,且该信息为完全信息. 高波动率市场环境下,知情交易者只提交市价指令^⑥,并根据其私人信息确定交易方向. 事实上,因为本文中交易者连续监测市场, Dugast^[25] 发现当交易者监测市场的能力较强时,资产价格会迅速收敛到均衡价格,即交易者的信息优势是短期存在的. 此外, Goettler 等^[10] 和 Chiarella 等^[14] 发现在信息短期有效以及资产价值波动率较大时,知情交易者更倾向于提交市价指令.

用 y_t 表示非知情交易者对资产的私人估值,该量是时间不变量^⑦,根据私人估值的不同,将非知情交易者分为私人估值为 $+L$ 和 $-L$ 的两类,分别表示潜在的买家和卖家,两者出现的概率分别为^⑧ 0.5. 由于非知情交易者知道资产的价值只有两个状态,所以非知情交易者对资产的估值为 $v^i \pm L (i = H \text{ 或 } L)$,他刻画了交易者的保留价值. 非知情交易者的类型由私人估值和交易者对资产价值的预期决定,所以保留价值完全刻画了非知情交易者的类型. 用 R_t 表示 t 时非知情交易者的保留价值,则 $R_t = v^i + y_t (i = H \text{ 或 } L)$. R_t 刻画了 t 时进入市场的非知情交易者的类型,例如 $R_t = v^H + L$ 表示 t 时进入市场的为保留价值高的买家. 见附录中的附图 1. 总结了上述假设,给出了 $t + 1$

③ 沿用 Rosu^[12] 对交易者不进入市场的假设.

④ 沿用 Foucault^[3, 20]、Handa 等^[17]、Foucault 等^[5] 以及 Rosu^[12] 等对交易者交易后行为的假设.

⑤ 借鉴 Foucault 等^[21] 的处理方法,用资产的高价值和低价值的差 $(v^H - v^L)$ 代替资产价值的波动率. 其他学者也用资产价值波动的幅度表示资产价值的波动率,如 Foucault^[3]、Biais 等^[22]. 图 3 中 x 轴正方向表示波动率减小,而本文的结论多集中在 x 轴正半轴的左侧,这与本文的高波动率市场环境假设一致.

⑥ 此外,Handa 等^[17]、Ruchti^[23]、张强等^[24] 也假设知情交易者只提交市价指令.

⑦ 沿用 Foucault^[3]、Parlour^[4]、Rosu^[12]、Handa 等^[17] 对交易者私人估值的假设,因为在短时间内,没有新的信息进入,交易者一般不会更新其私人估值.

⑧ 因为本文研究的重点不是买家、卖家不平衡对价格形成过程的影响,因此假设买家卖家出现的概率相等,这与 Foucault 等^[5] 的假设一致. 若将买家、卖家出现的概率扩展为 k 和 $1 - k$, 本文的结果仍然成立.

期非知情交易者的决策树以及本文的交易过程。

非知情交易者根据当前指令簿的状态及其类型最大化其预期效用确定最优交易策略。当指令簿上没有限价指令时,交易者只能提交限价指令,限价指令是否执行与限价指令的价格以及下一时刻进入市场的交易者类型有关。每个限价指令只在指令簿上存在一期,即下一时刻的交易者进入市场后,该限价指令或者执行或者被取消。^⑨

市场的指令流以及指令簿的历史演化过程是公开信息,且达到均衡时,交易者的指令提交策略也是公开信息。非知情交易者根据公开信息估计资产的真实价值,因为非知情交易者知道资产的真实价值只有 v^H 和 v^L 两个状态,因此令 θ_t 表示 t 时非知情交易者认为资产价值为 v^H 的比例,其中潜在的买家和卖家各占 $1/2$ (即认为资产价值为 $v^H + L$ 的有 $\theta_t/2$, 认为资产价值为 $v^H - L$ 的有 $\theta_t/2$)。则 t 时非知情交易者中认为资产价值为 v^L 的比例为 $1 - \theta_t$, 同样,潜在的买家和卖家各占 $1/2$, 那么 t 时非知情交易者根据市场的公开信息对资产价值的估计为: $v_t^E = \theta_t v^H + (1 - \theta_t) v^L$ 。因为 v^H 和 v^L 已知,因此 θ_t 也刻画了非知情交易者对资产价值的预期,在下文中将 θ_t 和 v_t^E 都看作非知情交易者对资产价值的预期变量。下面给出 θ_t 的演化规律。

因为只有知情交易者拥有资产价值的真实信息,而知情交易者只提交市价指令,所以只有市价指令能改变非知情交易者对资产价值的预期。若 $t + 1$ 时的交易者提交限价指令,则: $\theta_{t+1} = \theta_t$, 即非知情交易者对资产价值的预期不变 $v_{t+1}^E = v_t^E$; 若 $t + 1$ 时的交易者提交市价买指令(简记为 $O_{t+1} = BMO$ ^⑩), 且非知情交易者认为该市价指令能够向市场传递资产价值的信息,则此时非知情交易者认为资产价值为 v^H 的比例为: $\theta_{t+1}^+ = Pr(v = v^H | O_{t+1} = BMO)$; 同理,若 $t + 1$ 时的指令为市价卖指令($O_{t+1} = SMO$), 且非知情交易者认为该市价指令中包含资产价值的信

息时,非知情交易者中认为资产价值为 v^H 的比例为: $\theta_{t+1}^- = Pr(v = v^H | O_{t+1} = SMO)$ 。因此 θ_t 的更新过程可以表示为

$$\theta_{t+1} = \begin{cases} \theta_{t+1}^+, & O_{t+1} = BMO \\ \theta_{t+1}^-, & O_{t+1} = SMO \\ \theta_t, & O_{t+1} = SLO, \text{ 或 } BLO \end{cases} \quad (1)$$

交易者不交易时,其预期效用为零。当交易者提交市价指令以及限价指令的预期效用相等时,交易者提交市价指令。

1.2 指令提交策略

首先概述新进入市场的交易者所面临的指令簿状态以及如何选择最优策略。对于知情交易者,若指令簿上存在限价指令,交易者根据其私人信息以及限价指令价格决定市价指令买卖方向; 否则,退出市场。对于非知情交易者,他们可选择市价指令或限价指令。若指令簿上没有限价指令或只有与其交易方向相同的限价指令时,非知情交易者基于限价指令执行概率和逆向选择风险,确定最优限价指令价格,提交限价指令; 若指令簿上有对手方限价指令时,交易者可确定其市价指令效用,并与其限价指令预期效用比较,确定最优策略。

知情交易者根据私人信息易确定其最优买卖方向。下面以非知情买家为例,介绍非知情交易者确定最优交易策略的过程。

假设 t 时进入市场的为非知情买家,设 $B_t(v_i^E, R_t)$ 为该买家提交限价指令时的价格,其中 v_i^E 刻画了 t 时指令簿的状态,即非知情交易者对资产价值的预期, $R_t = v^i + L$ ($i = H$ 或 L) 刻画了 t 时进入市场的买家类型^⑪。设该买家提交限价指令的效用为 $J(v_i^E, R_t, B_t(v_i^E, R_t))$, 则

$$J(v_i^E, R_t, B_t(v_i^E, R_t)) = Pr(O_{t+1} = SMO | B_t(v_i^E, R_t)) [R_t + E(\Delta v_{t+1} | v_i^E, O_{t+1} = SMO)] - B_t(v_i^E, R_t) \quad (2)$$

⑨ 沿用 Foucault^[3]、Handa 等^[17]、Hoffmann^[27] 对指令簿上限价指令存在期的假设。

⑩ $O_{t+1} = BMO$ 表示 $t + 1$ 时进入市场的交易者提交市价买指令(buy market order)。用 SMO 、 SLO 、 BLO 分别表示市价卖指令、限价卖指令和限价买指令。

⑪ 根据前文假设,买家的私人估值为 $+L$ 。因此,下文中刻画买家类型的保留价值 R_t 的取值为 $R_t = v^i + L$ ($i = H$ 或 L)。如 t 时买家的限价指令价格 $B_t(v_i^E, R_t)$ 以及 t 时买家的最优临界价格 $B_0^*(v_i^E, R_t)$ 中的 R_t 。同理,刻画卖家类型的保留价值 R_t 的取值为 $R_t = v^i - L$ ($i = H$ 或 L)。如 $A_t(v_i^E, R_t)$ 、 $A_0^*(v_i^E, R_t)$ 等中的 R_t 。

其中 $Pr(O_{t+1} = SMO | B_t(v_t^E, R_t))$ 为该限价买指令的执行概率,他刻画了该限价指令的不执行风险, $E(\Delta v_{t+1} | v_t^E, O_{t+1} = SMO)$ 为该指令得到执行时,交易者对资产价值波动的预期,他刻画了非知情交易者所面临的逆向选择风险.

假设 t 时该买家进入市场时,指令簿上存在价格为 $A_{t-1}(v_{t-1}^E, R_{t-1})$ 的限价卖单,则该买家提交市价指令的效用为 $R_t - A_{t-1}(v_{t-1}^E, R_{t-1})$. 因为交易者只在市价指令的效用大于等于限价指令的预期效用时,才选择市价指令,因此该买家提交市价指令时,效用公式需满足: $R_t - A_{t-1}(v_{t-1}^E, R_{t-1}) \geq J(v_t^E, R_t, B_t(v_t^E, R_t))$, 即 $A_{t-1}(v_{t-1}^E, R_{t-1}) \leq R_t - J(v_t^E, R_t, B_t(v_t^E, R_t))$, 记不等式的右边部分: $R_t - J(v_t^E, R_t, B_t(v_t^E, R_t))$ 为该买家提交市价指令的临界价格 $B_0(v_t^E, R_t)$. 当指令簿上的限价卖指令价格小于等于 $B_0(v_t^E, R_t)$ 时,该买家提交市价指令,否则,提交限价指令.

同理,设 $A_t(v_t^E, R_t)$ 为 t 时进入市场的非知情卖家提交的限价指令价格,可得其限价指令效用为 $J(v_t^E, R_t, A_t(v_t^E, R_t))$, 及其提交市价指令的临界价格 $A_0(v_t^E, R_t)$. 下面给出 t 时非知情交易者的最优临界价格的定义.

定义 1 $B_0^*(v_t^E, R_t)$: 买家提交市价指令的最优临界价格; $A_0^*(v_t^E, R_t)$: 卖家提交市价指令的最优临界价格.

以非知情买家为例, $B_t^*(v_t^E, R_t) = \text{Arg max}_{B_t(v_t^E, R_t)} J(v_t^E, R_t, B_t(v_t^E, R_t))$ 表示 t 时买家提交的限价指令的效用最大时的限价指令价格,那么买家的最优临界价格 $B_0^*(v_t^E, R_t) = R_t - J(v_t^E, R_t, B_t^*(v_t^E, R_t))$ 为该买家提交市价指令时愿意接受的最高限价指令卖价. 同理 $A_0^*(v_t^E, R_t)$ 为卖家提交市价指令时愿意接受的最低限价指令买价.

由 $B_t^*(v_t^E, R_t)$ 以及 $B_0^*(v_t^E, R_t)$ 的定义可得: 当指令簿上不存在限价卖指令时,买家进入市场提交价格为 $B_t^*(v_t^E, R_t)$ 的限价指令; 当指令簿上存在限价卖指令时,若限价卖指令的价格大于 $B_0^*(v_t^E, R_t)$, 该买家提交价格为 $B_t^*(v_t^E, R_t)$ 的限价指令,若限价卖指令的价格小于等于 $B_0^*(v_t^E, R_t)$, 该买家提交市价指令. 因此, $B_0^*(v_t^E, R_t)$ 既表示 t 时买家选择限价指令以及市价指令效用相等时指令簿上的限价卖指令价格,又表示上一期

的卖家为确保其限价指令能够执行的最高价格. 综上可得,限价指令价格 $B_t^*(v_t^E, R_t)$ 以及最优临界价格 $B_0^*(v_t^E, R_t)$ 完全刻画了 t 时进入市场的买家的最优交易策略. 因此,令 $(B_t^*(v_t^E, R_t), B_0^*(v_t^E, R_t))$ 表示 t 时进入市场的买家的最优交易策略集. 同理, $(A_t^*(v_t^E, R_t), A_0^*(v_t^E, R_t))$ 表示 t 时进入市场的卖家的最优交易策略集.

最优策略集中的 $A_t^*(v_t^E, R_t)$ 和 $B_t^*(v_t^E, R_t)$ 给出了交易者提交限价指令的最优报价, $A_0^*(v_t^E, R_t)$ 和 $B_0^*(v_t^E, R_t)$ 给出了交易者提交市价指令的最优临界价格,若指令簿上的最优报价在两临界价格之外,交易者将提交限价指令,否则,交易者将提交市价指令.

此外,交易者的指令提交策略是相互确定的. 具体来讲,一方面,当市价指令的效用大于等于限价指令的预期效用时,交易者才提交市价指令,因此交易者在提交市价指令时会考虑其最优限价指令策略; 另一方面,因为限价指令只在指令簿上存在一期,因此交易者提交的限价指令若想实现效用最大化,需预期下一时刻对手方交易者的最优市价指令策略.

限价指令市场的均衡由一个相互作用的最优策略集确定,即当给定其他交易者的策略时,每一个进入市场的交易者的策略都是最优的. 下面给出市场均衡的定义.

