基于竞争差分析的占线单向交易策略①

王　玮[1]，蓝颖杰[2*]，严建援[1]
(1. 南开大学商学院，天津 300071; 2. 北京大学汇丰商学院，深圳 518055)

摘要：针对交易者事先仅知道价格波动范围的占线单向交易问题，基于Savage后悔值准则提出了竞争差分析方法，通过引入一个假想的能够控制价格的“对手”将原来的单人决策问题转化为双人零和博弈问题. 与竞争比分析相比，竞争差分析由于目标函数的数学形式更简单，因而可以直接采用逆向归纳法求解获得使最大后悔值(竞争差)最小化的稳健的占线交易策略，并找出对于交易者而言所有可能的最糟糕情况，而不必像竞争比分析那样需要事先猜测最优占线策略的特征; 此外，数值模拟结果表明，基于竞争差分析的占线算法更节省计算时间，且在解决收益最大化问题时不像竞争比分析那样过于保守，一般具有更好的期望绩效.

关键词：单向交易; 占线算法; 竞争差分析; 竞争比分析; mini-max后悔值准则
中图分类号：F224.3　　文献标识码：A　　文章编号：1007-9807(2017)09-0015-10

0 引　言

在单向交易问题中，交易者需要在给定期限内卖出(或买入)一定数量的商品，而商品的市场价格是波动的，典型的例子包括库存采购、商品销售、股票交易、外汇兑换，等等. 该决策问题的难易程度取决于交易者知道多少关于未来价格的信息. 最理想的情况是事先知道未来价格波动的全部信息，那么只需要等到价格最高(或最低)时全部卖出(或买入)，称该策略为最优离线交易策略. 然而，这种完全信息的情况在现实中几乎不存在. 已有文献通常假设未来价格服从某种概率分布，并基于贝叶斯法则给出交易策略[1,2]. 然而，要准确估计未来价格的分布也是困难的，一方面是因为历史价格信息可能缺失(比如新产品、新市场)，另一方面是因为价格波动可能并不是稳定的随机过程. 因此，有必要考虑交易者只拥有有限价格信息的情况. 本文假设交易者只知道未来价格波动的范围，即价格波动的上、下限，目标是找到一种占线交易策略(或占线算法)，根据该策略就能在每一期价格公布时立即确定本期的交易量，尽管未来各期的价格仍然未知.

El-Yaniv等[3]最早考虑仅知道价格波动范围的单向交易问题，并采用了Sleator和Tarjan[4]提出的竞争分析(competitive analysis)方法，用占线算法与最优离线算法绩效的比值来衡量占线算法的表现. 由于目标函数的数学形式复杂，文献[3]采用的求解办法是，先猜测最优占线算法的结构特征，并基于此求解出关键参数——目标竞争比，然后证明算法的最优性. 然而，这种办法会导致所得到的占线交易策略无法根据实际价格进行调整改进，也会遗漏掉一些可能的均衡点，而且面对复杂问题时事先猜测最优占线算法的特征并不容易. 此外，竞争比分析也因为过于保守而受到诟病，虽然部分文献对此进行了一些修正，但仍拘泥于以竞争比作为在线算法的绩效评价指标.

本文首次将后悔值准则应用于解决仅知道价格波动范围的单向交易问题，提出了竞争差分析

① 收稿日期：2014-03-19; 修订日期：2016-01-08.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(71471003).
通讯作者：蓝颖杰(1974—)，男，湖南华容人，博士，副教授. ylan@phbs.pku.edu.cn

方法，并借助该方法找到了稳健的最优占线交易策略. 与传统的竞争比分析比较，竞争差分析具有3 方面的优势: 一是求解过程更简便，因为竞争差分析下目标函数的数学形式更简单，可以直接采用逆向归纳法求解，获得最优占线交易策略并找出对于交易者而言所有可能的最糟糕情况，而不必像竞争比分析那样需要事先对最优策略进行猜测; 二是基于竞争差分析的调整型占线策略比基于竞争比分析的调整型占线策略节省计算时间; 三是在解决收益最大化问题时基于竞争差分析的占线交易策略不像基于竞争比分析的占线策略那样过于保守，一般来说具有更好的期望绩效，能达到更高的平均收益，且在交易期限较长时收益的标准差也更小. 然而，在解决成本最小化问题时，竞争比分析的表现相对更好，能达到更低的平均成本，且在交易期限较长时成本的标准差也更小. 本文认为导致竞争差与竞争比分析在解决不同类型的问题时绩效差别的根本原因在于，竞争差与竞争比分析下交易者的风险厌恶程度不同.

