第 20 卷第 6 期
2017 年 6 月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol. 20 No. 6
Jun. 2017

基于分量差的线性及匿名合作对策值的简化算法①

胡勋锋[1]，李登峰[1]，刘家财[1,2]，张 庆[1,3]
(1. 福州大学经济与管理学院，福州 350108; 2. 福建农林大学交通与土木工程学院，福州 350002;
3. 海南师范大学数学与统计学院，海口 571158)

摘要: 通过给出 Shapley 值、均分 Shapley 值、贴现 Shapley 值、Solidarity 值、广义 Solidarity 值、合意值、Banzhaf 值及最小二乘预核仁分量差的显式解析表达式，本文提出了一种同时计算这些线性及匿名效用可转移合作对策值的简化算法. 特别地，这一算法也适用于同时计算这些值中的两种及以上. 为了详细说明简化算法的计算过程及优越性，文中给出了具体的数值算例，并将其与传统算法进行了比较分析，结果表明简化算法确实能显著降低同时计算多个值的时间复杂度.

关键词: 合作对策; 线性性; 匿名性; 值; 算法
中图分类号: O225 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007 - 9807(2017)06 - 0032 - 10

0 引 言

效用可转移合作对策(TU 对策)通过给定所有潜在联盟所能创造的价值来描述局中人合作情境. 它在现实中具有广泛的应用，如曾银莲等[1]就用其来分析随机需求环境下零担货物运输合作中的费用分配问题. TU 对策的单值解(亦称值)赋予任意对策一个分配. 继 Shapley 值[2]之后，Banzhaf 值[3]、Solidarity 值[4]、均分 Shapley 值[5]、贴现 Shapley 值[5]、最小二乘预核仁[6]、合意值[7]、广义 Solidarity 值[8]等也被相继提出. 由于种类繁多，相应的研究工作比较零散，给理论研究及实际应用都带来了不便.

目前，对 TU 对策值的研究工作出现了系统化趋势，其中对同时满足有效性、线性性及匿名性 TU 对策值的研究工作最为常见. Ruiz 等[6]、Juarez 等[9]、Nembua 和 Andjiga[10]、Nembua[11]、Radzik 和 Driessen[12]等都给出了这类值的显式解析表达式. 这些表达式相互等价，它们从不同角度诠释了这类值的特点. Driessen 和 Radzik[13,14]先后研究了这类值的势函数及一致性，从而给出了它们的一些公理化刻画. Radzik 和 Driessen[12]、Malawski[15]、Beal 等[16]、Rojas 和 Sanchez[17]则给出了这类值满足一些常见公理的充要条件.

本文致力于给出同时计算多种线性及匿名 TU 对策值的简化算法. 特殊地，如果被研究的值还满足有效性，那么使用该算法将会更加简便. 提出这一算法的动机来自于 Hernandez-Lamoneda 和 Sanchez-Sanchez[18]. 为了解决迈克尔 · 乔丹问题(即为什么尽管迈克尔 · 乔丹被公认为是 NBA 历史上最伟大的运动员，但不同的评价方法却不会都把他排在第一?)，他们提出了分队对策，即只有局中人数量为一常数的联盟价值不为 0 的 TU 对策. 在分队对策中，任何线性及匿名 TU 对策值将给予球员相同的排序，且该值的分量差被一个与所考虑值无关的向量决定. 由于任意 TU 对策都可拆分成若干分队对策之和，因

① 收稿日期: 2015 - 06 - 19; 修订日期: 2017 - 01 - 18.
基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(71231003); 国家自然科学基金资助项目(71572040); 福建省社会科学规划资助项目(FJ2015C230).
作者简介: 胡勋锋(1987—)，男，湖北黄冈人，博士生，Email: guyue85868@163.com

而该结论也适用于一般化的 TU 对策. 本文的主要工作之一，就是利用这一向量，来给出各种线性及匿名 TU 对策值分量差的显式解析表达式，并由此简化同时计算多种线性及匿名 TU 对策值的过程.

选择这一算法作为研究内容是基于两方面的考虑. 一方面，值理论需要这样的算法. 目前，由于使用了太多缺乏现实意义的公理，公理化方法已受诟病[19]. Thomson[19] 指出"将一个解在测试问题中的表现作为判断其合理性的依据可作为公理化方法的一个替代". 因而，同时快速地计算出一类值，具有较强的理论需求. 另一方面，实际应用也需要这样的算法. 现实中进行利益分配或成本分摊时，往往需要对若干值进行比较. 此时，同时快速地计算出一类值，具有较强的现实需求.

1　基本概念及简化算法框架

有限集 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的 TU 对策 v 是从 N 的幂集到实数集的映射（$v:2^N\to\mathbb{R}$），满足 $v(\emptyset)=0$. 称 N 中的元素为局中人，N 的子集为联盟，$v(S)$ 为联盟 S 的价值. 记 N 上 TU 对策的全体为 $\mathcal{G}^N$.

任取 $S,T\subseteq N$，本文将用其对应的小写字母 s,t 表示其中所含元素个数.

任取 $v\in\mathcal{G}^N$ 及 $r\in\{1,2,\cdots,n\}$，若对所有 $S\subseteq N$ 满足 $s\neq r$，都有 $v(S)=0$，则称 v 为 r 分队对策. 记 N 上 r 分队对策的全体为 $\mathcal{G}_r^N$.

$\mathcal{G}^N$ 上的值是一个映射 $f:\mathcal{G}^N\to\mathbb{R}^N$，其中，$f(v)$ 的分量 $f_i(v)$（$i\in N$）代表用值 f 在 N 间分配全局联盟价值 $v(N)$ 时，局中人 i 的收益.

称从 N 到 N 的双射为 N 上的置换，记 N 上置换的全体为 $\Omega(N)$.

若值 f 满足对任意 $v\in\mathcal{G}^N$ 及 $\pi\in\Omega(N)$，都有 $f(\pi v)=\pi f(v)$，则称 f 满足匿名性. 这里：

1) $\pi v\in\mathcal{G}^N$，$\pi v(S)=v(\pi^{-1}(S))$；

2) $\pi f(v)=(f_{\pi(1)}(v),f_{\pi(2)}(v),\cdots,f_{\pi(n)}(v))$.

若值 f 满足对于任意 $u,v\in\mathcal{G}^N$ 及 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，都有 $f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)$，则称 f 满足线性性.

若值 f 满足对任意 $v\in\mathcal{G}^N$，都有

$$\sum_{i\in N}f_i(v)=v(N)$$

则称 f 满足有效性.