定义 2 市场均衡完全由满足下列条件的策略集 $(B_t^*(v_t^E, R_t), B_0^*(v_t^E, R_t))$ 和 $(A_t^*(v_t^E, R_t), A_0^*(v_t^E, R_t))$ 确定:

- 1) 当给定 $(B_t^*(v_t^E, R_t), B_0^*(v_t^E, R_t))$ 和 $(A_t^*(v_t^E, R_t), A_0^*(v_t^E, R_t))$ 时,对任意的买家: $B_t^*(v_t^E, R_t) = \text{Arg max}_{B_t(v_t^E, R_t)} J(v_t^E, R_t, B_t(v_t^E, R_t))$, 以及 $B_0^*(v_t^E, R_t) = R_t - J(v_t^E, R_t, B_t^*(v_t^E, R_t))$;
- 2) 当给定 $(B_t^*(v_t^E, R_t), B_0^*(v_t^E, R_t))$ 和 $(A_t^*(v_t^E, R_t), A_0^*(v_t^E, R_t))$ 时,对任意的卖家: $A_t^*(v_t^E, R_t) = \text{Arg max}_{A_t(v_t^E, R_t)} J(v_t^E, R_t, A_t(v_t^E, R_t))$, 以及 $A_0^*(v_t^E, R_t) = R_t - J(v_t^E, R_t, A_t^*(v_t^E, R_t))$.

定义 2 中给出的交易者的最优交易策略刻画了在给定非知情交易者对资产价值的公共预期以及其他交易者的交易策略时,新进入市场的交易者的最优交易策略. 下面给出最优临界价格 A_0^*

(v_i^E, R_i) 和 $B_0^*(v_i^E, R_i)$ 及相关量大小的直观比较.

命题 1 1) 买(卖)家的保留价值 R_i 大(小)于等于其最优临界价格 $B_0^*(v_i^E, R_i)$ ($A_0^*(v_i^E, R_i)$);

2) 买(卖)家的最优限价买(卖)指令价格的 $B_i^*(v_i^E, R_i)$ ($A_i^*(v_i^E, R_i)$) 小(大)于其最优临界价格 $B_0^*(v_i^E, R_i)$ ($A_0^*(v_i^E, R_i)$);

3) 保留价值高的买(卖)家的最优临界价格 $B_0^*(v_i^E, v^H + L)$ ($A_0^*(v_i^E, v^H - L)$) 大于保留价值低的买(卖)家的最优临界价格 $B_0^*(v_i^E, v^L + L)$ ($A_0^*(v_i^E, v^L - L)$).

证明 结论显然成立.

交易者的最优临界价格与指令簿状态 v_i^E 及其保留价值 R_i 有关,他刻画了交易者愿意为即时交易付出的最大成本. 命题 1 中的 1) 给出了最优临界价格和保留价值 R_i 的大小关系. 命题 1 中的 2) 说明当交易者选择限价指令时,会要求额外的溢价补偿. 这是因为相比于市价指令,限价指令面临不执行风险以及逆向选择风险. 命题 1 中的 3) 说明保留价值越高的交易者愿意为即时交易付出的成本越大.

2 均衡过程分析

本文市场均衡的直观解释如下: 知情交易者基于私人信息提交市价指令. 非知情交易者基于私人估值以及对资产价值的预期选择市价或限价指令. 私人估值的大小决定了限价指令执行概率的高低: 若私人估值的绝对值较大,非知情交易者提交相对积极的限价指令; 若私人估值的绝对值较小,非知情交易者提交积极性较差的限价指令; 若私人估值适中,保留价值大的买家和保留价值小的卖家的交易意愿强烈,选择积极的限价指令,而保留价值小的买家和保留价值大的卖家的交易意愿不强烈,选择积极性较差的限价指令. 非知情交易者对资产价值的预期通过影响非知情交易者限价指令的报价,对交易者策略产生影响. 具体的,预期分歧

最大时,非知情交易者的报价关于 v_i^E 对称; 随预期分歧减小, θ_i 增加(减小)时,不同类型卖家(买家)的报价不同; 且非知情卖家(买家)的报价大于 v^H (小于 v^L) 时,知情交易者被挤出市场. 下面具体分析均衡过程.

由于市场上只存在两种交易者,知情交易者基于私人信息交易,非知情交易者只有与非知情交易者交易才能获得收益. 因此,当期非知情交易者的最优限价指令策略要确保满足下一时刻对手方非知情交易者的最优市价指令提交策略. 由此可得连续两期间非知情交易者最优策略之间的关系.

命题 2 t 期非知情买(卖)家的最优限价指令价格等于 $t+1$ 期非知情卖(买)家选择市价指令时的最优临界价格,即

$$B_i^*(v_i^E, R_i) = A_0^*(v_{i+1}^E, v^L - L) \text{ 或 } B_i^*(v_i^E, R_i) = A_0^*(v_{i+1}^E, v^H - L)$$

$$A_i^*(v_i^E, R_i) = B_0^*(v_{i+1}^E, v^H + L) \text{ 或 } A_i^*(v_i^E, R_i) = B_0^*(v_{i+1}^E, v^L + L)$$

(3)

证明 以 t 期非知情买家为例. 由命题 1 以及图 1 可知,当 $B_i^*(v_i^E, R_i) \geq A_0^*(v_{i+1}^E, v^H - L)$ 时,且 $v^L \leq B_i^*(v_i^E, R_i) \leq v^H$ 时^⑩, $t+1$ 时进入市场提交市价卖指令的交易者有两种情况: (1) 知情卖家进入市场(概率为 π),其前提为知情交易者观察到资产的真实价值为 v^L (非知情交易者认为资产价值为 v^L 的概率为 $1 - \theta_i$, 该情况出现的概率为 $\pi(1 - \theta_i)$); (2) 非知情卖家进入市场,该情况出现的概率为 $(1 - \pi)/2$ ^⑪. 因此该限价指令的执行概率 $Pr(O_{t+1} = SMO | B_i^*(v_i^E, R_i)) = \pi(1 - \theta_i) + (1 - \pi)/2$. 由于该限价买指令的执行概率并不随限价指令价格的增加而增大,因此买家为实现预期效用最大化,会选择达到此执行概率的最低价格,即 $B_i^*(v_i^E, R_i) = A_0^*(v_{i+1}^E, v^H - L)$.

同理,当买家在区间 $[A_0^*(v_{i+1}^E, v^L - L), A_0^*(v_{i+1}^E, v^H - L)]$ 内提交限价指令,且 $v^L \leq B_i^*$

⑩ 在下文中会将该条件放松.

⑪ 非知情交易者出现的概率为 $1 - \pi$, 卖家出现的概率为 $1/2$, 所以非知情卖家出现的概率为 $(1 - \pi)/2$, 又因为 $B_i^*(v_i^E, R_i) \geq A_0^*(v_{i+1}^E, v^H - L)$, 所以该卖家必提交市价指令.

$(v_t^E, R_t) \leq v^H$ 时,该限价指令得到执行的情况共有两种:(1) 知情卖家进入市场提交市价指令,其概率为 $\pi(1 - \theta_t)$; (2) 保留价值低的非知情卖家,即 $v^L - L$ 类交易者进入市场提交市价指令,其概率为 $(1 - \pi)(1 - \theta_t) / 2$. 因此该区间内的限价指令的执行概率为

$$\begin{aligned} Pr(O_{t+1} = SMO | B_t^*(v_t^E, R_t)) \\ = \pi(1 - \theta_t) + (1 - \pi)(1 - \theta_t) / 2 \end{aligned}$$

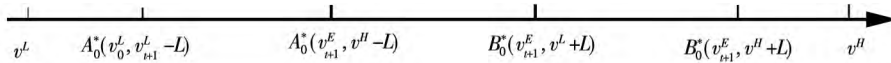


图 1 非知情交易者的限价指令价格

Fig. 1 The price for limit orders submitted by the uninformed traders

注:命题 2 中 t 时的最优限价指令价格是指令簿状态 v_t^E 以及交易者类型 R_t 的函数. 以买家为例, t 时买家有两种类型: $v^H + L$ 类或 $v^L + L$ 类买家. 两类买家都根据指令簿状态及其类型最大化预期效用选择最优限价指令价格. 为确保 $t + 1$ 时对手方交易者即卖家进入市场时,其限价指令效用最大化, t 时买家共有两个最优限价指令价格可以选择: $t + 1$ 时 $v^L - L$ 类卖家的最优临界价格 $A_0^*(v_{t+1}^E, v^L - L)$ 以及 $v^H - L$ 类卖家的最优临界价格 $A_0^*(v_{t+1}^E, v^H - L)$. 因为 t 时买家提交限价指令时,非知情交易者对资产价值的预期不变,即 $v_{t+1}^E = v_t^E$,且 $t + 1$ 时卖家类型确定后,其最优临界价格确定. 因此, t 时买家可确定其最优限价指令的效用,同时可确定其最优临界价格.

命题 2 不仅给出了交易者的最优限价指令提交策略,同时给出了交易者的最优市价指令提交策略:当期买家的最优限价指令价格等于下一期卖家市价指令的最优临界价格;当期卖家的最优限价指令价格等于下一期买家市价指令的最优临界价格. 因为当期交易者提交限价指令时,指令簿状态并未发生变化,下一期交易者与当期交易者面临相同的指令簿状态,因此交易者的最优交易策略是共同确定的^⑭.

交易者选择在 $A_0^*(v_{t+1}^E, v^L - L)$ 处提交限价指令以实现预期效用最大化.

当 $B_t^*(v_t^E, R_t) < A_0^*(v_{t+1}^E, v^L - L)$ 时,非知情卖家不提交市价指令,因此非知情买家的限价指令只可能与知情交易者交易,故非知情买家不在此区间内提交限价指令.

同理可得非知情卖家的最优限价指令价格及其执行概率.

由命题 2 的证明过程可得当限价指令价格在资产价值的波动范围之内时,限价指令的执行概率:

推论 1 限价指令价格在资产价值的波动范围之内时,各限价指令的执行概率

$$\begin{aligned} Pr(O_{t+1} = BMO | A_t^*(v_t^E, R_t) = B_0^*(v_t^E, v^L + L)) &= \lambda_{BM} \\ Pr(O_{t+1} = SMO | B_t^*(v_t^E, R_t) = A_0^*(v_t^E, v^H - L)) &= \lambda_{SM} \\ Pr(O_{t+1} = BMO | A_t^*(v_t^E, R_t) = B_0^*(v_t^E, v^H + L)) &= \lambda \\ Pr(O_{t+1} = SMO | B_t^*(v_t^E, R_t) = A_0^*(v_t^E, v^L - L)) &= \mu \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\lambda_{BM} = \pi\theta_t + \frac{1 - \pi}{2}$, $\lambda_{SM} = \pi(1 - \theta_t) + \frac{1 - \pi}{2}$, $\lambda = \pi\theta_t + \frac{1 - \pi}{2}\theta_t$, $\mu = \pi(1 - \theta_t) + \frac{1 - \pi}{2}(1 - \theta_t)$.

证明 由命题 2 的证明过程易得.

由命题 2 可知,非知情交易者在提交限价买(卖)指令时,有两个价位可提交限价指令. 由推论 1 可得, $\lambda_{SM} > \mu$, 即买家在 $A_0^*(v_t^E, v^H - L)$ 处提交的限价指令的执行概率大于在 $A_0^*(v_t^E, v^L - L)$ 处提交的限价指令的执行概率;且 $\lambda_{BM} > \lambda$, 即卖家在 $B_0^*(v_t^E, v^L + L)$ 处提交的限价指令的执行概率大于在 $B_0^*(v_t^E, v^H + L)$ 处提交的限价指令的

⑭ 因为 t 时交易者提交限价指令时,非知情交易者对 θ_t 的预期不变,即 $\theta_{t+1} = \theta_t$,从而 $v_{t+1}^E = v_t^E$. 因此, $t + 1$ 时非知情交易者确定最优交易策略面临的指令簿状态与 t 时一致,其最优临界价格满足: $A_0^*(v_{t+1}^E, R_t) = A_0^*(v_t^E, R_t)$, $B_0^*(v_{t+1}^E, R_t) = B_0^*(v_t^E, R_t)$. 下文中涉及到交易者的最优交易策略中的最优临界价格时,都沿用该表达式.

⑮ 交易者的交易行为由指令提交时间、交易量以及价格刻画,这三者同样刻画了限价指令的积极性程度. 相对积极的限价指令指的是交易者提交的限价指令具有更高(低)的买(卖)价和更大的交易量^[26]. 本文中交易者每次只交易一单位资产,因此相对积极的限价指令即具有更高(低)价格的限价买(卖)指令.

执行概率. 由此可得, 相对积极的限价指令^⑤的成交概率较高, 积极性较差的限价指令的成交概率较低. 交易者根据保留价值 R_t 以及指令簿状态 v_t^E 确定最优交易策略后, 市场进入均衡状态. 类似于 Hoffmann^[27] 对市场均衡的划分, 根据交易者最优交易策略中限价指令执行概率的大小, 将市场分为以下三种均衡.

定义 3 当非知情交易者都选择提交相对积极的限价指令, 即限价指令的执行概率较高时, 市场达到高执行概率均衡; 当非知情交易者都选择低成交概率限价指令策略时, 市场达到低执行概率均衡; 当部分非知情交易者选择高执行概率策略, 部分非知情交易者选择低执行概率策略时, 市场达到混合执行概率均衡.