1 相关研究综述

对于单向交易问题，文献 [3] 针对汇率上下限固定的情形提出了基于威胁的外汇兑换策略，只有当期汇率高于历史最高汇率时才考虑兑换，且兑换的货币量要恰好保证即便剩余各期汇率永久地降低至下限也能恰好维持目标竞争比，这里目标竞争比是交易者在最糟糕的价格序列下所能达到的最小竞争比. 文献 [5,6] 考虑了下一期的价格上下限依赖于本期价格时的最优确定型和随机型交易策略. 文献 [7] 基于竞争比分析方法研究了存在固定采购成本和库存持有成本时的最优占线库存控制策略，文献 [8] 改进了文献 [7] 所给出的库存容量有限时竞争比的上限.

与单向交易问题最直接相关的一类问题是时间序列搜索问题. 在最基本的一次搜索问题里，交易者需要一次完成全部交易任务，文献 [3] 针对各期价格上下限固定的情形提出了确定型以及随机型最优保留价格策略; 文献 [9] 考虑了各期价格下限固定、价格上限随时间递减的情形，针对连续时间模型和离散时间模型分别设计了最优确定型策略和最优随机型策略; 文献 [10] 引入了随价格递增且随时间递减的利润函数，从而将文献 [3] 的研究一般化. 文献 [11] 考虑在一定时期内交易 k 种商品、每期最多交易一种商品的问题，即搜索价格序列里最高或最低的 k 个价格，称为 k 搜索(k-search) 问题，针对最大化和最小化问题分别给出了确定型以及随机型最优策略. 文献 [12] 在此基础上考虑了每期可交易多种商品的问题. 文献 [13] 考虑了商品逐期逐个到达且存储能力有限的情况下如何在 k 期内交易 k 种商品的问题，对比分析了 3 种不同的占线算法.

上述与单向交易问题相关的研究都采用了竞争比分析方法，该方法也被用于收益管理[14] 、在线设备租赁[15,16] 等运营管理领域的问题. 然而，竞争比分析方法却常常由于过于保守而遭到批判. 一些研究试图针对这一点对竞争比分析方法进行改进，详细的综述见文献 [17] . 文献 [18] 对比了时间序列搜索问题占线算法的多种衡量指标. 文献 [19] 采用了平均情况分析(average-case analysis) ，针对汇率上限服从一定随机分布的单向外汇兑换问题，采用离线算法与占线算法收益之间的多种比值形式作为优化目标，给出了相应的最优兑换策略并进行了对比. 文献 [20] 考虑了交易者具有各种价格信息的不同情况，通过对比各种情形下的理论竞争比与模拟实验得到的实际竞争比，来衡量各种关于价格的信息的价值. 目前这些改进竞争比分析的尝试大体上都依然采用了比值形式作为目标函数，且大多需要获得关于价格的更多信息，例如，价格的波动服从某一类随机分布或者价格上限服从某一随机分布. 文献 [21] 对国外关于单向交易问题的相关研究进行了详细的综述. 本文与文献 [3] 一样假设交易者仅知道价格波动范围，但是采用占线算法与离线算法表现的差值作为目标函数，不仅简化了分析求解过程，且在解决收益最大化问题时不会像竞争比分析那样过于保守.

2 竞争差分析

本文所采用的基于最小后悔值准则(savage 准则) 的分析方法与文献 [3，4] 所采用的方法

基本目标一致，也就是使占线算法的表现(收益或成本)在所有可能的输入信息的情况下都尽量接近最优离线算法的表现，只不过本文用这两类算法表现的差值(即后悔值)来衡量接近程度，而文献[3，4]用其比值来衡量接近程度，为此，将本文提出的方法称为竞争差分析(competitive difference analysis，CDA)，而把文献[3，4]的方法称为竞争比分析(competitive ratio analysis，CRA). 如果将信息输入序列为 I 时占线算法的表现记为 $ALG(I)$，最优离线算法的表现记为 $OPT(I)$，则收入最大化与成本最小化这两类问题的竞争差与竞争比的定义如表 1 所示.