Shapley 值满足线性性及匿名性[2]. 局中人 $i\in N$ 在 $v\in\mathcal{G}^N$ 中的 Shapley 值分量为

$$\mathrm{Sh}_i(v)=\sum_{S\subseteq N\backslash i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup i)-v(S))\quad(1)$$

任取 $u,v\in\mathcal{G}^N$ 及 $\alpha\in\mathbb{R}$，在 $\mathcal{G}^N$ 上可定义：

1) 加法：$(u+v)(S)=u(S)+v(S)$；

2) 数乘：$(\alpha v)(S)=\alpha v(S)$.

于是，$\mathcal{G}^N$ 成为线性空间. Hernandez-Lamoneda 等[20] 指出，该空间是如下三个子空间的直和：

1) $C=\oplus_{r=1}^{n}C_r$，其中 $C_r=\{tc_r\mid t\in\mathbb{R}\}$，$c_r\in\mathcal{G}_r^N$ 且为 0－1 对策，即对任意 $S\subseteq N$，

$$c_r(S)=\begin{cases}1,若\ s=r;\\0,其它.\end{cases}$$

2) $U=\oplus_{r=1}^{n-1}U_r$，其中

$$U_r=\{\bar{z_r}\mid z\in\mathbb{R}^n 且\sum_{l=1}^{n}z_l=0\},\bar{z_r}\in\mathcal{G}_r^N,$$

对任意 $S\subseteq N$，

$$\bar{z_r}(S)=\begin{cases}\sum_{i\in S}z_i,若\ s=r;\\0,\ 其它.\end{cases}$$

3) $W=\oplus_{r=1}^{n}W_r$，其中

$$W_r=\{\omega\in\mathcal{G}_r^N\mid\forall i\in N,\sum_{S\subseteq N:i\in S}\omega(S)=0\}.$$

Hernandez-Lamoneda 和 Sanchez-Sanchez[18] 还指出

引理 1　对任意 $v\in\mathcal{G}^N$，都有

$$v=\sum_{r=1}^{n}a_rc_r+\sum_{r=1}^{n-1}\bar{z_r}+\omega$$

其中

1) $a_rc_r\in C_r$，$a_r=\sum_{S\subseteq N:s=r}v(S)/\binom{n}{r}$；

2) $\bar{z_r}\in U_r$，对任意 $S\subseteq N$，

$$\bar{z_r}(S)=\begin{cases}(n-1)\sum_{i\in S}\mathrm{Sh}_i(v_r)\ ,若\ s=r\\0,\qquad ,其它\end{cases}\quad(2)$$

其中 $v_r\in\mathcal{G}_r^N$，且对任意 $S\subseteq N$，若 $s=r$，则 $v_r(S)=v(S)$.

3) $\omega\in W$.

由此，若值 f 满足线性性，则对任意 $v\in\mathcal{G}^N$

$$f(v)=\sum_{r=1}^{n}a_nf(c_r)+\sum_{r=1}^{n-1}f(\bar{z_r})+f(\omega)\quad(3)$$

由于 c_r、$\overline{z_r}$ 及 ω 都属于分队对策，因而 $f(c_r)$ 、$f(\overline{z_r})$ 及 $f(\omega)$ 的计算相较于 $f(v)$ 要简单. 相较于利用定义，采用式(3) 来计算 $f(v)$ 能将原问题"化整为零、各个击破"，因而在一定程度上可以降低计算复杂度. 尽管如此，采用式(3) 来计算 $f(v)$ 并不是最优选择.

定理 1 若 $\mathcal{G}^N$ 上的值 f 满足匿名性及线性性，则对任意的 $v \in \mathcal{G}^N$ 及 $i,j \in N$，都有

$$f_i(v) - f_j(v) = \sum_{r=1}^{n-1}(f_i(\overline{z_r}) - f_j(\overline{z_r})) = \sum_{r=1}^{n-1}(n-1)b_r(\mathrm{Sh}_i(v_r) - \mathrm{Sh}_j(v_r)) \tag{4}$$

证明 Hernandez-Lamoneda 和 Sanchez-Sanchez[8] 指出(定理 1)，若值 f 满足线性性及匿名性，则

1) 对任意 $v \in C$，存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得 $f(v) = \alpha\mathbf{1}_n$，其中 $\mathbf{1}_n$ 代表 $\mathbb{R}^N$ 中各分量皆为 1 的向量;

2) 对任意 $v \in U$，都有 $\sum_{i\in N} f_i(v) = 0$;

3) 对任意 $v \in W$，都有 $f(v) = \mathbf{0}$，其中 $\mathbf{0}$ 代表 $\mathbb{R}^N$ 中的零向量;

4) 对任意 $r \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，都存在 $b_r \in \mathbb{R}$，使得 $f(\overline{z_r}) = (n-1)b_r\mathbf{Sh}(v_r)$.

于是，由式(3) 及上面的分析过程，

$$\begin{aligned}
f_i(v) - f_j(v) &= \left(\sum_{r=1}^{n} a_r f_i(c_r) + \sum_{r=1}^{n-1} f_i(\overline{z_r}) + f_i(\omega)\right) - \left(\sum_{r=1}^{n} a_r f_j(c_r) + \sum_{r=1}^{n-1} f_j(\overline{z_r}) + f_j(\omega)\right) \\
&= \left(f_i\left(\sum_{r=1}^{n} a_r c_r\right) - f_j\left(\sum_{r=1}^{n} a_r c_r\right)\right) + \left(f_i\left(\sum_{r=1}^{n-1} \overline{z_r}\right) - f_j\left(\sum_{r=1}^{n-1} \overline{z_r}\right)\right) + (f_i(\omega) - f_j(\omega)) \\
&= \sum_{r=1}^{n-1}(f_i(\overline{z_r}) - f_j(\overline{z_r})) \\
&= \sum_{r=1}^{n-1}(n-1)b_r(\mathrm{Sh}_i(v_r) - \mathrm{Sh}_j(v_r))
\end{aligned}$$

其中 第三、四两个等号是由文献[8] 的定理 1 得到的.

依据定理 1，采用如下思路来计算多个同时满足线性性及匿名性的 TU 对策值将非常方便:

步骤 1 任取 $i \in N$，利用 f 的定义计算出 $f_i(v)$.

步骤 2 利用式(4) 计算 $f(v)$ 的分量差，即 $f_j(v)(j \in N\backslash i)$ 与 $f_i(v)$ 的差.

步骤 3 利用步骤 1) 及 2) 的结果计算 $f_j(v)$.