首先给出高执行概率均衡的刻画. 定理 1 刻画了当交易者对资产价值的预期 θ_t 在 0.5 附近波动, 且交易者的最优限价指令价格在 $[v^H, v^H]$ 内时, 交易者的最优交易策略.

定理 1 当 $\underline{L}_1(\theta_t) < L < \bar{L}^1(\theta_t)$ 时, 存在 θ_t 的区间 $(\underline{\theta}_1(L), \bar{\theta}^1(L))$, 使得非知情交易者的预期在此区间内时, 交易者的最优限价指令价格及其执行概率为

$$\begin{aligned} A_t^*(v_t^E, R_t) &= B_0^*(v_t^E, v^L + L) = \phi_1(v^L + L) + \\ &(1 - \phi_1)(v^H - L) + \frac{\lambda_{BM}}{H_1} \pi \theta_t (1 - \theta_t) (v^H - v^L) \\ Pr(O_{t+1} = BMO | A_t^*(v_t^E, R_t)) &= \lambda_{BM} \\ B_t^*(v_t^E, R_t) &= A_0^*(v_t^E, v^H - L) = \phi_1(v^H - L) + \\ &(1 - \phi_1)(v^L + L) - \frac{\lambda_{SM}}{H_1} \pi \theta_t (1 - \theta_t) (v^H - v^L) \\ Pr(O_{t+1} = SMO | B_t^*(v_t^E, R_t)) &= \lambda_{SM} \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $H_1 = 1 - \lambda_{BM} \lambda_{SM}$, $\phi_1 = \frac{\lambda_{BM}}{H_1}$, $\phi_1 = \frac{\lambda_{SM}}{H_1}$, $\underline{L}_1(\theta_t)$ 和 $\bar{L}^1(\theta_t)$ 的表达式见附录, $\underline{\theta}_1(L)$ 和 $\bar{\theta}^1(L)$ 的范围可由定理证明过程得到.

证明 见附录.

当满足定理 1 的条件时, 非知情交易者选择执行概率较高的价格提交限价指令的效用大于选择执行概率较低的价格提交限价指令的效用, 因

此非知情交易者选择在执行概率较高的价格上提交限价指令, 市场达到高执行概率均衡. 具体来讲, 此时, $v^H - L$ 类卖家和 $v^L + L$ 类买家提交市价指令与在高执行概率价格上提交限价指令的效用相等; 而 $v^L - L$ 类卖家和 $v^H + L$ 类买家选择市价指令的效用大于在高执行概率价格上提交限价指令的效用, 因此这两类交易者选择提交市价指令 (比较两者的市价指令效用以及限价指令效用易得). 因为限价指令和市价指令效用相等时, 交易者选择市价指令, 所以若市场上存在限价指令, 下一时刻进入市场的对手方非知情交易者必然提交市价指令, 此时限价指令的成交概率较高.

由式 (5) 可知, 交易者的限价指令价格由两部分组成: 交易者的保留价值和由逆向选择引起的风险溢价. 第一部分为保留价值的加权平均: $k(v^L + L) + (1 - k)(v^H - L)$ ($k = \phi_1$ 或 $1 - \phi_1$). 由命题 1 可知当限价指令价格满足 $v^H - L$ 类卖家的最优临界价格以及 $v^L + L$ 类买家的最优临界价格时, $v^L - L$ 类卖家以及 $v^H + L$ 类买家的最优临界价格也同时满足, 所以限价指令交易者只需考虑 $v^H - L$ 类卖家以及 $v^L + L$ 类买家的最优临界价格即可, 因此均衡价格中的保留价值部分是这两类交易者保留价值的加权平均. 第二部分为限价指令交易者要求的风险溢价: $\pi \theta_t (1 - \theta_t) (v^H - v^L)$. 因为下一时刻的市价指令有可能来自知情交易者, 非知情交易者提交限价指令时面临逆向选择风险, 所以限价指令交易者要求额外的风险溢价. 以卖者为例, 下一时刻的买市价指令由知情交易者提交的概率为 $\pi \theta_t$, 而此时非知情交易者面临的损失为 $v^H - v_t^E$, 即 $\pi \theta_t (1 - \theta_t) (v^H - v^L)$.

此外, 非知情交易者对资产价值的预期影响交易者的报价. 随预期增加, 买卖报价增大. 在预期分歧最大, 即 $\theta_t = 0.5$ 时, 报价关于 v_t^E 对称; 随预期分歧减小, 如非知情交易者普遍预期资产价值处于高价位, 即 $\theta_t > 0.5$ 时, 卖价与 v_t^E 的距离小于买价与 v_t^E 的距离. 这是因为, 随 θ_t 增加, 限价买单的执行概率减小, 而限价卖单的执行概率增大, 与卖家相比, 买家要求与 v_t^E 更大的距离以获得较高的预期收益.

下面给出此时非知情交易者认为资产价值在

高价位的比例 θ_t 的更新过程.

推论 2 当满足定理 1 的条件时, θ_t 的更新过程为

$$\theta_{t+1} = \begin{cases} \theta_{t+1}^+ = \frac{1 + \pi\theta_t}{2\lambda_{BM}}, O_{t+1} = BMO \\ \theta_{t+1}^- = \frac{1 - \pi\theta_t}{2\lambda_{SM}}, O_{t+1} = SMO \\ \theta_t, O_{t+1} = SLO, \text{ 或 } BLO \end{cases} \quad (6)$$

证明 由定理 1 的证明过程易得.

由推论 2 易得 $\theta_{t+1}^+ > \theta_t$ 和 $\theta_{t+1}^- < \theta_t$, 这是因为知情交易者只在资产价值为高价位 v^H 时才提交市价买指令, 在资产价值为低价位 v^L 时提交市价卖指令. 因此 $t + 1$ 时的市价买指令有可能是知情交易者观察到资产价值处在高价位 v^H 时的市价指令, 此时非知情交易者在更新 θ_t 时, 认为资产价值处在高价位的比例增加; 同理, 若 $O_{t+1} = SMO$, θ_t 减小; 因为知情交易者不提交限价指令, 所以 $O_{t+1} = SLO$ 或 BLO 时, 非知情交易者对资产价值的预期不变, 即 $\theta_{t+1} = \theta_t$.

由定理 1 中给出的交易者的最优限价指令价格易得价差^⑩.

推论 3 当满足定理 1 的条件时, 可得价差 S_1 , 且 S_1 在 $\theta_t = \theta_1(L)$ 或 $\theta_t = \bar{\theta}^1(L)$ 处达到最小; 在 $\theta_t = 0.5$ 处达到最大, 此时价差为

$$S_1 = \frac{\lambda_{BM}\lambda_{SM}}{H_1} [(v^L + L) - (v^H - L)] + \frac{1}{H_1}\pi\theta_t(1 - \theta_t)(v^H - v^L) \quad (7)$$

$$S_1 |_{\theta_t=0.5} = \frac{1}{3} [(v^L + L) - (v^H - L)] + \frac{\pi}{3}(v^H - v^L) \quad (8)$$

证明 见附录.

当满足定理 1 的条件时, S_1 自然大于 0. 与交易者的最优限价指令价格类似, S_1 由两部分组成: 交易者保留价值的差别和逆向选择的影响. 由式(7)可得, S_1 与非知情交易者对资产的私人评

价 L 成正比, 与资产价值的波动 $(v^H - v^L)$ ^⑪ 成反比, 并与非知情交易者对资产价值的预期 θ_t 有关.

当 $\theta_t = 0.5$ 时, 市场上的非知情交易者认为资产价值处在高价位 v^H 和低价位 v^L 的人数各占一半, $t + 1$ 时进入市场的交易者类型的不确定性达到最大, 同时非知情交易者对 $t + 1$ 时资产价值预期的不确定性达到最大. 此时, 限价指令交易者面临的不执行风险以及逆向选择风险达到最大, 因此限价指令交易者要求的风险补偿最大, 价差最大.

由定理 1 可知, 只有当 θ_t 满足一定范围时, 交易者才按照给定的交易策略选择提交的指令类型以及价格. 当 θ_t 不满足该范围时, 交易者的交易策略发生改变. 由定理 1 的证明过程可知, 当 θ_t 大于 $\bar{\theta}^1(L)$ 时, $v^H - L$ 类卖家的效用比较公式不再成立, 即该卖家选择在 $B_0^*(v_i^E, v^H + L)$ 处提交限价指令的效用大于在 $B_0^*(v_i^E, v^L + L)$ 处的效用, 因此假设 $v^H - L$ 类卖家提交的限价指令价格为 $B_0^*(v_i^E, v^H + L)$, 而 $v^L - L$ 类卖家的限价指令价格仍为 $B_0^*(v_i^E, v^L + L)$, 买家的限价指令价格仍为 $A_0^*(v_i^E, v^H - L)$. 根据此时交易者的限价指令价格可以得到各类交易者的最优交易策略. 因为定理 1 假设限价指令价格都在资产价值的低价位 v^L 和高价位 v^H 之间变动, 因此 $v^H - L$ 类卖家的限价指令价格需满足 $A_i^*(v_i^E, v^H - L) < v^H$, 这与求解得到的 $v^H - L$ 类卖家的限价指令价格矛盾^⑫. 因此, 此时不能得到交易者的最优交易策略.

下面放宽此假设, 考虑 $v^H - L$ 类卖家提交的限价指令价格 $B_0^*(v_i^E, v^H + L)$ 大于资产价值的高价位 v^H 时, 交易者的最优交易策略. 因为资产的真实价值为 v^L 或 v^H , 而知情交易者进入市场时能观察到资产的真实价值, 因此知情交易者将不再提交市价买指令, 知情交易者被挤出市场. 知情交易者只在观察到资产的真实价值为 v^L 时, 才提交市价卖指令, 其余情况下知情交易者选择不交易. 设 $v^L - L$ 类卖家的限价指令价格仍为 $B_0^*(v_i^E, v^L + L)$, 且 $B_0^*(v_i^E, v^L + L) < v^H$, 买家的限价指令

⑩ 因为假设限价指令只存在一期, 该模型中任何时刻市场上都不会同时存在限价卖指令和限价买指令, Handa 等^[17] 称这种报价为 shadow quotes. 此时, 价差衡量非知情交易者报价的最小距离.

⑪ 对 S_1 整理可得: $S_1 = 2 \frac{\lambda_{BM}\lambda_{SM}}{H_1}L + \frac{1}{H_1}((\pi - \pi^2)\theta_t(1 - \theta_t) - \frac{1 - \pi^2}{4})(v^H - v^L)$, 其中 $v^H - v^L$ 的系数小于 0.

⑫ 求解可得 $(1 - \lambda\lambda_{SM})A_i^*(v_i^E, v^H - L) = (1 - \lambda\lambda_{SM})(v^H + L) + \lambda_{SM}(1 - \lambda)(v^H - L) + (1 - \lambda_{SM})\pi\theta_t(1 - \theta_t)(v^H - v^L)$, 所以矛盾.

价格仍为 $A_0^*(v_i^E, v^H - L)$. 类似于定理 1 的方法可以求得此时交易者的最优交易策略.

定理 2 当 $L_2(\theta_i) < L < \bar{L}^2(\theta_i)$ 时, 存在 θ_i 的区间 $(\underline{\theta}_2(L), \bar{\theta}^2(L))$, 使得非知情交易者的预期在此区间内时, 交易者的最优限价指令价格及其执行概率为

$$A_i^*(v_i^E, v^H - L) = B_0^*(v_i^E, v^H + L) = \phi_2(v^H + L) + (1 - \phi_2)(v^H - L) + \frac{1}{H_2}\pi\theta_i(1 - \theta_i)(v^H - v^L)$$

$$Pr(O_{i+1} = BMO | A_i^*(v_i^E, v^H - L)) = \lambda_1$$

$$A_i^*(v_i^E, v^L - L) = B_0^*(v_i^E, v^L + L) = \phi_3(v^L + L) + \phi_4(v^H - L) + (1 - \phi_3 - \phi_4)(v^H + L) + \frac{1}{H_2}\pi\theta_i(1 - \theta_i)(v^H - v^L) \quad (9)$$

$$Pr(O_{i+1} = BMO | A_i^*(v_i^E, v^L - L)) = \lambda_{BM}$$

$$B_i^*(v_i^E, R_i) = A_0^*(v_i^E, v^H - L) = \varphi_2(v^H - L) + (1 - \varphi_2)(v^H + L) + \frac{1}{H_2}\pi\theta_i(1 - \theta_i)(v^H - v^L)$$

$$Pr(O_{i+1} = SMO | B_i^*(v_i^E, R_i)) = \lambda_{SM}$$

其中 $H_2 = 1 - \lambda_1\lambda_{SM}$, $\lambda_1 = \frac{1 - \pi}{2}\theta_i$, 其中 $\phi_2, \phi_3, \phi_4, \varphi_2, L_2(\theta_i)$ 和 $\bar{L}^2(\theta_i)$ 的表达式见附录.

证明 类似定理 1 证明可得.

此时交易者的限价指令价格仍由交易者保留价值的加权平均和由逆向选择引起的风险溢价两部分组成.

类似推论 2 可得, 此时 θ_i 的更新过程.