表 1　竞争差与竞争比的定义

Table 1 Definitions of competitive difference and competitive ratio

	ALG 的竞争差	ALG 的竞争比
收益最大化	$D(ALG) = \max_I [OPT(I) - ALG(I)]$	$R(ALG) = \max_I (OPT(I)/ALG(I))$
成本最小化	$D(ALG) = \max_I [ALG(I) - OPT(I)]$	$R(ALG) = \max_I (ALG(I)/OPT(I))$

与竞争比分析类似，竞争差分析也是通过引入一个假想的“对手”来控制输入信息 I，从而把不确定环境下的单人序贯决策问题转化为双人零和博弈问题. “对手”从所有可能的输入信息序列中选择使离线算法与占线算法之间的收益差值(即后悔值)最大的那个序列，该最大后悔值又被称为算法的竞争差. 交易者需要从所有可能的占线算法中选择具有最小竞争差的那一种.

竞争差分析与竞争比分析在目标函数上的不同，实质上代表了两种方法下交易者风险偏好程度的差别. 以收益最大化问题为例，竞争比分析下的目标函数 $OPT(I)/ALG(I)$ 等价于 $\ln[OPT(I)/ALG(I)]$，即 $\ln OPT(I) - \ln ALG(I)$. 也就是说，具有线性效用函数的竞争比分析方法等价于具有对数效用函数的竞争差分析方法，因此，竞争差分析相比竞争比分析而言更偏好风险. 相反，面对成本最小化问题时，竞争差分析相比竞争比分析而言更厌恶风险(因为成本给交易者带来的是负效用).

下面以最简单的两期单向交易问题为例，对比竞争差分析和竞争比分析. 假设交易者需要在两期内完成总量为 1 的交易任务，已知价格波动范围为 $[m, M]$. 将两期的价格分别记为 p_1 和 p_2，两期的交易量分别记为 k_1 和 k_2. 交易者与“对手”之间博弈的顺序为: 第 1 期，“对手”确定 p_1，然后交易者确定 k_1；第 2 期，“对手”确定 p_2，然后交易者确定 k_2. 以收益最大化问题为例，竞争差分析下的目标函数为 $\max(p_1, p_2) - (p_1 k_1 + p_2 k_2)$，而竞争比分析下的目标函数为 $\frac{\max(p_1, p_2)}{p_1 k_1 + p_2 k_2}$，其中，$k_2 = 1 - k_1$. 采用逆向归纳法求解博弈，就能得到竞争差分析和竞争比分析下的结果，如表 2 所示，其中上角标 S 表示销售问题，上角标 B 表示采购问题. 对比发现: 给定 p_1 时，$k_1^S < \hat{k}_1^S$，$k_1^B > \hat{k}_1^B$；另外，$p_1^{S^*} > \hat{p}_1^{S^*}$，$p_1^{B^*} > \hat{p}_1^{B^*}$. 这验证了上述分析中指出的两种方法下交易者风险厌恶程度的差异.

当交易期数较多时，竞争比分析由于目标函数形式复杂，难以实施逆向归纳法，往往需要像文献[3]一样借助于事先对占线算法结构和特征的猜测来进行分析求解. 相比之下，竞争差分析由于目标函数的数学形式更简洁，交易期数较多的情况下依然可以通过逆向归纳法直接求解，具体的分析过程见本文第 3 节. 竞争差分析除了这一优势外，第 4 节还将展示其占线算法在计算时间以及求解收益最大化问题时的绩效方面的优势. 值得注意的是，竞争差分析与竞争比分析相比的主要局限性体现在: 当现实应用环境下所关注的相对绩效更适合用相对百分比来衡量时，竞争差分析获得的相对百分比保障自然不如竞争比分析得到的结果；此外，正如本文将在实验部分指出的，对于成本最小化问题，基于竞争差分析的占线算法的表现不如基于竞争比分析的占线算法.