由于在计算不同的满足线性性及匿名性的 TU 对策值时，$\mathbf{Sh}(v_r)$ 可以被循环利用，因而这种方法将极大减少同时计算多种此类值的工作量. 特殊的，若值 f 还满足有效性，则还可以省略步骤 1)，而直接在步骤 3) 中利用步骤 2) 的结果及有效性来得到 $f(v)$.

下面，本文将给出 Shapley 值、Solidarity 值、广义 Solidarity 值、贴现 Shapley 值、Banzhaf 值及最小二乘预核仁分量差的显式解析表达式，从而将上面的思路具体化. 显然，这里的关键在于找出针对这些 TU 对策值的式(4) 中 b_r 的显式表达式.

2 分量差显示解析表达式

2.1 Shapley 值分量差显式解析表达式

定理 2 对任意 $v \in \mathcal{G}^N$ 及 $r \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，

$$\mathbf{Sh}(\overline{z_r}) = \mathbf{Sh}(v_r) \tag{5}$$

证明 对任意 $i \in N$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sh}_i(\overline{z_r}) &= \sum_{S\subseteq N\backslash i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(\overline{z_r}(S\cup i) - \overline{z_r}(S)) \\
&= \sum_{S\subseteq N\backslash i: s=r-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\overline{z_r}(S\cup i) - \sum_{S\subseteq N\backslash i: s=r} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\overline{z_r}(S) \\
&= \sum_{S\subseteq N\backslash i: s=r-1} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}(n-1)\sum_{j\in S\cup i}\mathrm{Sh}_j(v_r) - \sum_{S\subseteq N\backslash i: s=r} \frac{r!(n-r-1)!}{n!}(n-1)\sum_{j\in S}\mathrm{Sh}_j(v_r)
\end{aligned}$$

1) 若 $r = 1$，则

$$\mathrm{Sh}_i(\overline{z_r}) = \frac{n-1}{n}\mathrm{Sh}_i(v_r) - \frac{1}{n}\sum_{j\in N\backslash i}\mathrm{Sh}_j(v_r) = \left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\right)\mathrm{Sh}_i(v_r) = \mathrm{Sh}_i(v_r)$$

2) 若 $r > 1$，则

$$\mathrm{Sh}_i(\overline{z_r}) = \binom{n-1}{r-1}\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}(n-1)\mathrm{Sh}_i(v_r) + \sum_{j\in N\backslash i}\binom{n-2}{r-2}\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}(n-1)\mathrm{Sh}_j(v_r) -$$

$$\sum_{j\in N\backslash i}\binom{n-2}{r-1}\frac{r!(n-r-1)!}{n!}(n-1)\mathrm{Sh}_j(v_r)$$
$$=\frac{n-1}{n}\mathrm{Sh}_i(v_r)+\frac{r-1}{n}\sum_{j\in N\backslash i}\mathrm{Sh}_j(v_r)-\frac{r}{n}\sum_{j\in N\backslash i}\mathrm{Sh}_j(v_r)$$
$$=\frac{n-1}{n}\mathrm{Sh}_i(v_r)-\frac{r-1}{n}\mathrm{Sh}_i(v_r)+\frac{r}{n}\mathrm{Sh}_i(v_r)$$
$$=\mathrm{Sh}_i(v_r)$$

综上所述，式(5)成立.

由定理1及定理2可得，对任意的$v\in\mathcal{G}^N$及i，$j\in N$，都有

$$\mathrm{Sh}_i(v)-\mathrm{Sh}_j(v)=\sum_{r=1}^{n-1}(\mathrm{Sh}_i(v_r)-\mathrm{Sh}_j(v_r)) \tag{6}$$

2.2 Solidarity 值分量差显式解析表达式

除了满足线性性及匿名性以外，Shapley 值还满足无效性，即对任何联盟边际贡献均为0的局中人也将获得0收益，这说明Shapley值是一种基于效率的分配方法. 相对地，Solidarity值[4]则是一种效率优先兼顾公平的分配方法，它满足线性性、匿名性和有效性，但不满足无效性. Nowak 和 Radzik[4]将其与Shapley值的区别归结于哪类局中人将获得0收益，Kamijo 和 Kongo[21]则将此归结于哪一类局中人退出全局联盟不会影响其他局中人的收益. Xu 等[22]则将此归结为如何度量两个局中人彼此对对方收益的影响.

对任意$v\in\mathcal{G}^N$及$S\subseteq N$，记S内局中人对S的平均边际贡献为$\Delta^{\mathrm{av}}(S,v)$，即

$$\Delta^{\mathrm{av}}(S,v)=\frac{1}{s}\sum_{j\in S}(v(S)-v(S\backslash j))$$

则任意局中人$i\in N$在v中的Solidarity值分量为

$$\mathrm{so}_i(v)=\sum_{S\subseteq N:i\in S}\frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}\Delta^{\mathrm{av}}(S,v)$$

定理3 对任意$v\in\mathcal{G}^N$及$r\in\{1,2,\cdots,n-1\}$

$$\mathbf{so}(\overline{z_r})=\frac{1}{r+1}\mathbf{Sh}(v_r) \tag{7}$$

证明 对任意的$i\in N$

$$\mathrm{so}_i(\overline{z_r})$$
$$=\sum_{S\subseteq N:i\in S}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\frac{1}{s}\sum_{j\in S}(\overline{z_r}(S)-\overline{z_r}(S\backslash j))$$
$$=\sum_{S\subseteq N:i\in S,s=r}\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}\overline{z_r}(S)-\sum_{S\subseteq N:i\in S,s=r+1}\frac{r!(n-r-1)!}{n!}\frac{\sum_{j\in S}\overline{z_r}(S\backslash j)}{r+1}$$

1) 若$r=1$，则

$$\mathrm{so}_i(\overline{z_r})=\frac{n-1}{n}\mathrm{Sh}_i(v_r)-\binom{n-1}{1}\frac{1}{n}\frac{\mathrm{Sh}_i(v_r)}{2}+\frac{1}{n}\sum_{j\in N\backslash i}\frac{\mathrm{Sh}_j(v_r)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Sh}_i(v_r)$$

2) 若$r>1$，则

$$\mathrm{so}_i(\overline{z_r})$$
$$=\binom{n-1}{r-1}\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}(n-1)\mathrm{Sh}_i(v_r)+\sum_{j\in N\backslash i}\binom{n-2}{r-2}\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}(n-1)\mathrm{Sh}_j(v_r)-$$
$$\binom{n-1}{r}\frac{r!(n-r-1)!}{n!}\frac{r}{r+1}(n-1)\mathrm{Sh}_i(v_r)-\sum_{j\in N\backslash i}\binom{n-2}{r-1}\frac{r!(n-r-1)!}{n!}\frac{r}{r+1}(n-1)\mathrm{Sh}_j(v_r)$$
$$=\frac{n-1}{n}\mathrm{Sh}_i(v_r)+\frac{r-1}{n}\sum_{j\in N\backslash i}\mathrm{Sh}_j(v_r)-\frac{n-1}{n}\frac{r}{r+1}\mathrm{Sh}_i(v_r)-\sum_{j\in N\backslash i}\frac{r}{n}\frac{r}{r+1}\mathrm{Sh}_j(v_r)$$
$$=\frac{1}{r+1}\mathrm{Sh}_i(v_r)$$

综上所述，式(7)成立.