推论 4 当满足定理 2 的条件时, θ_i 的更新过程为

$$\theta_{i+1} = \begin{cases} \theta_{i+1}^+ = \frac{1 + \pi}{2\lambda_{BM}}\theta_i, O_{i+1} = BMO(A_i^*(v_i^E, v^L - L) = B_0^*(v_i^E, v^L + L)) \\ \theta_{i+1}^- = \frac{1 - \pi}{2\lambda_{SM}}\theta_i, O_{i+1} = SMO \\ \theta_i, O_{i+1} = SLO, \text{ 或 } BLO, \text{ 或 } BMO(A_i^*(v_i^E, v^H - L) = B_0^*(v_i^E, v^H + L)) \end{cases} \quad (10)$$

证明 由定理 2 的证明过程易得.

值得注意的是, 由于 $v^H - L$ 类卖家提交的限价指令价格大于 v^H , 此时知情交易者不提交市价

买指令, 因此在 $B_0^*(v_i^E, v^H + L)$ 处的限价卖指令得到执行时, 此交易不含有资产价值的任何信息, 故非知情交易者对资产价值的预期不变, 即 $\theta_{i+1} = \theta_i$. 只有在 $B_0^*(v_i^E, v^L + L)$ 上提交的限价卖指令得到执行时, 非知情交易者才更新 θ_i , 此时 $\theta_{i+1}^+ > \theta_i$. 当 t 时的限价买指令得到执行, 即 $O_{i+1} = SMO$ 时 $\theta_{i+1}^- < \theta_i$.

类似于推论 3 可得此时的价差. 不同的是, 由于保留价值不同的卖家选择的限价指令价格不同, 该价差不仅与 θ_i, L 以及 $v^H - v^L$ 有关, 还与到达市场的卖交易者的类型有关. 同样的分析方法可得, 当 θ_i 小于 $\underline{\theta}_1(L)$ 时, 非知情交易者的最优交易策略以及非知情交易者对资产价值预期的更新过程.

由上述定理可知, 非知情交易者对资产价值的预期分歧最大 ($\theta_i = 0.5$) 时, 非知情交易者的报价关于 v_i^E 对称. 当预期分歧继续减小, 且 θ_i 大于 $\bar{\theta}^1(L)$ (小于 $\underline{\theta}_1(L)$) 时, 不同类型的非知情卖家(买家)提交的限价指令不同; 且保留价值大的卖家(保留价值小的买家)提交的限价指令的价格高于资产的高价位(低于资产的低价位)时, 知情交易者被挤出市场. 综上可得, 当非知情交易者对资产价值的预期分歧较小时, 知情交易者的市价指令策略.

推论 5 当非知情交易者普遍预期资产处于高(低)价位, 非知情卖(买)家的限价指令价格高(低)于资产高(低)价位时, 知情交易者不提交市价卖(买)指令.

类似可得, 在低、混合执行概率均衡时, 非知情交易者对资产价值的预期分歧减小时, 知情交易者的市价指令策略.

上面的分析刻画了交易者提交的限价指令的执行概率较大时, 交易者的最优交易策略. 下面给出当交易者的私人估值 L 满足限价指令低执行概率条件时, 交易者的最优交易策略. 类似定理 1 的分析方法, 首先给出非知情交易者对资产价值的预期在 $\theta_i = 0.5$ 附近波动, 且交易者提交的限价指令价格在 $[v^L, v^H]$ 内时, 交易者的最优交易策略.

定理 3 当 $L_3(\theta_i) < L < \bar{L}^3(\theta_i)$ 时, 存在 θ_i 的区间 $(\underline{\theta}_3(L), \bar{\theta}^3(L))$, 使得非知情交易者的预

期在此区间内时,交易者的最优限价指令价格及其执行概率为

$$\begin{aligned}
A_i^*(v_i^E, R_i) &= B_0^*(v_i^E, v^H + L) = \phi_5(v^H + L) + \\
&(1 - \phi_5)(v^L - L) + \frac{1 - \mu}{H_3} \pi \theta_i (1 - \theta_i)(v^H - v^L) \\
Pr(O_{i+1} = BMO | A_i^*(v_i^E, R_i)) &= \lambda \\
B_i^*(v_i^E, R_i) &= A_0^*(v_i^E, v^L - L) = \varphi_5(v^L - L) + \\
&(1 - \varphi_5)(v^H + L) - \frac{1 - \lambda}{H_3} \pi \theta_i (1 - \theta_i)(v^H - v^L) \\
Pr(O_{i+1} = SMO | B_i^*(v_i^E, R_i)) &= \mu
\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $H_3 = 1 - \lambda\mu$ 其中 $\phi_5, \varphi_5, L_3(\theta_i)$ 和 $\bar{L}^3(\theta_i)$ 的表达式见附录.

证明 见附录.

当满足定理 3 的条件时,非知情交易者选择执行概率较低的价格提交限价指令的效用大于选择执行概率较高的价格提交限价指令的效用,因此非知情交易者选择在执行概率较低的价格上提交限价指令. 此时, $v^H - L$ 类卖家以及 $v^L + L$ 类买家在低执行概率价位上提交市价指令的效用小于限价指令的效用,所以这两类交易者进入市场时只提交限价指令. 与定理 1 相比,此时限价指令的成交概率相对较低.

与定理 1 类似,此时交易者的限价指令价格由交易者的保留价值和由逆向选择引起的风险溢价两部分组成. 不同的是,非知情交易者在确定限价指令价格时,考虑的是 $v^L - L$ 类卖家以及 $v^H + L$ 类买家的保留价值的加权平均: $k(v^H + L) + (1 - k)(v^L - L)$ ($k = \phi_5$ 或 $1 - \varphi_5$). 由于该均衡中非知情交易者提交市价指令的概率减小,而知情交易者提交市价指令的概率不变,下一时刻的市价指令更有可能来自知情交易者^⑩. 此时非知情交易者面临的逆向选择风险增大,与定理 1 相比,限价指令价格中风险溢价部分增大. 此外,随预期增加,买卖报价增大. 在预期分歧最大时,报价关于 v_i^E 对称;随预期分歧减小, θ_i 变化方向的报价与 v_i^E 的距离更小.

由定理 3 的证明过程可得 θ_i 的更新过程.

推论 6 当满足定理 3 的条件时, θ_i 的更新过程为

$$\theta_{i+1} = \begin{cases} \theta_{i+1}^+ = \frac{\pi + (1 - \pi)\theta_i/2}{\lambda} \theta_i, O_{i+1} = BMO \\ \theta_{i+1}^- = \frac{(1 - \pi)(1 - \theta_i)}{2\mu} \theta_i, O_{i+1} = SMO \\ \theta_i, O_{i+1} = SLO, \text{ 或 } BLO \end{cases} \tag{12}$$

证明 略.

由推论 6 易得 $\theta_{i+1}^+ > \theta_i$ 和 $\theta_{i+1}^- < \theta_i$. 值得注意的是,在该均衡下,因为市价指令由知情交易者提交的概率增加,相比于高执行概率均衡, θ_i 的变化幅度增大.

由定理 3 可得此时的价差 S_3 的表达式

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{1 - \lambda - \mu + \lambda\mu}{H_3} [(v^H + L) - (v^L - L)] + \\
&\frac{2 - \lambda - \mu}{H_3} \pi \theta_i (1 - \theta_i)(v^H - v^L)
\end{aligned}$$

由概率均衡,此时的价差增大. S_3 的表达式可知, S_3 和 L 以及 $v^H - v^L$ 成正比. 此外,在该均衡下,限价指令价格中保留价差和风险溢价部分增大,相比于高执行概率均衡,此时的价差增大.

类似于定理 1 的分析可得当非知情交易者对资产价值的预期超出区间 $(\theta_3(L), \bar{\theta}^3(L))$ 时,非知情交易者的最优交易策略以及 θ_i 的更新过程. 囿于篇幅原因,本文在此不再详细阐述.

上面的分析刻画了非知情交易者的私人评价 L 满足低执行概率均衡条件时,交易者的最优交易策略. 下面考虑介于高执行概率均衡以及低执行概率均衡之间的第三种情况——混合执行概率均衡.

由命题 1 中的 3) 可知, $v^H + L$ 类买家愿意为即时交易付出的成本大于 $v^L + L$ 类买家的. 因此,在提交的限价卖指令价格以及指令簿上的限价卖指令价格相同时,与 $v^L + L$ 类买家相比, $v^H + L$ 类买家能获取更高的收益,因此 $v^H + L$ 类买家有更强烈的交易意愿,该类交易者在提交限价指令时

^⑩ 以市价指令为例,非知情交易者提交市价指令的概率由高执行概率均衡时的 $(1 - \pi)/2$ 减小到此均衡时的 $(1 - \pi)\theta_i/2$,但两种均衡中知情交易者提交市价指令的概率都为 $\pi\theta_i$,因此下一时刻的市价指令来自知情交易者的概率增大.

期望获得更高的执行概率. 同理, 与 $v^H - L$ 类卖家相比, $v^L - L$ 类卖家有更强烈的交易意愿, 该类交易者在提交限价指令时, 也期望获得更高的执行概率.

下面考虑介于高执行概率均衡以及低执行概率均衡之间的第三种情况——混合执行概率均衡: 交易意愿更强烈的交易者选择在执行概率较高的价格上提交限价指令, 即 $v^H + L$ 类买家选择在 $A_0^*(v_i^E, v^H - L)$ 上提交限价指令, $v^L - L$ 类卖家选择在 $B_0^*(v_i^E, v^L + L)$ 上提交限价指令; 而交易意愿不强烈的交易者选择在执行概率较低的价格上提交限价指令, 即 $v^L + L$ 类买家选择在 $A_0^*(v_i^E, v^L - L)$ 上提交限价指令, $v^H - L$ 类卖家选择在 $B_0^*(v_i^E, v^H + L)$ 上提交限价指令. 根据每类交易者提交的限价指令价格可得各类交易者的最优交易策略. 首先假设交易者提交的限价指令价格都在 $[v^L, v^H]$ 内, 求解可得条件 $B_i^*(v_i^E, v^L + L) > v^L$ 和 $A_i^*(v_i^E, v^H - L) < v^H$ 不能同时满足, 因此此时交易者的最优交易策略不存在. 放宽此假设, 令 $B_i^*(v_i^E, v^L + L) < v^L$ 以及 $A_i^*(v_i^E, v^H - L) > v^H$, 即交易意愿不强烈的交易者选择的限价指令价格在资产真实价值之外. 当该类限价指令在指令簿上时, 知情交易者不再提交市价指令. 类似于定理 1 的求解方法, 可得此时交易者的最优交易策略.

定理 4 当 $\underline{L}_4(\theta_t) < L < \bar{L}_4(\theta_t)$ 时, 存在 θ_t 的区间 $(\underline{\theta}_4(L), \bar{\theta}_4(L))$, 使得非知情交易者的预期在此区间内时, 交易者的最优限价指令价格及其执行概率为

$$\begin{aligned} A_i^*(v_i^E, v^H - L) &= B_0^*(v_i^E, v^H + L) = \phi_6(v^H + L) + \\ & (1 - \phi_6)(v^H - L) + \frac{1}{H_4}\pi\theta_t(1 - \theta_t)(v^H - v^L) \\ Pr(O_{t+1} = BMO | A_i^*(v_i^E, v^H - L)) &= \lambda_1 \\ B_i^*(v_i^E, v^H + L) &= A_0^*(v_i^E, v^H - L) = \varphi_6(v^H - L) + \\ & (1 - \varphi_6)(v^H + L) + \frac{\lambda_1}{H_4}\pi\theta_t(1 - \theta_t)(v^H - v^L) \\ Pr(O_{t+1} = SMO | B_i^*(v_i^E, v^H + L)) &= \lambda_{SM} \\ A_i^*(v_i^E, v^L - L) &= B_0^*(v_i^E, v^L + L) = \phi_7(v^L + L) + \\ & (1 - \phi_7)(v^L - L) - \frac{\mu_1}{H_5}\pi\theta_t(1 - \theta_t)(v^H - v^L) \\ Pr(O_{t+1} = BMO | A_i^*(v_i^E, v^L - L)) &= \lambda_{BM} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_i^*(v_i^E, v^L + L) &= A_0^*(v_i^E, v^L - L) = \varphi_7(v^L - L) + \\ & (1 - \varphi_7)(v^L + L) - \frac{1}{H_5}\pi\theta_t(1 - \theta_t)(v^H - v^L) \\ Pr(O_{t+1} = SMO | B_i^*(v_i^E, v^L + L)) &= \mu_1 \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $H_4 = H_2 = 1 - \lambda_1\lambda_{SM}$, $\mu_1 = \frac{1 - \pi}{2}(1 - \theta_t)$, $H_5 = 1 - \mu_1\lambda_{BM}$, 其中, $\phi_6, \varphi_6, \phi_7, \varphi_7, \underline{L}_4(\theta_t)$ 和 $\bar{L}_4(\theta_t)$ 的表达式见附录.

证明 类似定理 1 证明可得.

当满足定理 4 的条件时, 交易意愿强烈的交易者在执行概率较高的价格上的限价指令的效用大于在执行概率较低的价格上的限价指令的效用; 交易意愿不强烈的交易者在执行概率较低的价格上的限价指令的效用大于在执行概率较高的价格上的限价指令的效用. 该均衡下, 限价指令的执行概率介于高执行概率与低执行概率之间.