表 2 两期单向交易问题的竞争差与竞争比分析结果

Table 2 CDA and CRA for the two-period one-way trading problems

	收益最大化(销售问题)		成本最小化(采购问题)	
	竞争差分析	竞争比分析	竞争差分析	竞争比分析
占线交易策略	$k_1^S = \frac{p_1 - m}{M - m}$ $k_2^S = \frac{M - p_1}{M - m}$	$\hat{k}_1^S = \frac{M(p_1 - m)}{2Mp_1 - Mm - p_1^2}$ $\hat{k}_2^S = \frac{(M - p_1)p_1}{2Mp_1 - Mm - p_1^2}$	$k_1^B = \frac{M - p_1}{M - m}$ $k_2^B = \frac{p_1 - m}{M - m}$	$\hat{k}_1^B = \frac{m(M - p_1)}{p_1^2 + Mm - 2mp_1}$ $\hat{k}_2^B = \frac{(p_1 - m)p_1}{p_1^2 + Mm - 2mp_1}$
竞争差/竞争比	$D^S = \frac{M - m}{4}$	$R^S = \frac{2\sqrt{M}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}}$	$D^B = \frac{M - m}{4}$	$R^B = \frac{\sqrt{M} + \sqrt{m}}{2\sqrt{m}}$
均衡价格	$p_1^{S^*} = \frac{M + m}{2}$ $p_2^{S^*} = M$ 或 m	$\hat{p}_1^{S^*} = \sqrt{Mm}$ $\hat{p}_2^{S^*} = M$ 或 m	$p_1^{B^*} = \frac{M + m}{2}$ $p_2^{B^*} = M$ 或 m	$\hat{p}_1^{B^*} = \sqrt{Mm}$ $\hat{p}_2^{B^*} = M$ 或 m
均衡交易量	$k_1^{S^*} = k_2^{S^*} = 1/2$	$\hat{k}_1^{S^*} = \hat{k}_2^{S^*} = 1/2$	$k_1^{B^*} = k_2^{B^*} = 1/2$	$\hat{k}_1^{B^*} = \hat{k}_2^{B^*} = 1/2$

3 单向交易问题的竞争差分析

在单向交易问题中，交易者需要在离散的 T 期内销售(或采购)总量恰好为 1 的商品，$T \geqslant 2$，每一期记为 $t \in \{1,2,\cdots,T\}$. 商品是连续可分的，比如汽油、煤等. 商品只能单向交易：对于销售问题，只可卖出不可买入；而对于采购问题，只可买入而不可卖出. 每一期都有惟一的交易价格，将第 t 期的价格记为 p_t. 不同交易期的价格可以在一定范围内波动，假设交易者事先知道价格波动的范围为 $[m,M]$，并且在每一交易期开始时获知本期的准确价格. 交易者需要在得知本期的价格之后立即决定本期的交易量，因为一旦本期结束则本期价格失效，将第 t 期的交易量记为 k_t. 当第 T 期(最后一期)到来时，无论价格如何，交易者必须完成全部交易任务. 这里忽略价格信息采集成本以及交易成本. 销售问题中交易者的目标是收益最大化，而采购问题中交易者的目标是成本最小化. 下面仅以收益最大化问题为例求解博弈均衡. 成本最小化问题在结构上和收益最大化问题相似，其分析过程也类似.

对于收益最大化问题(上角标“S”表示)，在每一个交易期里，先是“对手”设定该期的价格，然后交易者确定该期的交易量. 把从第 t 期到最后一期双方的博弈称为第 t 期的子博弈问题，其状态参数只有 3 个：前 $t-1$ 期的累积交易量 $K_{t-1} = \sum_{i=1}^{t-1} k_i$、前 $t-1$ 期的累积交易金额 $C_{t-1} = \sum_{i=1}^{t-1} p_i k_i$，以及前 $t-1$ 期里的最高价格 $\bar{p}_{t-1} = \max(p_1, p_2, \cdots, p_{t-1})$. 给定前 $t-1$ 期的博弈过程，交易者通过第 t 期到最后一期与“对手”的博弈所能达到的竞争差 D_t^S 可以表示为状态参数的函数，即 $D_t^S(K_{t-1}, C_{t-1}, \bar{p}_{t-1})$，而相邻两期状态转换公式为

$$\begin{cases} K_t = K_{t-1} + k_t \\ C_t = C_{t-1} + p_t k_t \\ \bar{p}_t = \max(\bar{p}_{t-1}, p_t) \end{cases} \tag{1}$$