由定理1及定理3可得，对任意$v\in\mathcal{G}^N$及i，$j\in N$，都有

$$\mathrm{so}_i(v)-\mathrm{so}_j(v)=\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r+1}(\mathrm{Sh}_i(v_r)-\mathrm{Sh}_j(v_r)) \tag{8}$$

注1 除Solidarity值以外，兼顾效率和公平的TU对策值还有均分Shapley值[5]及合意值[7]. 对任意$v\in\mathcal{G}^N$及$i\in N$，i在v中的均分Shapley值分量为其均分值分量与Shapley值分量的凸组合，即

$$\mathrm{ESh}_i(v)=\alpha\frac{v(N)}{n}+(1-\alpha)\mathrm{Sh}_i(v)$$

i在v中的合意值分量为其均分剩余值分量与Shapley值分量的凸组合，即

$$\mathrm{co}_i(v)=\alpha\left(v(i)+\frac{v(N)-\sum_{j\in N}v(j)}{n}\right)+(1-\alpha)\mathrm{Sh}_i(v)$$

这里$\alpha\in[0,1]$，表示决策者在效率和公平间的取

舍. van den Brink 等[23]、Casajus 和 Huettner[24,25] 都给出了均分 Shapley 值的公理化刻画，且 van den Brink 等[23] 还给出了该值的一个招投标机制实现. 均分 Shapley 值与合意值都满足匿名性及线性性. 任取 $j \in N$，

$$\begin{aligned} \mathrm{ESh}_i(v) - \mathrm{ESh}_j(v) &= (1-\alpha)(\mathrm{Sh}_i(v) - \mathrm{Sh}_j(v)) \\ &= (1-\alpha)\sum_{r=1}^{n-1}(\mathrm{Sh}_i(v_r) - \mathrm{Sh}_j(v_r)) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{co}_i(v) - \mathrm{co}_j(v) &= \alpha(v(i) - v(j)) + (1-\alpha) \times \\ &\quad (\mathrm{Sh}_i(v) - \mathrm{Sh}_j(v)) \\ &= \alpha(v(i) - v(j)) + (1-\alpha) \times \\ &\quad \sum_{r=1}^{n-1}(\mathrm{Sh}_i(v_r) - \mathrm{Sh}_j(v_r)) \end{aligned} \tag{10}$$

注2 Hernandez-Lamoneda 和 Sanchez-Sanchez[18] 提出，如果 $\mathcal{G}^N$ 上满足线性性及匿名性的值 f 满足对任意 $v \in \mathcal{G}^N$ 及 $i \in N$，都存在 $m_0, m_1, \cdots, m_{n-1} \in \mathbb{R}$，使得

$$f_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} m_s(v(S \cup i) - v(S)) \tag{11}$$

则对任意 $r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$，

$$f(\bar{z}_r) = (n-1)\binom{n-2}{r-1}(m_{r-1} + m_r)\mathbf{Sh}(v_r)$$

由于 Solidarity 值无法写成式(9)的形式(否则其可视为一种基于效率的值，而非效率优先兼顾公平)，因而 Hernandez-Lamoneda 和 Sanchez-Sanchez[18] 的结论无法处理 Solidarity 值.

2.3 广义 Solidarity 值分量差显式解析表达式

Kamijo 和 Kongo[21] 同时刻画了 Shapley 值、Solidarity 值及均分值，指出在同时满足有效性、线性性及匿名性的 TU 对策值中，它们依次是唯一满足无效局中人无关性、拟比例局中人无关性及比例局中人无关性的值. 受此启发，Casajus 和 Huettner[8] 提出了 ξ - 局中人，无效局中人、拟比例局中人及比例局中人都是其特例. 只有当 ξ 可容许时，即满足

$$\begin{cases} \xi_l \in \mathbb{R} \setminus \{-1/q \mid q \in \quad\} \\ \xi_l = \dfrac{l\xi_1}{(l-1)\xi_1 + 1}, l = 0, 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

时，才存在 $\mathcal{G}^N$ 上的值 $\mathbf{so}^\xi$ 同时满足有效性及 ξ - 局中人无关性②. 进一步，对任意可容许的 ξ，$\mathbf{so}^\xi$ 是 $\mathcal{G}^N$ 上唯一同时满足有效性、线性性、匿名性及 ξ - 局中人无关性的值. 对任意 $v \in \mathcal{G}^N$ 及 $i \in N$，$\mathbf{so}^\xi(v)$ 对应于 i 的分量如下:

$$\mathrm{so}_i^\xi(v) = \xi_n\frac{v(N)}{n} + \sum_{S \subseteq N \setminus i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!} \times \\ ((1-\xi_{s+1})v(S \cup i) - (1-\xi_s)v(S))$$

特殊地，当 $0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1$ 时，称 $\mathbf{so}^\xi$ 为广义 Solidarity 值. 本节提到的 $\mathbf{so}^\xi$ 均指广义 Solidarity 值. 容易验证当 $\xi_1 = 0, 1/2, 1$ 时，$\mathbf{so}^\xi$ 依次退化为 Shapley 值、Solidarity 值及均分值.