与前面的结果类似, 此时交易者的限价指令价格由交易者的保留价值的加权平均和由逆向选择引起的风险溢价两部分组成. 不同的是, 不同类型的交易者在确定限价指令价格时考虑的交易者的保留价值不同.

下面给出此时 θ_t 的更新过程.

推论 7 当满足定理 4 的条件时, θ_t 的更新过程为

$$\begin{cases} \theta_{t+1}^+ = \frac{1 + \pi}{2\lambda_{BM}}\theta_t, \\ O_{t+1} = BMO(A_i^*(v_i^E, v^L - L) = B_0^*(v_i^E, v^L + L)) \\ \theta_{t+1}^- = \frac{1 - \pi}{2\lambda_{SM}}\theta_t, \\ O_{t+1} = SMO(B_i^*(v_i^E, v^H + L) = A_0^*(v_i^E, v^H - L)) \\ \theta_t, O_{t+1} = SLO, \text{ 或 } BLO, \\ \text{或 } BMO(A_i^*(v_i^E, v^H - L) = B_0^*(v_i^E, v^H + L)), \\ \text{或 } SMO(B_i^*(v_i^E, v^L + L) = A_0^*(v_i^E, v^L - L)) \end{cases} \quad (14)$$

证明 略

值得注意的是, 此时的市价买指令或卖指令都有可能来自知情交易者, 非知情交易者需根据市价指令的成交价格决定是否更新 θ_t . 因为非知情交易者只在执行概率较高的限价指令成交后才更新 θ_t , 因此此时 θ_t 的变化幅度与高执行概率均

衡时一致.

易得 此时的价差为

推论 8 当满足定理 4 的条件时, 价差为

$$\begin{aligned}
S_{41} &= 2(\phi_7 + \varphi_6 - 1)L - (v^H - v^L) - \\
&\quad \left(\frac{\lambda_1}{H_4} + \frac{\mu_1}{H_5}\right) \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \\
S_{42} &= 2(\phi_7 + \varphi_7 - 1)L + \left(\frac{1}{H_5} - \frac{\mu_1}{H_5}\right) \times \\
&\quad \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \\
S_{43} &= 2(\phi_6 + \varphi_6 - 1)L + \left(\frac{1}{H_4} - \frac{\lambda_1}{H_4}\right) \times \\
&\quad \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \\
S_{44} &= 2(\phi_6 + \varphi_7 - 1)L + (v^H - v^L) + \\
&\quad \left(\frac{1}{H_4} + \frac{1}{H_5}\right) \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L)
\end{aligned} \tag{15}$$

证明 由定理 4 易得.

值得注意的是, S_{41} 并不一定大于 0, 他和资产价值波动成反比. 这是因为此时的 $A_i^*(v_i^E, v^L - L)$ 和 $B_i^*(v_i^E, v^H + L)$ 是交易意愿强烈的卖家和买家实现收益最大化的最优报价. 当资产价

值波动较大时, 交易意愿强烈的卖家和买家会提交更加积极的限价指令以确保限价指令能够执行. 因此, S_{41} 和资产价值波动成反比. 其他三个价差与上面分析类似, 与非知情交易者的私人评价 L 和资产价值的波动 $(v^H - v^L)$ 成正比.

类似的, 可得非知情交易者对资产价值的预期超出范围 $(\theta_4(L), \bar{\theta}^4(L))$ 时, 交易者的最优交易策略以及 θ_i 的更新过程.

综上可得, 高、低、混合执行概率均衡中, 非知情交易者的最优交易策略以及 θ_i 的更新过程. 上述定理中 L 的范围是 $(v^H - v^L)$ 的函数, 因此给定资产价值波动, 可得非知情交易者基于私人估值以及非知情交易者对资产价值预期的动态最优交易策略, 如图 2 所示. 由图 2 可以看出, 给定资产价值波动, 在非知情交易者对资产价值预期 $\theta_i = 0.5$ 的邻域内, 高、低、混合执行概率均衡中私人估值的范围满足 $L_3(\theta_i) < \bar{L}^3(\theta_i) < L_4(\theta_i) < \bar{L}^4(\theta_i) < L_1(\theta_i) < \bar{L}^1(\theta_i)$, 即交易者私人估值的差距较大时, 非知情交易者选择高执行概率均衡的交易策略, 交易者私人估值的差距较小时, 非知

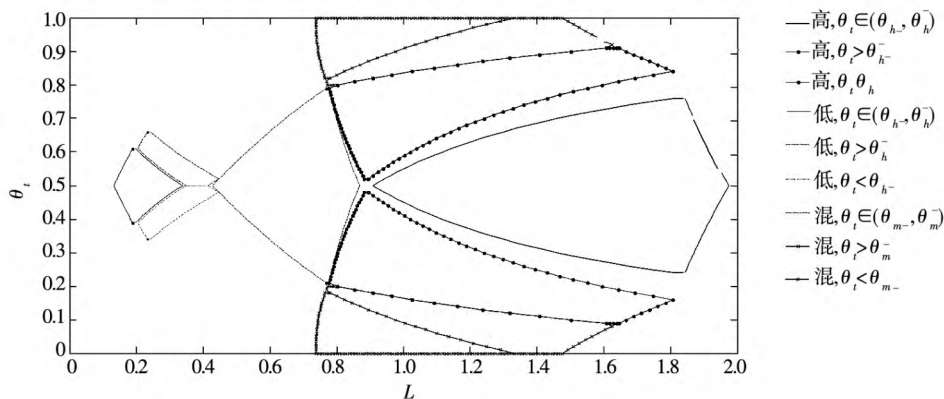


图 2 交易者最优交易策略²⁰⁾

Fig. 2 The optimal trading strategies of traders

²⁰⁾ 模型参数: $v^H = 1.5, v^L = 1, \pi = 0.05$. 图例中的高表示高执行概率均衡 $\theta_i \in (\theta_{h-}, \theta_{h-})$ 等价于定理 1 中的 $\theta_i \in (\theta_1(L), \bar{\theta}^1(L))$, $\theta_i > \theta_{h-}$ 对应 $\theta_i > \theta_2(L)$, $\theta_i < \theta_{h-}$ 对应 $\theta_i < \theta_1(L)$. 同理, 混、低分别表示混合、低执行概率均衡, 此时 θ_i 范围的意义与高执行概率均衡时类似. 值得注意的是, 在混合执行概率均衡中, 当 $\theta_i > \bar{\theta}^4(L)$ 时, 根据 θ_i 的不同取值可以得到 $B_0^*(v_i^E, v^H + L) > v^H$ 及 $B_0^*(v_i^E, v^H + L) < v^H$ 时交易者的最优策略, 在图 3 中都用 $\theta_i > \theta_m^-$ 表示; 类似的, 当 $\theta_i < \theta_4(L)$ 时, 交易者最优策略的 θ_i 的范围都用 $\theta_i < \theta_m^-$ 表示.

情交易者选择低执行概率均衡的交易策略,这与 Hollifield 等^[18]的研究结果一致. 类似的,给定私人估值,可得非知情交易者基于资产价值波动以及非知情交易者对资产价值预期的最优策略. 随 $(v^H - v^L)$ 的减小,市场先后进入低、混合及高执行概率均衡. 值得注意的是,在给定私人估值以及资产价值波动时,存在 θ_i 的区间使得交易者的最优交易策略不存在. 此时,市场不能达到均衡状态.

3 市场流动性分析

本节运用静态比较分析法给出高、低执行概率均衡下,在 $\theta_i = 0.5$ 的邻域内时,交易者的私人估值、资产价值波动以及知情交易者比例对市场流动性的影响. 市场流动性由价差、限价指令成交概率以及限价指令积极性指标度量^[28]. 首先给出价差在各均衡内以及均衡之间转化时与私人估值和资产价值波动之间的关系.

3.1 价差分析

性质1 给定资产价值波动,私人估值减小使得市场由高执行概率均衡变为低执行概率均衡时,价差增加^①;在高、低执行概率均衡市场中,私人估值增加,价差增加. 首先,当私人估值 L 由 $(L_1(\theta_i), \bar{L}^1(\theta_i))$ 减小到 $(L_3(\theta_i), \bar{L}^3(\theta_i))$,交易者的交易策略改变,市场均衡由高执行概率均衡变为低执行概率均衡时,价差增加. 这是因为, L 减小,非知情交易者限价单的预期效用减小,交易者将提交积极性更差的限价单,以要求更高的收益,因此价差增大. Hollifield 等^[18]认为:交易者私人估值的差距较大时,交易者倾向于提交低执行风险的指令;交易者私人估值差距不大时,交易者倾向于提交高执行风险的指令. 低风险时交易者要求更低的风险溢价,反映为低价差;高风险时交易者要求更高的溢价,反映为高价差. 这与本文的研究结果一致. 其次,当私人估值 L 在区间 $(L_1(\theta_i), \bar{L}^1(\theta_i))$ 或 $(L_3(\theta_i), \bar{L}^3(\theta_i))$ 内变动,市

场分别处于高、低执行概率均衡时,价差和 L 成正比. 该结论可由价差 S_3 和 S_1 的表达式中 L 的系数为正而得. 这一结论在以往文献中尚未发现. 这说明价差与当前的市场状态有关,在研究私人估值对价差的影响时,需考虑市场是否处于均衡状态.

同理可得,给定私人估值时,价差与资产价值波动的关系.

性质2 给定私人估值,资产价值波动增加使得市场由高执行概率均衡变为低执行概率均衡时,价差增加;在高执行概率均衡市场中,资产价值波动增加,价差减小;而在低执行概率均衡市场中,资产价值波动增加,价差增加.

由各定理中私人估值 L 的表达式可知,给定 L ,随资产价值波动增大,市场由高执行概率均衡变为低执行概率均衡,价差增大. 这与 Foucault^[3,20] 和 Stoll^[29] 的研究结果一致. 在高执行概率均衡市场中,由 S_1 可知,价差与资产价值波动负相关;而在低执行概率均衡市场中,由 S_3 可知,价差与资产价值波动正相关. 这与 Foucault^[3] 的研究结果一致. 上述文献都是基于对称信息的框架,本文在非对称信息的框架下给出了该结论的理论分析. 研究表明,资产价值波动对价差的影响,与市场的均衡状态有关. 实证研究中,需对市场均衡状态加以控制.

性质3 给定私人估值和资产价值波动,高执行概率均衡市场中,价差与知情交易者比例正相关;低执行概率均衡市场中,价差与知情交易者的比例负相关.

由图3可以看出,给定私人估值和资产价值波动,高执行概率均衡的价差 S_1 随知情交易者比例 π 的增加而增加;低执行概率均衡的价差 S_3 随知情交易者比例 π 的增加而减小. 此外,若市场处于高执行概率均衡,市场流动性较好;反之,若市场处于低执行概率均衡,市场流动性较差. 用知情交易者比例度量知情交易强度(Rosu^[12]),则

① 文中的高、低、混合执行概率均衡不能同时存在,因此不同均衡之间的市场特征不能互相比较,但可将不同均衡时的市场特征看作除变化参数之外其余参数都相同的不同市场之间的比较,例如当 L 由区间 $(L_1(\theta_i), \bar{L}^1(\theta_i))$ 减小到 $(L_3(\theta_i), \bar{L}^3(\theta_i))$,市场由高执行概率均衡变为低执行概率均衡时价差的比较,可以看做其余参数都相同,而 L 分别在 $(L_1(\theta_i), \bar{L}^1(\theta_i))$ 以及 $(L_3(\theta_i), \bar{L}^3(\theta_i))$ 内的两个不同市场之间的价差比较.

该结论与张强等^[19]的“高流动性市场中,价差与知情交易强度正相关;低流动性市场中,价差与知情交易强度负相关”的结论一致. 本文为该实证结论提供了理论解释. 同时,两个价差都在 $\theta_i = 0.5$ 处,即非知情交易者对资产价值预期的不确

定性最大时达到最大. 此外, S_3 大于 S_1 , 这是因为低执行概率均衡时,限价指令交易者提交积极性较差的限价指令,以获得更高的收益,因此价差更大.

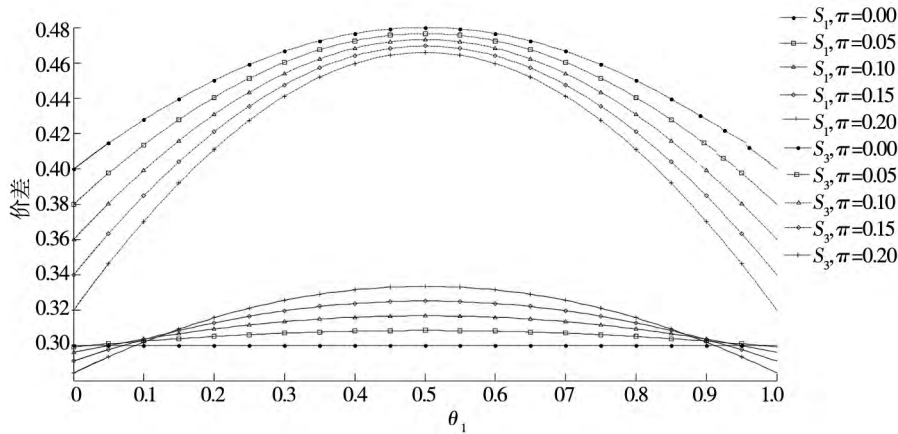


图3 不同知情交易者比例下的价差^②

Fig. 3 The impact of the proportion of informed traders on spread

如上文所述,价差由保留价差和逆向选择价差两部分组成. 知情交易者对两部分价差的影响如下:一方面,随知情交易者比例增加,非知情交易者面临的逆向选择风险增大,逆向选择价差增大;另一方面,随知情交易者比例增加,知情交易增加的同时向市场传递了更多关于资产价值的信息,加速了资产真实价值揭示的速率,非知情交易者对资产价值的预期更加精确,非知情交易者面临的不确定性风险减少,从而要求更低的保留价差.