基于逆向归纳法的求解思想，将第 t 期与第 $t+1$ 期之间的状态转换公式带入第 $t+1$ 期的子博弈问题对应的竞争差 D_{t+1}^S，就得到第 t 期子博弈问题的目标函数. 基于此目标函数首先求解交易者选择销售量 k_t 的决策，然后求解“对手”选择价格 p_t 的决策，从而得到第 t 期子博弈问题对应的最优竞争差 D_t^S. 由此得到下面的递归定义式

$$D_t^S(K_{t-1}, C_{t-1}, \bar{p}_{t-1}) = \max_{p_t \in [m,M]} \left[\min_{k_t \in [0, 1-K_{t-1}]} D_{t+1}^S(K_{t-1} + k_t, C_{t-1} + p_t k_t, \max(\bar{p}_{t-1}, p_t)) \right] \tag{2}$$

而第 T 期(最后一期)必须完成所有销售任务，即 $k_T = 1 - K_{T-1}$，因此

$$D_T^S(K_{T-1}, C_{T-1}, \bar{p}_{T-1}) = \max_{p_T \in [m,M]} \left[\max(\bar{p}_{T-1}, p_T) - (C_{T-1} + p_T(1 - K_{T-1})) \right] \tag{3}$$

式(2)右端的两层优化问题对应着博弈双方的决策. 为了统一表述,定义第 1 期子问题的状态参数为 $\bar{p}_0 = m$,$K_0 = 0$,$C_0 = 0$. 采用逆向归纳法求解式(2)和式(3)所示的博弈问题,就可以得到第 t($1 \leqslant t \leqslant T$)期交易者的最优销售量反应函数为

$$k_t^{\mathrm{S}} = \begin{cases} (\bar{K}_t^{\mathrm{S}} - K_{t-1})^+, & \text{若 } p_t > m \\ [0,(\bar{K}_t^{\mathrm{S}} - K_{t-2})^+], & \text{若 } p_t = m \end{cases} \tag{4}$$

其中 $x^+ = \max(x,0)$,且

$$\bar{K}_t^{\mathrm{S}} = (T-t)\left(\frac{\bar{p}_t - m}{M-m}\right)^{1/(T-t)} - (T-t-1) \tag{5}$$

式(4)即基于竞争差分析的占线算法(称为算法 I),$\bar{K}_t^{\mathrm{S}}$ 是其核心要素,称之为累积交易控制量,代表了在给定的当期价格下(当期价格为 m 除外)交易者期末应该达到的累积交易量水平. 累积交易控制量 $\bar{K}_t^{\mathrm{S}}$ 具有以下一些基本性质. 第 1,$\bar{K}_t^{\mathrm{S}} \leqslant 1$,且 $\bar{K}_t^{\mathrm{S}} = 1$ 在 $\bar{p}_t = M$ 时取得,这意味着,算法 I 会充分利用价格有利的销售机会. 第 2,$\bar{K}_t^{\mathrm{S}} > 0$ 的条件为

$$\bar{p}_t > m + (M-m)\left(\frac{T-t-1}{T-t}\right)^{T-t}$$

由于该不等式的左边关于 t 递增,而右边关于 t 递减,所以,如果某一期的累积交易控制量大于 0,则后续各期的累积交易控制量均大于 0. 第 3,$\bar{K}_t^{\mathrm{S}}$ 关于 t 单调递增,并且除了在末尾的一些交易期内累积交易控制量有可能平稳保持为 1 这种特殊情形之外,累积交易控制量在其他交易期内总是关于 t 严格单调递增. 可见,即便本期价格低于历史最高价格,甚至低至下限 m,本期也有可能销售一定量的商品,只不过此时的销售量很小. 这与文献[3]基于威胁的占线交易策略不同,后者的第一条交易规则就是只有遇到比历史最高价格更高的价格时才考虑销售.