定理4 对任意 $v \in \mathcal{G}^N$ 及 $r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$，

$$\mathbf{so}^\xi(\bar{z}_r) = \frac{1-\xi_1}{(r-1)\xi_1 + 1}\mathbf{Sh}(v_r) \tag{12}$$

证明 对任意 $i \in N$，

$$\begin{aligned} \mathrm{so}_i^\xi(\bar{z}_r) &= \xi_n\frac{\bar{z}_r(N)}{n} + \sum_{S \subseteq N \setminus i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!} \times \\ &\quad ((1-\xi_{s+1})\bar{z}_r(S \cup i) - (1-\xi_s)\bar{z}_r(S)) \\ &= \sum_{S \subseteq N \setminus i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!} \times \\ &\quad ((1-\xi_{s+1})\bar{z}_r(S \cup i) - (1-\xi_s)\bar{z}_r(S)) \\ &= \sum_{S \subseteq N \setminus i: s = r-1}\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}(1-\xi_r)\bar{z}_r(S \cup i) - \\ &\quad \sum_{S \subseteq N \setminus i: s = r}\frac{r!(n-r-1)!}{n!}(1-\xi_r)\bar{z}_r(S) \end{aligned}$$

1) 若 $r = 1$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{so}_i^\xi(\bar{z}_r) &= \frac{n-1}{n}(1-\xi_1)\mathrm{Sh}_i(v_r) - \\ &\quad \frac{1}{n}(1-\xi_1)\sum_{j \in N \setminus i}\mathrm{Sh}_j(v_r) \\ &= (1-\xi_1)\mathrm{Sh}_i(v_r) \end{aligned}$$

2) 若 $r > 1$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{so}_i^\xi(\bar{z}_r) &= \binom{n-1}{r-1}\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}(1-\xi_r) \times \\ &\quad (n-1)\mathrm{Sh}_i(v_r) + \sum_{j \in N \setminus i}\binom{n-2}{r-2} \times \\ &\quad \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}(1-\xi_r)(n-1)\mathrm{Sh}_j(v_r) - \\ &\quad \sum_{j \in N \setminus i}\binom{n-2}{r-1}\frac{r!(n-r-1)!}{n!} \times \end{aligned}$$

② ξ - 局中人无关性是指 ξ - 局中人退出对策时，不影响剩余局中人的收益.

$$(1-\xi_r)(n-1)\mathrm{Sh}_j(v_r)$$
$$=\frac{n-1}{n}(1-\xi_r)\mathrm{Sh}_i(v_r)+\frac{r-1}{n}(1-\xi_r)\sum_{j\in N\setminus i}\mathrm{Sh}_j(v_r)-\sum_{j\in N\setminus i}\frac{r}{n}(1-\xi_r)\mathrm{Sh}_j(v_r)$$
$$=\left(\frac{n-1}{n}-\frac{r-1}{n}+\frac{r}{n}\right)(1-\xi_r)\mathrm{Sh}_i(v_r)$$
$$=\frac{1-\xi_1}{(r-1)\xi_1+1}\mathrm{Sh}_i(v_r)$$

综上所述，式(12)成立.

容易验证当 $\xi_1=0,1/2$ 时，定理 4 依次退化为定理 2 及定理 3.

由定理 1 及定理 4 可得，对任意 $v\in\mathcal{G}^N$ 及 $i,j\in N$，都有

$$\mathrm{so}_i^{\xi}(v)-\mathrm{so}_j^{\xi}(v)=\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1-\xi_1}{(r-1)\xi_1+1}\times(\mathrm{Sh}_i(v_r)-\mathrm{Sh}_j(v_r))\tag{13}$$

2.4　贴现 Shapley 值分量差显式解析表达式

除了均分 Shapley 值以外，Joosten[5] 还给出了 Shapley 值的另一个满足线性性及匿名性的变种：贴现 Shapley 值. 具体地，对任意 $v\in\mathcal{G}^N$ 及 $i\in N$，i 在 v 中的贴现 Shapley 值分量如下：

$$\mathrm{Sh}_i^{\delta}(v)=\sum_{S\subseteq N\setminus i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\delta^{n-s-1}\times(v(S\cup i)-\delta v(S))$$

这里 $\delta\in[0,1]$，表示贴现因子. 特殊地，当 $\delta=0,1$ 时，Sh^{δ} 依次退化为均分值和 Shapley 值. van den Brink 和 Funaki[26] 给出了贴现 Shapley 值的一个公理化刻画及招投标机制实现，Calvo 和 Gutiérrez-López[27] 和 Kawamori[28] 则给出了该值的其它方式实现.

定理 5　对任意 $v\in\mathcal{G}^N$ 及 $r\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，

$$\mathbf{Sh}^{\delta}(\overline{z_r})=\delta^{n-r}\mathbf{Sh}(v_r)\tag{14}$$

证明　对任意 $i\in N$，

$$\mathrm{Sh}_i^{\delta}(\overline{z_r})=\sum_{S\subseteq N\setminus i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\delta^{n-s-1}(\overline{z_r}(S\cup i)-\delta\overline{z_r}(S))$$
$$=\sum_{S\subseteq N\setminus i:s=r-1}\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}\delta^{n-r}\overline{z_r}(S\cup i)-\sum_{S\subseteq N\setminus i:s=r}\frac{r!(n-r-1)!}{n!}\delta^{n-r}\overline{z_r}(S)$$

1) 若 $r=1$，则

$$\mathrm{Sh}_i^{\delta}(\overline{z_r})=\frac{n-1}{n}\delta^{n-1}\mathrm{Sh}_i(v_r)-\frac{1}{n}\delta^{n-1}\sum_{j\in N\setminus i}\mathrm{Sh}_j(v_r)=\delta^{n-1}\mathrm{Sh}_i(v_r)$$

2) 若 $r>1$，则

$$\mathrm{Sh}_i^{\delta}(\overline{z_r})=\binom{n-1}{r-1}\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}\delta^{n-r}\times(n-1)\mathrm{Sh}_i(v_r)+\sum_{j\in N\setminus i}\binom{n-2}{r-2}\times\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}\delta^{n-r}(n-1)\mathrm{Sh}_j(v_r)-\sum_{j\in N\setminus i}\binom{n-2}{r-1}\frac{r!(n-r-1)!}{n!}\times\delta^{n-r}(n-1)\mathrm{Sh}_j(v_r)$$
$$=\frac{n-1}{n}\delta^{n-r}\mathrm{Sh}_i(v_r)+\frac{r-1}{n}\delta^{n-r}\sum_{j\in N\setminus i}\mathrm{Sh}_j(v_r)-\sum_{j\in N\setminus i}\frac{r}{n}\delta^{n-r}\mathrm{Sh}_j(v_r)$$
$$=\left(\frac{n-1}{n}-\frac{r-1}{n}+\frac{r}{n}\right)\delta^{n-r}\mathrm{Sh}_i(v_r)$$
$$=\delta^{n-r}\mathrm{Sh}_i(v_r)$$

综上所述，式(14)成立.

容易验证当 $\delta=1$ 时，定理 5 即退化为定理 2.