知情交易者比例对两部分价差的影响如图4所示. 由图4可知,逆向选择价差与知情交易者比例正相关,且不同均衡时,知情交易者比例对两逆向选择价差的影响不大;保留价差与知情交易者比例负相关,但高执行概率均衡中知情交易者比例对保留价差的影响较小,而低执行概率均衡中,随知情交易者比例增加,保留价差迅速减小. 因此,高执行概率均衡中,知情交易者比例增加,逆向选择价差增加的幅度大于保留价差减小的幅度, S_1 增加;低执行概率均衡中,保留价差减小的幅度大于逆向选择价差增加的幅度, S_3 减小. Rosu^[12]发现知情交易能够改

善市场流动性. 这与本文低执行概率均衡市场中的结论一致,但其结论与市场均衡状态无关. 此外,本文在高执行概率均衡市场中发现知情交易抑制市场流动性,且不同均衡状态下,知情交易对价差的影响不同,该结论在以往理论文献中尚未得到.

3.2 指令流构成分析

下面给出交易者的私人估值或资产价值波动的变化,导致市场均衡发生变化时,不同市场均衡之间指令流构成的变化.

性质4 给定私人估值,资产价值波动增加,指令流中限价指令的比例增加,限价指令的成交概率减小.

给定私人估值 L , 随资产价值波动增加,市场均衡由高执行概率均衡变为低执行概率均衡. 虽然非知情交易者提交限价指令的概率不变(当指令簿中没有限价指令时,限价指令的提交概率都为 $(1 - \pi) / 2$),但交易者提交买(卖)市价指令的概率由 $\lambda_{BM}(\lambda_{SM})$ 减小为 $\lambda(\mu)$, 因此指令流中限价指令的比例增加,即限价指令的比例和资产价值的波动成正比. 这与其他学者的研究结果一致,如 Handa 和

^② 模型参数: $v^H = 1.5, v^L = 1$. S_1 表示高执行概率均衡即定理1的价差, S_3 表示低执行概率均衡即定理3的价差,因为混合执行概率均衡时价差有两个,所以在此不计算混合执行概率均衡时的价差. 此外, S_1 以及 S_3 都是在 $\theta_i = 0.5$ 的邻域内时的价差,图中给出 θ_i 在区间 $(0, 1)$ 内的价差,以更好的展示价差的变化趋势.

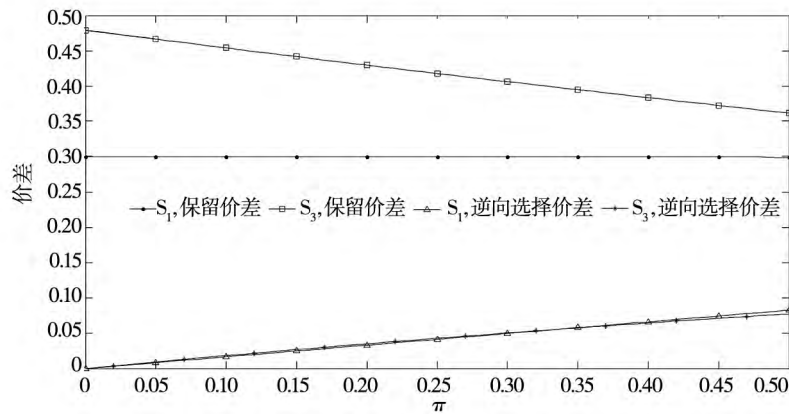


图 4 不同知情交易者比例下价差的分解^②

Fig. 4 The impact of the proportion of informed traders on the decomposition of spread

Schwartz^[30]、Foucault^[3]、Ahn 等^[31]、Rinaldo^[32]、Hall 和 Hautsch^[33] 以及 Goettler 等^[10]。这是因为,限价指令交易者要求的风险溢价 $\pi\theta_i(1-\theta_i)(v^H-v^L)$ 与资产价值波动成正比。若资产价值波动增加,限价指令交易者要求的风险溢价增加,市价指令交易者的成本增加,因此有更多的市价指令交易者选择提交限价指令或退出市场,即指令流中限价指令的比例增加。

因为交易者提交的限价指令价格为下一时刻进入市场的对手方交易者的最优临界价格,所以只要对手方交易者进入市场,限价指令即可成交。随资产价值波动增加,限价指令的提交概率不变而市价指令的提交概率减小,因此,限价指令成交概率减小。这与 Foucault^[3] 的研究结果一致。

同理可得,给定资产价值波动,私人估值的变化对指令流构成的影响。

性质 5 给定资产价值波动,私人估值增加,指令流中限价指令的比例减小,限价指令的成交概率增加。

给定资产价值波动,私人估值增加使得市场由高执行概率均衡变为低执行概率均衡。由性质 4 可得,此时指令流中限价指令的比例增加,且对手方交易者进入市场提交市价指令的概率增加,即指令流中限价指令的比例和私人估值成反比,限价指令的成交概率与私人估值成正比。这与 Bayar^[34] 的研究结果一致,但其研究框架为对称信息下。本文从非

对称信息的角度,进一步验证了该结论的正确性。

3.3 指令积极性分析

下面给出资产价值波动及私人估值对限价指令积极性的影响。

性质 6 给定私人估值,资产价值波动引起市场均衡变化时,限价指令积极性随资产价值波动的增加而变差;高执行概率均衡市场中,资产价值波动越大,限价指令积极性越好;低执行概率均衡市场中,资产价值波动越大,限价指令积极性越差。

给定私人估值 L ,若资产价值波动增大,市场均衡由高执行概率均衡变为低执行概率均衡时,限价指令交易者提交的限价买价由 $A_0^*(v_i^E, v^H - L)$ 减小为 $A_0^*(v_i^E, v^L - L)$,限价卖价由 $B_0^*(v_i^E, v^L + L)$ 增大为 $B_0^*(v_i^E, v^H + L)$,限价指令积极性变差,即限价指令积极性与资产价值波动的变化正相关。高执行概率均衡市场中,限价买价中资产价值波动的系数 $\lambda_{SM}(1-\pi\theta_i(1-\theta_i))/H_1$ 大于 0,限价卖价中资产价值波动的系数 $\lambda_{BM}(\pi\theta_i(1-\theta_i)-1)/H_1$ 小于 0,即资产价值波动性越大,限价指令积极性越好。低执行概率均衡市场中,限价买价中资产价值波动的系数 $-(1-\lambda)(1+\pi\theta_i(1-\theta_i))/H_3$ 小于 0,限价卖价中资产价值波动的系数 $(1-\mu)(1+\pi\theta_i(1-\theta_i))/H_3$ 大于 0,即资产价值波动越大,限价指令积极性越差。这与 Foucault^[3] 的结论一致,但本文将该结论从对称信息的市场框架扩展到非对称信息的市场框架下。

^② 模型参数: $v^H = 1.5, v^L = 1$, 选择 $\theta_i = 0.45$ 。计算 $\theta_i = 0.5$ 的邻域内的 S_1 和 S_3 时,点 $\theta_i = 0.45$ 都在两邻域内,且此时两类价差变化趋势更为明显,故选择展示点 $\theta_i = 0.45$ 时的价差分解图。

同理,可得限价指令积极性与私人估值的关系.

性质 7 给定资产价值波动,私人估值减小使得市场由高执行概率均衡变为低执行概率均衡时,限价指令积极性变差;高、低执行概率均衡市场中,私人估值减小,限价指令积极性变好.

给定资产价值波动,私人估值 L 由区间 $(\bar{L}_1(\theta_i), \bar{L}^1(\theta_i))$ 减小到 $(\bar{L}_3(\theta_i), \bar{L}^3(\theta_i))$,限价指令交易者提交的限价买价由 $A_0^*(v_i^E, v^H - L)$ 减小为 $A_0^*(v_i^E, v^L - L)$,限价卖价由 $B_0^*(v_i^E, v^L + L)$ 增大为 $B_0^*(v_i^E, v^H + L)$,限价指令积极性变差,即限价指令积极性与私人估值的变化正相关. Goettler 等^[10]分析了高资产波动率下非知情交易者的报价积极性,研究发现私人估值较大的非知情交易者提交相对积极的限价指令,而私人估值适中的非知情交易者提交积极性较差的限价指令. 本文得到的不同市场均衡下,限价指令积极性与私人估值的变化正相关的关系与上述结论具有一致性.

高(低)执行概率均衡市场中,限价卖价中私人估值 L 的系数 $(\lambda_{BM} - \lambda_{SM}^2) / H_1((1 - 2\mu + \lambda\mu) / H_3)$ 大于 0,限价买价中私人估值 L 的系数 $(-\lambda_{SM} + \lambda_{BM}^2) / H_1((-1 + 2\lambda - \lambda\mu) / H_3)$ 小于 0,即限价指令积极性与私人估值的变化负相关. 这一结论尚未在以往文献中发现. 该性质表明,在分析私人估值对限价指令积极性的影响时,需考虑市场是否处于均衡状态.

Hall 和 Hautsch^[33]认为价差越大,限价指令积极性越差. 因此,性质 6、7 和性质 1、2 具有一致性.

综上可得,市场流动性与资产价值波动负相关,与私人估值正相关.

参 考 文 献:

- [1]Chen Q, Huang Z, Zhang Y. The effects of public information with asymmetrically informed short-horizon investors [J]. Journal of Accounting Research, 2014, 52(3): 635 - 669.
- [2]Cespa G, Vives X. The beauty contest and short-term trading [J]. The Journal of Finance, 2015, 70(5): 2099 - 2154.
- [3]Foucault T. Order flow composition and trading costs in a dynamic limit order market [J]. Journal of Financial Markets, 1999, 2(2): 99 - 134.
- [4]Parlour C. Price dynamics in limit order markets [J]. Review of Financial Studies, 1998, 11(4): 789 - 816.
- [5]Foucault T, Kadan O, Kandel E. Limit order book as a market for liquidity [J]. The Review of Financial Studies, 2005, 4(18): 1171 - 1217.
- [6]Rosu I. A dynamic model of the limit order book [J]. Review of Financial Studies, 2009, 22(11): 4601 - 4641.

4 结 束 语

本文提出了一个高波动率市场环境下的非对称信息指令驱动市场动态模型,给出了非知情交易者基于私人估值、资产价值波动以及非知情交易者对资产价值预期的最优交易策略的解析解,并刻画了市场的价格形成过程以及非知情交易者对资产价值预期的动态更新过程. 固定其他变量,随私人估值增加或资产价值波动减小,非知情交易者策略变化,使得市场依次进入低、混合及高执行概率均衡. 此外,当非知情交易者对资产价值的预期分歧减小时,不同类型的非知情卖家或买家的限价指令报价不同;且非知情交易者的报价超出资产价值的波动范围时,知情交易者被挤出市场.

通过理论分析,发现交易者的私人估值、资产价值波动以及知情交易者比例对市场流动性的影响依赖于市场所处的均衡状态,且在市场均衡状态之间转化时展现出不同影响. 这在以往非对称信息框架下的研究中尚未发现,为后续的实证研究提供了重要的理论启示.

本文在高波动率的市场环境下,基于知情交易者只提交市价指令,给出了非知情交易者的最优交易策略. 但资产价值低波动率的市场环境中,知情交易者的交易策略将更加复杂,那么,该环境中非知情交易者如何从市场指令流中学习信息,更新预期,并选择最优交易策略将是本文后续研究的重点.