由定理 1 及定理 5 可得，对任意 $v\in\mathcal{G}^N$ 及 $i,j\in N$，都有

$$\mathrm{Sh}_i^{\delta}(v)-\mathrm{Sh}_j^{\delta}(v)=\sum_{r=1}^{n-1}\delta^{n-r}(\mathrm{Sh}_i(v_r)-\mathrm{Sh}_j(v_r))\tag{15}$$

2.5　Banzhaf 值与最小二乘预核仁分量差显式解析表达式

Shapley 值应用到投票表决情境时称为 Shapley-Shubik 权力指数[29]. 作为 Shapley-Shubik 权力指数的一个替代，Banzhaf[30] 在 1965 年引入了 Banzhaf 权力指数. 随后，Owen[8] 将 Banzhaf 权力指数扩展到了 TU 对策，此时 Banzhaf 权力指数称为 Banzhaf 值. 对任意 $v\in\mathcal{G}^N$ 及 $i\in N$，局中人 i 在 v 中的 Banzhaf 值分量为

$$\mathrm{Ba}_i(v)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{S\subseteq N\setminus i}(v(S\cup i)-v(S))$$

Banzhaf 值满足线性性及匿名性，但不满足有效性[31]，而最小二乘预核仁(least square prenucleolus)不仅满足这三条性质[2]，还能保持 Banzhaf 值的分量差[6,18]. 对任意 $v \in \mathcal{G}^N$ 及 $i \in N$，局中人 i 在 v 中的最小二乘预核仁分量为

$$\mathrm{LSPN}_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n2^{n-2}} \sum_{S \subseteq N: i \notin S} (n - s) \times (v(S \cup i) - v(S))$$

所谓保持分量差，是指存在映射 $k: \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}$，使得对任意 $v \in \mathcal{G}^N$ 及 $i \in N$，都有

$$\mathrm{LSPN}_i(v) - \mathrm{Ba}_i(v) = k(v)$$

定理6 对任意 $v \in \mathcal{G}^N$ 及 $r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$，

$$\mathbf{Ba}(\bar{z}_r) = \frac{r}{2^{n-2}} \binom{n-1}{r} \mathbf{Sh}(v_r) \tag{16}$$

证明 对任意 $i \in N$，

$$\mathrm{Ba}_i(\bar{z}_r) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{1}{2^{n-1}} (\bar{z}_r(S \cup i) - \bar{z}_r(S))$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus i: s = r-1} \bar{z}_r(S \cup i) - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus i: s = r} \bar{z}_r(S)$$

1) 若 $r = 1$，则

$$\mathrm{Ba}_i(\bar{z}_r) = \frac{n-1}{2^{n-1}} \mathrm{Sh}_i(v_r) - \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{j \in N \setminus i} \mathrm{Sh}_j(v_r) = \frac{n-1}{2^{n-2}} \mathrm{Sh}_i(v_r)$$

2) 若 $r > 1$，则

$$\mathrm{Ba}_i(\bar{z}_r) = \binom{n-1}{r-1} \frac{n-1}{2^{n-1}} \mathrm{Sh}_i(v_r) + \sum_{j \in N \setminus i} \binom{n-2}{r-2} \frac{n-1}{2^{n-1}} \mathrm{Sh}_j(v_r) - \binom{n-2}{r-1} \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{j \in N \setminus i} \mathrm{Sh}_j(v_r)$$
$$= \frac{n-1}{2^{n-1}} \left(\binom{n-1}{r-1} - \binom{n-2}{r-2} + \binom{n-2}{r-1} \right) \times \mathrm{Sh}_i(v_r)$$
$$= \frac{r}{2^{n-2}} \binom{n-1}{r} \mathrm{Sh}_i(v_r)$$

综上所述，式(16)成立.

由定理 1 及定理 6 可得，对任意 $v \in \mathcal{G}^N$ 及 $i, j \in N$，都有

$$\mathrm{Ba}_i(v) - \mathrm{Ba}_j(v) = \mathrm{LSPN}_i(v) - \mathrm{LSPN}_j(v)$$
$$= \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{r=1}^{n-1} r \binom{n-1}{r} (\mathrm{Sh}_i(v_r) - \mathrm{Sh}_j(v_r)) \tag{17}$$

3 简化算法及其与传统算法比较分析

3.1 简化算法

第 2 节给出了常见满足线性性及匿名性 TU 对策值分量差的显式解析表达式，当在需要同时计算出某个 TU 对策的多个满足线性性及匿名性的值时，调用这些表达式将极大的减少工作量.

算法1 令 f 是 $\mathcal{G}^N$ 上满足线性性及匿名性的值. 任取 $v \in \mathcal{G}^N$，$f(v)$ 可用如下过程计算:

1) 计算 $\mathbf{Sh}(v_r)$，$r \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$；

2) 计算分量差，即任取 $i \in N$，计算 $f_j(v)$ ($j \in N \setminus i$) 与 $f_i(v)$ 的差 d_{ji}. 特殊地，

2a) Shapley 值分量差用式(6)来计算;

2b) Solidarity 值分量差用式(8)计算;

2c) 均分 Shapley 值分量差用式(9)计算;

2d) 合意值分量差用式(10)计算;

2e) 广义 Solidarity 值分量差用式(13)计算;

2f) 贴现 Shapley 值分量差用式(15)计算;

2g) Banzhaf 值或最小二乘预核仁分量差用式(17)计算;

3) 计算 $f(v)$:

3a) 若待求值满足有效性，则利用有效性及步骤 2) 的结果完成计算，即通过解线性方程组

$$\begin{cases} \sum_{j \in N} f_j(v) = v(N); \\ f_j(v) - f_i(v) = d_{ji}, j \in N \setminus i \end{cases}$$

来得到 $f(v)$.

3b) 若待求值不满足有效性，则

3bi) 任取 $i \in N$，利用定义计算 $f_i(v)$；

3bii) 对任意 $j \in N \setminus i$，$f_j(v) = f_i(v) + d_{ji}$.

3.2 数值算例

现假设有若干家企业建立了长期合作关系，为了更好更快地分配合作收益或分摊合作成本，需要同时快速地计算出一类值，以便让每家企业的决策者定量地了解选择不同分配方法的后果，从而做出最终决策. 现实生活中这样的情境普遍存在，例如共同建造污水处理设备、空气净化设备、员工娱乐场所等等，这些情境都可以用 TU 对策来建

模. 下面以 3 家企业，$N=\{1,2,3\}$，共同建立污水处理设备为例来说明本文所提算法的计算过程.

例 1　假设 N 中的局中人最终建立的 TU 对策 $v\in\mathcal{G}^N$ 如下:

$$v(1)=3, v(2)=v(3)=4, v(1,2)=v(1,3)=5,$$
$$v(2,3)=6, v(1,2,3)=7$$

下面将利用算法 1 依次求出 v 的 Shapley 值、Solidarity 值、广义 Solidarity 值、贴现 Shapley 值、Banzhaf 值及最小二乘预核仁.