- [7]Zhang Q , Liu S , Qiu W. The effects of market depth on the arrival rate of orders[J]. *Journal of Systems Science & Complexity* , 2014 ,27(6) : 1192 – 1203.
- [8]Parlour C A , Seppi D J. Limit Order Markets: A Survey[M]. Chapter 3 in “Handbook of Financial Intermediation and Banking” , San Diego: Elsevier , 2008: 63 – 96.
- [9]Roşu I. Order Choice and Information in Limit Order Markets[M]. Chapter 2 in “Market Microstructure: Confronting Many Viewpoints” , Cornwall: John Wiley & Sons Ltd , 2012: 41 – 60.
- [10]Goettler R L , Parlour C A , Rajan U. Informed traders and limit order markets[J]. *Journal of Financial Economics* , 2009 ,93(1) : 67 – 87.
- [11]Goettler R L , Parlour C A , Rajan U. Equilibrium in a dynamic limit order market[J]. *The Journal of Finance* , 2005 ,60(5) : 2149 – 2192.
- [12]Rosu I. Liquidity and information in order driven markets[J]. Available at SSRN 1286193 , 2016.
- [13]O’Hara M. Overview: Market Structure Issues in Market Liquidity[M]. *Market Liquidity: Proceedings of a Workshop Held at the BIS* , BIS Papers , Available at: <http://www.bis.org/publ/bppdf/bispap02.html> , 2001.
- [14]Chiarella C , He X , Wei L. Learning , information processing and order submission in limit order markets[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control* , 2015 ,61: 245 – 268.
- [15]Wei L , Zhang W , He X , et al. The Learning Effect of Uninformed Traders in Limit Order Markets[R]. Working Paper , Guangzhou: Sun Yat-sen University , Available at SSRN 2276350 , 2014.
- [16]Easley D , Hvidkjaer S , O’ Hara M. Is information risk a dominant of asset returns? [J]. *The Journal of Finance* , 2002 ,57(5) : 2185 – 2221.
- [17]Handa P , Schwartz R , Tiwari A. Quote setting and price formation in an order driven market[J]. *Journal of Financial Markets* , 2003 ,6(2) : 461 – 489.
- [18]Hollifield B , Miller R A , Sandas X , et al. Empirical analysis of limit order markets[J]. *The Review of Economic Studies* , 2004 ,71(4) : 1027 – 1063.
- [19]张 强 ,刘善存 ,邱菀华 ,等. 流动性特征对知情、非知情交易的影响研究[J]. *管理科学学报* , 2013 ,16(7) : 55 – 65.
Zhang Qiang , Liu Shancun , Qiu Wanhua , et al. Informed trading , uninformed trading and liquidity[J]. *Journal of Management Sciences in China* , 2013 ,16(7) : 55 – 65. (in Chinese)
- [20]Foucault T. Price Formation and Order Placement Strategies in a Dynamic Order Driven Market[R]. Working Paper , Paris: HEC Paris , Available at: <https://thierryfoucault.com/working-papers/> , 1999a.
- [21]Foucault T , Pagano M , Roell A. Market Liquidity: Theory , Evidence , and Policy [M]. New York: Oxford University Press , 2013.
- [22]Biais B , Foucault T , Moinas S. Equilibrium fast trading[J]. *Journal of Financial Economics* , 2015 ,116(2) : 292 – 313.
- [23]Ruchti T G. Market Power and the Profitability of Limit-Order Trading[R]. Working Paper , Pittsburgh: Carnegie Mellon University , Available at SSRN 2593912 , 2015.
- [24]张 强 ,刘善存 ,林千惠 ,等. 指令驱动市场中耐心交易者策略对价格形成的影响[J]. *系统工程理论与实践* , 2013 ,33(9) : 2195 – 2203.
Zhang Qiang , Liu Shancun , Lin Qianhui , et al. Impatient traders’ strategies and price formation in order driven markets[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice* , 2013 ,33(9) : 2195 – 2203. (in Chinese)
- [25]Dugast J. Unscheduled News and Market Dynamics[R]. Working Paper , Luxembourg: University of Luxembourg , Available at SSRN , 2015.
- [26]李广川 ,刘善存 ,邱菀华. 中国证券市场成交指令积极性及成交持续期的影响因素研究[J]. *系统工程理论与实践* , 2007 ,27(10) : 11 – 21.
Li Guangchuan , Liu Shancun , Qiu Wanhua. Research on determinants of trade order aggressiveness and trade duration in Chinese security market[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice* , 2007 ,27(10) : 11 – 21. (in Chinese)
- [27]Hoffmann P. A dynamic limit order market with fast and slow traders[J]. *Journal of Financial Economics* , 2014 ,113(1) : 156 – 169.
- [28]刘 遯. 证券市场微观结构理论与实践[M]. 上海: 复旦大学出版社 , 2002.

- Liu Ti. The Microstructure of Securities Markets: Theories and Practices [M]. Shanghai: Fudan University Press, 2002. (in Chinese)
- [29] Stoll H R. Friction [J]. The Journal of Finance, 2000, 55(4): 1479 – 1514.
- [30] Handa P, Schwartz R A. Limit order trading [J]. The Journal of Finance, 1996, 51(5): 1835 – 1861.
- [31] Ahn H J, Bae K H, Chan K. Limit orders, depth, and volatility: Evidence from the stock exchange of Hong Kong [J]. The Journal of Finance, 2001, 56(2): 767 – 788.
- [32] Ranaldo A. Order aggressiveness in limit order book markets [J]. Journal of Financial Markets, 2004, 7(1): 53 – 74.
- [33] Hall A D, Hautsch N. Order aggressiveness and order book dynamics [J]. Empirical Economics, 2006, 30(4): 973 – 1005.
- [34] Bayar O. Liquidity provision in a limit order book without adverse selection [J]. Journal of Economics and Business, 2013, 66: 98 – 124.

The optimal trading strategy of uninformed traders in an order driven market

BING Tao¹, LIU Shan-cun¹, ZHANG Qiang^{2*}, ZHAO Shang-mei¹

1. School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100191, China;

2. School of Economics and Management, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China

Abstract: Considering three factors: uninformed traders' expectation to the asset value, uninformed traders' private valuation, and the volatility of the asset value, the paper models the dynamic price formation in an order-driven market with asymmetric information. A closed-form solution is presented to describe the order placement strategies of uninformed traders so as to depict the dynamic process how the uninformed traders update their expectation of the asset value. Our results show that the private valuation and the volatility of the asset values affect the uninformed traders' optimal strategies, leading to market converges to different equilibria. In each equilibrium state, uninformed traders update their strategies according to their expectations of the asset value, resulting in the change of informed traders' strategies. Specifically, there is a possible state in which the informed traders are crowded out of the market. Furthermore, the differences in the execution risk of limit orders in each equilibrium play an important role in the effects of private valuation, volatility of the asset value, and the ratio of informed traders on market liquidity.

Key words: order driven market; trading strategy for uninformed traders; private valuation; expectation to the asset value; liquidity; equilibrium

附录:

1) 定理 1 的证明

在高执行概率均衡时, 非知情交易者提交的限价指令的执行概率较高, 即交易者选择的限价指令价格为

$$\begin{aligned} B_i^*(v_i^E, v^H + L) &= B_i^*(v_i^E, v^L + L) = A_0^*(v_i^E, v^H - L) \\ A_i^*(v_i^E, v^H - L) &= A_i^*(v_i^E, v^L - L) = B_0^*(v_i^E, v^L + L) \end{aligned}$$

若非知情交易者在 $B_0^*(v_i^E, v^L + L)$ 处提交限价指令, 该交易者认为下一时刻的指令是市价买指令的概率为 $\lambda_{BM} = \pi\theta_t + (1 - \pi)/2$. 若该指令得到执行, 根据 θ_t 的更新表达式可得, 下一时刻非知情交易者认为资产价值处在高价位比例 θ_{t+1}^* 的表达式

$$\begin{aligned} \theta_{t+1}^* &= Pr(v = v^H \mid O_{t+1} = BMO) \\ &= \frac{Pr(O_{t+1} = BMO \mid v = v^H) Pr(v = v^H)}{Pr(O_{t+1} = BMO \mid v = v^H) Pr(v = v^H) + Pr(O_{t+1} = SMO \mid v = v^L) Pr(v = v^L)} \\ &= \frac{[\frac{1-\pi}{2} + \pi]\theta_t}{[\frac{1-\pi}{2} + \pi]\theta_t + \frac{1-\pi}{2}(1-\theta_t)} = \frac{1+\pi}{2\lambda_{BM}}\theta_t \end{aligned}$$

所以可得 $E(v_{i+1} | O_{i+1} = BMO) = \theta_{i+1}^* v^H + (1 - \theta_{i+1}^*) v^L$. 卖交易者提交限价指令的效用为

$$\begin{aligned} & J(v_i^E, R_i, B_0^*(v_i^E, v^L + L)) \\ &= Pr(O_{i+1} = BMO | B_0^*(v_i^E, v^L + L)) [B_0^*(v_i^E, v^L + L) - R_i - E(\Delta v_{i+1} | O_{i+1} = BMO)] \\ &= \lambda_{BM} [B_0^*(v_i^E, v^L + L) - R_i - (v_{i+1}^E - v_i^E)] \\ &= \lambda_{BM} B_0^*(v_i^E, v^L + L) - \lambda_{BM} R_i - \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \end{aligned}$$

所以卖交易者提交市价指令时的最优临界价格为 $A_0^*(v_i^E, R_i) = R_i + J(v_i^E, R_i, B_0^*(v_i^E, v^L + L))$.

同理可得, 买交易者在 $A_0^*(v_i^E, v^H - L)$ 处提交限价指令, 该交易者认为该限价指令能够执行的概率为 $\lambda_{SM} = \pi(1 - \theta_i) + (1 - \pi)/2$. 若该指令得到执行, 下一时刻非知情交易者认为资产价值处在高价位的比例为 $\theta_{i+1}^- = \frac{1 - \pi}{2\lambda_{SM}} \theta_i$. 此时, 买交易者提交限价指令的效用为 $J(v_i^E, R_i, A_0^*(v_i^E, v^H - L)) = \lambda_{SM} R_i - \lambda_{SM} A_0^*(v_i^E, v^H - L) - \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L)$.

由交易者的最优临界价格及其限价指令效用公式可得

$$\begin{aligned} A_0^*(v_i^E, v^H - L) &= (1 - \lambda_{BM})(v^H - L) + \lambda_{BM} B_0^*(v_i^E, v^L + L) - \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \\ A_0^*(v_i^E, v^L - L) &= (1 - \lambda_{BM})(v^L - L) + \lambda_{BM} B_0^*(v_i^E, v^L + L) - \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \\ B_0^*(v_i^E, v^L + L) &= (1 - \lambda_{SM})(v^L + L) + \lambda_{SM} A_0^*(v_i^E, v^H - L) + \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \\ B_0^*(v_i^E, v^H + L) &= (1 - \lambda_{SM})(v^H + L) + \lambda_{SM} A_0^*(v_i^E, v^H - L) + \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \end{aligned}$$

求解可得

$$\begin{aligned} H_1 A_0^*(v_i^E, v^H - L) &= \lambda_{SM}(v^H - L) + \lambda_{BM}^2(v^L + L) - \lambda_{SM} \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \\ H_1 B_0^*(v_i^E, v^L + L) &= \lambda_{BM}(v^L + L) + \lambda_{SM}^2(v^H - L) + \lambda_{BM} \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \\ H_1 A_0^*(v_i^E, v^L - L) &= \lambda_{SM} H_1 (v^L - L) + \lambda_{BM}^2(v^L + L) + \lambda_{BM} \lambda_{SM}^2(v^H - L) - \lambda_{SM} \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \\ H_1 B_0^*(v_i^E, v^H + L) &= \lambda_{BM} H_1 (v^H + L) + \lambda_{SM}^2(v^H - L) + \lambda_{SM} \lambda_{BM}^2(v^L + L) + \lambda_{BM} \pi \theta_i (1 - \theta_i) (v^H - v^L) \end{aligned}$$

其中 $H_1 = 1 - \lambda_{BM} \lambda_{SM}$.

因为交易者都是预期效用最大化者, 所以交易者选择在高执行概率价位上提交限价指令的前提是交易者在高执行概率价位上的效用大于在低执行概率价位上的效用, 即交易者的效用公式需要满足

$$\begin{aligned} & J(v_i^E, R_i, A_0^*(v_i^E, v^H - L)) > J(v_i^E, R_i, A_0^*(v_i^E, v^L - L)) \\ & J(v_i^E, R_i, B_0^*(v_i^E, v^L + L)) > J(v_i^E, R_i, B_0^*(v_i^E, v^H + L)) \end{aligned}$$

分别将 $R_i = v^H + L$ 以及 $R_i = v^L + L$ 带入买交易者的限价效用比较公式, 比较可得 $v^L + L$ 类交易者的效用比较公式得到的参数的范围更小, 其表达式为 $(1 - \pi) \theta_i L > \pi(1 - \theta_i) H_1 (v^H - v^L) - \frac{1 - \pi}{2} \pi (1 - \theta_i) \theta_i^2 (v^H - v^L) + \frac{1 - \pi}{2} [1 - (1 - \theta_i) \lambda_{BM} \lambda_{SM}] (v^H - v^L)$; 同理可得卖交易者的限价效用比较公式, 其中 $v^H - L$ 类交易者的效用比较公式得到的参数的范围更小, 其表达式为 $(1 - \pi) (1 - \theta_i) L > \pi \theta_i H_1 (v^H - v^L) - \frac{1 - \pi}{2} \pi \theta_i (1 - \theta_i)^2 (v^H - v^L) + \frac{1 - \pi}{2} [1 - \theta_i + \theta_i H_1] (v^H - v^L)$.

由命题 1 中交易者的限价指令价格与其保留价值需满足一定的条件可知: 买交易者的限价指令价格需满足 $B_i^*(v_i^E, R_i) < R_i$; 卖交易者的限价指令价格需满足 $A_i^*(v_i^E, R_i) > R_i$. 整理上面两式可得 $2L > [1 - \pi \theta_i (1 - \theta_i)] (v^H - v^L)$. 同时, 需要满足限价指令的效用大于 0: 由卖交易者提交限价指令的效用大于 0, 可得 $2L > [1 + \frac{\lambda_{SM}}{\lambda_{BM}^2} \pi \theta_i (1 - \theta_i)] (v^H - v^L)$; 由买交易者提交限价指令的效用大于 0, 可得 $2L > [1 + \frac{\lambda_{BM}}{\lambda_{SM}^2} \pi \theta_i (1 - \theta_i)] (v^H - v^L)$.

因为此时交易者提交的限价指令价格均在资产价值的波动范围之内, 即 $B_i^*(v_i^E, R_i) > v^L$ 、 $A_i^*(v_i^E, R_i) < v^H$, 整理可得 $(\lambda_{SM} - \lambda_{BM}^2) L < \lambda_{SM} [1 - \pi \theta_i (1 - \theta_i)] (v^H - v^L)$ 、 $(\lambda_{BM} - \lambda_{SM}^2) L < \lambda_{BM} [1 - \pi \theta_i (1 - \theta_i)] (v^H - v^L)$.

由 Matlab 计算可得, 当 $L_{j1}(\theta_i) < L < \bar{L}^j(\theta_i)$, $\theta_i \in (\theta_{j1}(L), \bar{\theta}^j(L))$ 时, 交易者的最优交易策略能够确定, 其中

$$\begin{aligned} L_{j1}(\theta_i) &= \frac{\pi(1 - \theta_i) H_1 - \frac{1 - \pi}{2} \pi (1 - \theta_i) \theta_i^2 + \frac{1 - \pi}{2} [1 - (1 - \theta_i) \lambda_{BM} \lambda_{SM}]}{(1 - \pi) \theta_i} (v^H - v^L), \\ L_{j2}(\theta_i) &= \frac{\pi \theta_i H_1 - \frac{1 - \pi}{2} \pi \theta_i (1 - \theta_i)^2 + \frac{1 - \pi}{2} [1 - \theta_i + \theta_i H_1]}{(1 - \pi) (1 - \theta_i)} (v^H - v^L), \end{aligned}$$

$$L_1(\theta_t) = \max\{L_{11}(\theta_t), L_{12}(\theta_t)\}, \bar{L}^1(\theta_t) = \frac{\lambda_{SM} [1 - \pi\theta_t(1 - \theta)]}{\lambda_{SM} - \lambda_{BM}^2} (v^H - v^L),$$

$$\bar{L}^{12}(\theta_t) = \frac{\lambda_{BM} [1 - \pi\theta_t(1 - \theta)]}{\lambda_{BM} - \lambda_{SM}^2} (v^H - v^L), \bar{L}^1(\theta_t) = \min\{\bar{L}^{11}(\theta_t), \bar{L}^{12}(\theta_t)\}.$$

2) 推论3的证明

价差 S_1 由定理1易得. 对 S_1 求导可得

$$\frac{d(S_1)}{d\theta_t} = \frac{\pi(1 - 2\theta) [\pi(2L + v^L - v^H) + \pi^2\theta_t(1 - \theta_t)(v^H - v^L) + (1 - \lambda_{BM}\lambda_{SM})(v^H - v^L)]}{(1 - \lambda_{BM}\lambda_{SM})^2}$$

当 $\theta_t \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $\frac{d(S_1)}{d\theta_t} > 0$; 当 $\theta_t \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, $\frac{d(S_1)}{d\theta_t} < 0$. 因此 S_1 在 $\theta_t = \frac{1}{2}$ 处达到最大. 在 θ_t 取值范围的两个端

点 $\theta_t(L)$ 或 $\bar{\theta}^1(L)$ 处达到最小值. 将 $\theta_t = \frac{1}{2}$ 带入可得最大价差为

$$S_1 |_{\theta_t=0.5} = \frac{1}{3} [(v^L + L) - (v^H - L)] + \frac{\pi}{3} (v^H - v^L).$$

3) 定理2中各参数的值

$$\phi_2 = \frac{1 - \lambda_{SM}}{H_2}, \phi_3 = \frac{(1 - \lambda_{SM})(1 - \lambda_1\lambda_{SM})}{H_2}, \phi_4 = \frac{\lambda_{SM}(1 - \lambda_1)}{H_2}, \phi_2 = \frac{(1 - \lambda_1)}{H_2},$$

$$L_{21}(\theta_t) = \frac{H_2(\lambda_1 - \lambda_{BM}\lambda_{SM}) + (H_2 + \lambda_1\lambda_{BM})\pi\theta_t(1 - \theta_t)}{2(1 - \lambda_{SM})(\lambda_{BM} - \lambda_1)} (v^H - v^L),$$

$$L_{22}(\theta_t) = \frac{H_2\lambda_{SM}(1 - \mu\lambda_{BM}) + [\lambda_1\lambda_{SM} + \mu(H_2 - \lambda_{BM})]\pi\theta_t(1 - \theta_t)}{2(\lambda_{SM} - \mu + \mu\lambda_{BM} - \lambda_1\lambda_{SM} - \mu\lambda_{BM}\lambda_{SM} + \mu\lambda_1\lambda_{SM})} (v^H - v^L),$$

$$L_2(\theta_t) = \max\{L_{21}(\theta_t), L_{22}(\theta_t)\}, \bar{L}^{21}(\theta_t) = \frac{H_2(1 - \lambda_{SM}) - \pi\theta_t(1 - \theta_t)}{1 - 2\lambda_{SM} + \lambda_1\lambda_{SM}} (v^H - v^L),$$

$$\bar{L}^{22}(\theta_t) = \frac{H_2\lambda_{BM}(1 - \mu\lambda_{SM}) + (H_2 + \lambda_1 - \lambda_{BM})\pi\theta_t(1 - \theta_t)}{2(1 - \lambda_{SM})(\lambda_{BM} - \lambda_1)} (v^H - v^L), \bar{L}^2(\theta_t) = \min\{\bar{L}^{21}(\theta_t), \bar{L}^{22}(\theta_t)\}.$$

4) 定理3的证明

在高执行风险均衡时, 非知情交易者提交限价指令时会选择成交概率较低的限价指令价格. 即

$$B_i^*(v_i^E, v^H + L) = B_i^*(v_i^E, v^L + L) = A_0^*(v_i^E, v^L - L)$$

$$A_i^*(v_i^E, v^H - L) = A_i^*(v_i^E, v^L - L) = B_0^*(v_i^E, v^H + L)$$

此时, 卖交易者提交限价指令的效用为

$$\begin{aligned} J(v_i^E, R_i, B_0^*(v_i^E, v^H + L)) &= Pr(O_{i+1} = BMO | B_0^*(v_i^E, v^H + L)) [B_0^*(v_i^E, v^H + L) - R_i - E(\Delta v_{i+1} | O_{i+1} = BMO)] \\ &= \lambda [B_0^*(v_i^E, v^H + L) - R_i - (v_{i+1}^E - v_i^E)] \\ &= \lambda B_0^*(v_i^E, v^H + L) - \lambda R_i - \pi\theta_t(1 - \theta_t)(v^H - v^L) \end{aligned}$$

所以卖交易者提交市价指令时的最优临界价格为: $A_0^*(v_i^E, R_i) = R_i + J(v_i^E, R_i, B_0^*(v_i^E, v^H + L))$.

同理可得, 买交易者提交限价指令的效用及其提交市价指令时的最优临界价格分别为 $J(v_i^E, R_i, A_0^*(v_i^E, v^L - L)) = \mu R_i - \mu A_0^*(v_i^E, v^L - L) - \pi\theta_t(1 - \theta_t)(v^H - v^L)$ 和 $B_0^*(v_i^E, R_i) = R_i - J(v_i^E, R_i, A_0^*(v_i^E, v^L - L))$.

类似定理1证明可求得低执行概率均衡时交易者的最优临界价格以及达到低执行概率均衡时, 交易者私人估值以及非知情交易者对资产价值预期的范围 ($L_3(\theta_t), \bar{L}^3(\theta_t)$) 和 ($\theta_3(L), \bar{\theta}^3(L)$).

$$\text{定理3中各参数的具体值如下, } \phi_5 = \frac{1 - \mu}{H_3}, \phi_5 = \frac{1 - \lambda}{H_3}, L_{31}(\theta_t) = \frac{\lambda(1 - \mu) + \frac{\mu}{1 - \mu}\pi\theta_t(1 - \theta_t)}{2(1 - \lambda)} (v^H - v^L), L_{32}(\theta_t) =$$

$$\frac{\mu(1 - \lambda) + \frac{\lambda}{1 - \lambda}\pi\theta_t(1 - \theta_t)}{2(1 - \mu)} (v^H - v^L), L_3(\theta_t) = \max\{L_{31}(\theta_t), L_{32}(\theta_t)\}, \bar{L}^{31}(\theta_t) = \frac{\lambda(1 - \mu) - (1 - \lambda)\pi\theta_t(1 - \theta_t)}{1 - 2\lambda + \lambda\mu} (v^H -$$

$$v^L), \bar{L}^{32}(\theta_t) = \frac{\mu(1 - \lambda) - (1 - \mu)\pi\theta_t(1 - \theta_t)}{1 - 2\mu + \lambda\mu} (v^H - v^L), \bar{L}^3(\theta_t) = \min\{\bar{L}^{31}(\theta_t), \bar{L}^{32}(\theta_t)\}.$$

5) 定理 4 中各参数的值

$$\phi_6 = \frac{1 - \lambda_{SM}}{H_4}, \phi_7 = \frac{1 - \lambda_1}{H_4}, \phi_8 = \frac{1 - \mu_1}{H_5}, \phi_9 = \frac{1 - \lambda_{BM}}{H_5},$$

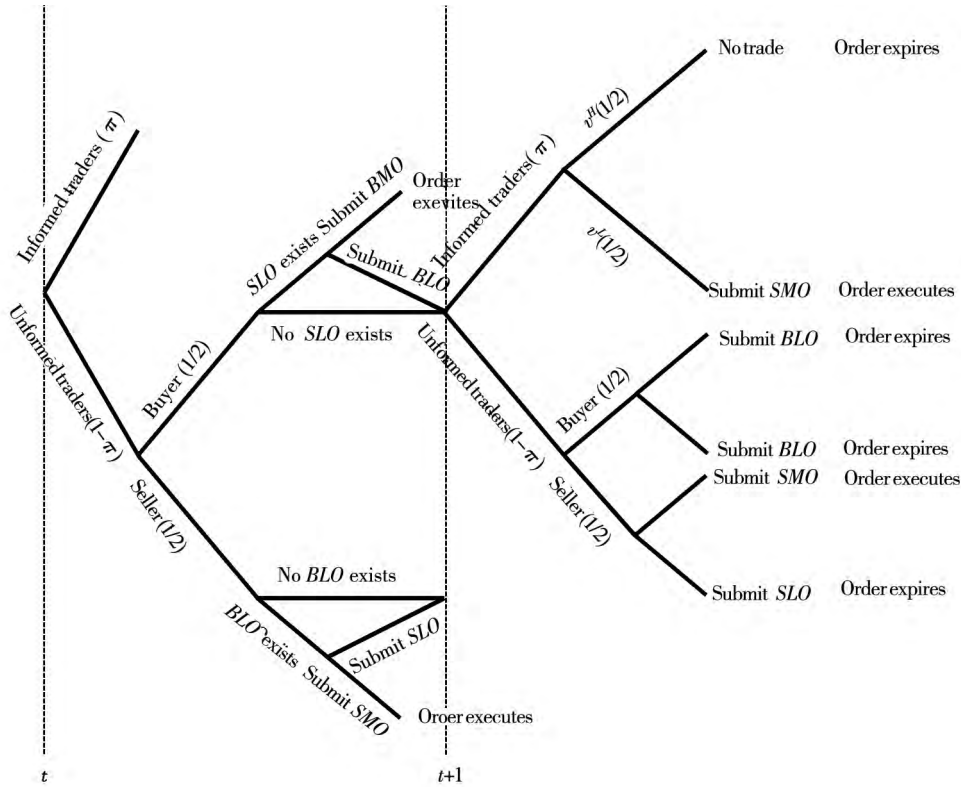
$$L_{41}(\theta_t) = \frac{\mu_1 H_4 H_5 + (H_5 + \mu_1 H_4) \pi \theta_t (1 - \theta_t)}{2[\lambda_{SM} H_5 (1 - \lambda_1) - \mu_1 H_4 (1 - \lambda_{BM})]} (v^H - v^L),$$

$$L_{42}(\theta_t) = \frac{\lambda_1 H_4 H_5 + (H_4 + \lambda_1 H_5) \pi \theta_t (1 - \theta_t)}{2[\lambda_{BM} H_4 (1 - \mu_1) - \lambda_1 H_5 (1 - \lambda_{SM})]} (v^H - v^L), L_4(\theta_t) = \max\{L_{41}(\theta_t), L_{42}(\theta_t)\},$$

$$\bar{L}^{41}(\theta_t) = \frac{\lambda_{SM} H_4 H_5 + (H_5 + \mu_1 H_4) \pi \theta_t (1 - \theta_t)}{2[\lambda_{SM} H_5 (1 - \lambda_1) - \mu_1 H_4 (1 - \lambda_{BM})]} (v^H - v^L),$$

$$\bar{L}^{42}(\theta_t) = \frac{\lambda_{BM} H_4 H_5 + (H_4 + \lambda_1 H_5) \pi \theta_t (1 - \theta_t)}{2[\lambda_{BM} H_4 (1 - \mu_1) - \lambda_1 H_5 (1 - \lambda_{SM})]} (v^H - v^L), \bar{L}^4(\theta_t) = \min\{\bar{L}^{41}(\theta_t), \bar{L}^{42}(\theta_t)\}.$$

6) 附图: 非知情交易者的决策树



附图 1 非知情交易者的决策树

Appendix Fig. 1 The decision tree faced by the uninformed traders