为此，下面先求 $\mathbf{Sh}(v_r)$. 当 $r=1$ 时，

$$v_1(1)=3\ v_1(2)=v_1(3)=4$$
$$v_1(1,2)=v_1(1,3)=v_1(2,3)=v_1(1,2,3)=0$$

于是由式(1)，$\mathbf{Sh}(v_1)=(-1/3,1/6,1/6)$. 同理，$\mathbf{Sh}(v_2)=(-1/3,1/6,1/6)$.

于是，由式(6)

$$\mathrm{Sh}_2(v)-\mathrm{Sh}_1(v)=\mathrm{Sh}_3(v)-\mathrm{Sh}_1(v)=1$$

而 Shapley 值满足有效性，即

$$\mathrm{Sh}_1(v)+\mathrm{Sh}_2(v)+\mathrm{Sh}_3(v)=7$$

联立本段的三式可得 $\mathbf{Sh}(v)=(5/3,8/3,8/3)$.

由式(8)

$$\mathrm{so}_2(v)-\mathrm{so}_1(v)=\mathrm{so}_3(v)-\mathrm{so}_1(v)=5/12$$

由有效性，$\mathbf{so}(v)=(37/18,89/36,89/36)$

由式(13)

$$\begin{aligned}\mathrm{so}_2^{\xi}(v)-\mathrm{so}_1^{\xi}(v)&=\mathrm{so}_3^{\xi}(v)-\mathrm{so}_1^{\xi}(v)\\&=(2-\xi_1^2-\xi_1)/2(1+\xi_1)\end{aligned}$$

由有效性即可求出

$$\mathrm{so}^{\xi}(v)=\left(\frac{\xi_1^2+8\xi_1+5}{3(\xi_1+1)},\frac{-\xi_1^2+13\xi_1+16}{6(\xi_1+1)},\frac{-\xi_1^2+13\xi_1+16}{6(\xi_1+1)}\right)$$

当 $\xi_1=0$ 时，$\mathbf{so}^{\xi}(v)=(5/3,8/3,8/3)=\mathbf{Sh}(v)$；当 $\xi_1=1/2$ 时，

$$\mathbf{so}^{\xi}(v)=(37/18,89/36,89/36)=\mathbf{so}(v);$$

当 $\xi_1=1$ 时，$\mathbf{so}^{\xi}(v)=(7/3,7/3,7/3)$，即均分值.

由式(15)

$$\begin{aligned}\mathrm{Sh}_2^{\delta}(v)-\mathrm{Sh}_1^{\delta}(v)&=\mathrm{Sh}_3^{\delta}(v)-\mathrm{Sh}_1^{\delta}(v)\\&=\delta^2/2+\delta/2\end{aligned}$$

由贴现 Shapley 值的定义

$$\mathrm{Sh}_1^{\delta}(v)=-\delta^2/3-\delta/3+7/3$$

从而

$$\mathrm{Sh}_2^{\delta}(v)=\mathrm{Sh}_3^{\delta}(v)=\delta^2/6+\delta/6+7/3$$

特殊地，当 $\delta=0$ 时，$\mathbf{Sh}^{\delta}(v)=(7/3,7/3,7/3)$，即均分值；当 $\delta=1$ 时，$\mathbf{Sh}^{\delta}(v)=(5/3,8/3,8/3)$，即 Shapley 值.

由式(17)

$$\mathrm{Ba}_2(v)-\mathrm{Ba}_1(v)=\mathrm{Ba}_3(v)-\mathrm{Ba}_1(v)=1$$

由 Banzhaf 值的定义，$\mathrm{Ba}_1(v)=3/2$. 从而，$\mathbf{Ba}(v)=(3/2,5/2,5/2)$. 由于最小二乘预核仁保持 Banzhaf 值的分量差，且满足有效性，故而 $\mathbf{LSPN}(v)=(5/3,8/3,8/3)=\mathbf{Sh}(v)$.

3.3　简化算法与传统算法比较分析

为了详细说明本文算法的优越性，下面将本文算法与传统算法进行比较分析.

1) 对任意 $v\in\mathcal{G}^N$，都有

$$v=v_1+v_2+\cdots+v_n$$

从而由线性性，

$$\mathbf{Sh}(v)=\mathbf{Sh}(v_1)+\mathbf{Sh}(v_2)+\cdots+\mathbf{Sh}(v_n)$$

于是，计算出所需的 $\mathbf{Sh}(v_r)$ ($r\in\{1,2,\cdots,n-1\}$) 的时间复杂度等价于计算出 $\mathbf{Sh}(v)$ 的时间复杂度.

2) 利用本文算法计算 Solidarity 值，需要做两次循环，一次关于局中人($i\in N$)，一次关于 $r\in\{1,\cdots,n-1\}$，因而时间复杂度为 $O(n^2)$；利用传统算法计算 Solidarity 值，需要做三次循环，一次关于局中人($i\in N$)，一次关于包含局中人的联盟($S\subseteq N: i\in S$)，一次关于各联盟的内部的局中人($j\in S$)，因而时间复杂度为 $O(n2^{n-1})$.

3) 同 Solidarity 值，利用本文算法计算广义 Solidarity 值的时间复杂度为 $O(n^2)$；采用定义计算广义 Solidarity 值的时间复杂度为 $O(n2^{n-1})$.

4) 利用本文算法计算贴现 Shapley 值的时间复杂度为 $O(n^2)$；采用定义计算贴现 Shapley 值需要做两次循环，一次关于局中人($i\in N$)，一次关于不包含 i 的联盟($S\subseteq N\backslash i$)，因而时间复杂度为 $O(n2^{n-1})$.

5) 利用本文算法计算最小二乘预核仁的时间复杂度为 $O(n^2)$；采用定义计算最小二乘预核仁需要做两次循环，一次关于局中人($i\in N$)，一次关于不包含 i 的联盟($S\subseteq N\backslash i$)，因而时间复杂度为 $O(n2^{n-1})$.

6) 利用本文算法计算 Banzhaf 值的时间复杂

度为 $O(n^2)$；采用定义计算 Banzhaf 值需要做两次循环，一次关于局中人($i \in N$)，一次关于不包含 i 的联盟($S \subseteq N\backslash i$)，因而时间复杂度为 $O(n2^{n-1})$.

通过以上分析可以发现，在同时计算多个满足线性性及匿名性的 TU 对策值时，从第二个值开始，简化算法可以将时间复杂度从 $O(n2^{n-1})$ 降低到 $O(n^2)$，从而显著提高了计算效率.

参考文献:

[1] 曾银莲，李 军，冯海荣. 随机需求环境下零担货物运输合作[J]. 管理科学学报，2015，18(7)：48 – 58.
Zeng Yinlian, Li Jun, Feng Hairong. Collaboration in less-than-truckload transportation with stochastic demand[J]. Journal of Management Sciences in China, 2015, 18(7): 48 – 58. (in Chinese)

[2] Shapley L S. A value for n-person games[C]. Contributions to the Theory of Games Ⅱ. Princeton: Princeton University Press, 1953: 307 – 317.

[3] Owen G. Multilinear extensions and the Banzhaf value[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1975, 22(4): 741 – 750.

[4] Nowak A S, Radzik T. A solidarity value for n-person transferable utility games[J]. International Journal of Game Theory, 1994, 23(1): 43 – 48.

[5] Joosten R. Dynamics, Equiibria and Values[D]. The Netherlands: Maastricht University, 1996.

[6] Ruiz L M, Valenciano F, Zarzuelo J M. The least square prenucleolus and the least square nucleolus. Two values for TU games based on the excess vector[J]. International Journal of Games Theory, 1996, 25(1): 113 – 134.

[7] Ju Y, Borm P, Ruys P. The consensus value: A new solution concept for cooperative games[J]. Social Choice and Welfare, 2007, 28(4): 685 – 703.

[8] Casajus A, Huettner F. On a class of solidarity values[J]. European Journal of Operational Research, 2014, 236(2): 583 – 591. 999: 91 – 101.

[9] Juarez R, Sanchez-Sanchez F, Hernandez-Lamoneda L. Solutions without dummy axiom for TU cooperative games[J]. Economics Bulletin, 2008, 3: 1 – 9.

[10] Nembua C C, Andjiga N G. Linear, efficient and symmetric values for TU-games[J]. Economics Bulletin, 2008, 3(71): 1 – 10.

[11] Nembua C C. Linear efficient and symmetric values for TU-games: Sharing the joint gain of cooperation[J]. Games and Economic Behavior, 2012, 74(1): 431 – 433.

[12] Radzik T, Driessen T. On a family of values for TU-games generalizing the Shapley value[J]. Mathematical Social Sciences, 2013, 65(2): 105 – 111.

[13] Driessen T, Radzik T. A weighted pseudo-potential approach to values for TU-games[J]. International Transactions in Operational Research, 2002, 9(3): 303 – 320.

[14] Driessen T, Radzik T. Extensions of Hart and Mas-Colell's consistency to efficient, linear, and symmetric values for TU-Games[C]. ICM2002 GTA proceedings volume, 2002: 129 – 146.

[15] Malawski M. "Procedural" values for cooperative games[J]. International Journal of Game Theory, 2013, 42(1): 305 – 324.

[16] Béal S, Rémila E, Solal P. A decomposition of the space of TU-games using addition and transfer invariance[J]. Discrete Applied Mathematics, 2015, 184: 1 – 13.

[17] Rojas J R, Sanchez F S. On the inverse problem for a subclass of linear, symmetric and efficient values of cooperative TU games[J]. Operations Research Letters, 2016, 44(5): 618 – 621.

[18] Hernández-Lamoneda L, Sánchez-Sánchez F. Rankings and values for team games[J]. International Journal of Games Theory, 2010, 39(3): 319 – 350.

[19] Thomson W. On the axiomatic method and its recent applications to game theory and resource allocation[J]. Social Choice and Welfare, 2001, 18(2): 327 – 386.

[20] Hernández-Lamoneda L, Juárez R, Sánchez-Sánchez F. Dissection of solutions in cooperative game theory using represen-

tation techniques [J]. International Journal of Games Theory, 2007, 35(3): 395 – 426.

[21] Kamijo Y, Kongo T. Whose deletion does not affect your payoff? The difference between the Shapley value, the egalitarian value, the solidarity value, and the Banzhaf value [J]. European Journal of Operational Research, 2012, 216(3): 638 – 646.

[22] Xu G J, Dai H, Hou D S, et al. A-potential function and a non-cooperative foundation for the Solidarity value [J]. Operations Research Letters, 2015, 44(1): 86 – 91.

[23] van den Brink R, Ju Y. Reconciling marginalism with egalitarianism: Consistency, monotonicity, and implementation of egalitarian Shapley values [J]. Social Choice and Welfare, 2013, 40(3): 693 – 714.

[24] Casajus A, Huettner F. Null players, solidarity, and the egalitarian Shapley values [J]. Journal of Mathematical Economics, 2013, 49(1): 58 – 61.

[25] Casajus A, Huettner F. Weakly monotonic solutions for cooperative games [J]. Journal of Economic Theory, 2014, 154: 162 – 172.

[26] van den Brink, Funaki Y. Implementation and axiomatization of discounted Shapley values [J]. Social Choice and Welfare, 2015, 45(2): 1 – 16.

[27] Calvo E, Gutiérrez-López E. A strategic approach for the discounted Shapley values [J]. Theory and Decision, 2016, 80(2): 1 – 23.

[28] Kawamori T. Hart-Mas-Colell implementation of the discounted Shapley value [J]. Theory and Decision, 2016, 81: 1 – 13.

[29] Shapley L S, Shubik M. A method for evaluating the distribution of power in a committee system [J]. American Political Science Review, 1954, 48(3): 787 – 792.

[30] Banzhaf J F. Weighted voting does not work: A mathematical analysis [J]. Rutgers Law Review, 1965, 19: 317 – 343.

[31] Haller H. Collusion properties of values [J]. International Journal of Game Theory, 1994, 23(3): 261 – 281.

A component differences based simplified algorithm for linear and anonymous values of cooperative games

HU Xun-feng[1], *LI Deng-feng*[1], *LIU Jia-cai*[1,2], *ZHANG Qing*[1,3]

1. School of Economics and Management, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China;
2. School of Traffic and Civil Engineering, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou 571158, China

Abstract: By giving explicit analytic expressions for the component differences of the Shapley value, egalitarian Shapley value, discounted Shapley value, Solidarity value, generalized Solidarity value, consensus value, Banzhaf value, and least square prenucleolus, this paper proposes a simplified algorithm for simultaneous calculation of these linear and anonymous values of transferable utility cooperative games. Specially, the algorithm is also suitable for calculating more than one of them. So as to illustrate the computational process and the advantages of the algorithm, a numerical example, as well as comparison between the simplified and traditional algorithms, is provided. Results show that the simplified algorithm can decrease the time complexity of calculating more than one values contemporaneously.

Key words: cooperative game; linearity; anonymity; value; algorithm