采用逆向归纳法所得到的第 t($1 \leqslant t \leqslant T$)期"对手"的最优价格反应函数为

$$p_t^{\mathrm{S}} = \begin{cases} m + (M-m)\left(\dfrac{T-t+K_{t-1}}{T-t+1}\right)^{T-t}, & \text{若 } K_{t-1} > \bar{K}_{t-1}^{\mathrm{S}} \\ m + (M-m)\left(\dfrac{T-t+K_{t-1}}{T-t+1}\right)^{T-t} \text{或 } m, & \text{若 } K_{t-1} = \bar{K}_{t-1}^{\mathrm{S}} \\ m, & \text{若 } K_{t-1} < \bar{K}_{t-1}^{\mathrm{S}} \end{cases} \tag{6}$$

从式(6)可知,如果交易者上一期超过了累积交易控制量,则"对手"本期将价格定得高于 m,称之为交易过量价格;如果交易者上一期未达到累积交易控制量,则"对手"本期将价格定为 m,称之为交易不足价格;如果交易者上一期恰好达到累积交易控制量,则"对手"本期可以选择上述两种价格中的任何一种,所达到的竞争差相同.

第 t($1 \leqslant t \leqslant T$)期的子问题经"对手"和交易者各自优化之后得到的竞争差为

$$D_t^{\mathrm{S}} = \begin{cases} mK_{t-1} - C_{t-1} + (M-m)\left(\dfrac{T-t+K_{t-1}}{T-t+1}\right)^{T-t+1}, & \text{若 } K_{t-1} \geqslant \bar{K}_{t-1}^{\mathrm{S}} \\ mK_{t-1} - C_{t-1} + \bar{p}_{t-1} - m, & \text{若 } K_{t-1} < \bar{K}_{t-1}^{\mathrm{S}} \end{cases} \tag{7}$$

根据式(7),第 1 期交易者可以达到的最小竞争差 D_1^{S} 也就是整个交易过程交易者可以达到的最小竞争差 D^*. 算法 I 的核心性质如定理 1 所述.

定理 1　给定交易期限 T 和价格波动范围 $[m,M]$,算法 I 的竞争差为 $D^* = (M-m) \times \left(\frac{T-1}{T}\right)^T$,且不存在竞争差小于 D^* 的占线算法.

定理 1 指出了算法 I 的两个重要性质——稳健性和最优性. 算法 I 的稳健性体现在无论价格在范围 $[m,M]$ 内如何波动,算法 I 能够保证实际销售收益至多比离线算法的收益低 D^*. 这是因为,D^* 是当"对手"各期都采取最优价格时算法 I 达到的竞争差,一旦"对手"偏离最优价格(价格任意波动),也就意味着"对手"没有达到其最大化竞争差的目的,所以任意价格路径下算法 I 的竞争差一定不超过 D^*. 注意到,D^* 与 $M-m$ 成正比,并随着 T 递增,当 $T \to \infty$ 时,$D^{*\infty} = (M-m)/\mathrm{e}$. 也就是说,当价格波动范围较小、交易期限较短时,算法 I 的表现更好. 另外,算法 I 是基

于竞争差分析的最优占线交易策略，因为任意其他的占线算法实际上意味着交易者未达到最小化竞争差的目的，所以相应的竞争差一定超过 D^* .

根据交易者的最优销售量反应函数式(4) 与“对手”的最优价格反应函数式(6) 求解，得到第 t 期($1 \leqslant t \leqslant T$) 均衡状态下的价格和销售量如下

$$p_t^{S^*} = \begin{cases} m + (M - m)\left(\dfrac{\bar{p}_{t-1} - m}{M - m}\right)^{\frac{T-t}{T-t+1}} \text{ 或 } m, & \text{若 } K_{t-1} = \bar{K}_{t-1}^{S} \\ m, & \text{若 } K_{t-1} < \bar{K}_{t-1}^{S} \end{cases} \tag{8}$$

$$k_t^{S^*} = \begin{cases} \dfrac{1 - K_{T-t}}{T - t + 1}, & \text{若 } p_t = m + (M - m)\left(\dfrac{\bar{p}_{T-t} - m}{M - m}\right)^{\frac{T-t}{T-t+1}} \\ [0, (\bar{K}_t^S - K_{t-1})^+], & \text{若 } p_t = m \end{cases} \tag{9}$$

均衡状态下的价格路径和销售量的含义如定理 2 和定理 3 所述. 其中，均衡价格路径指出了对于交易者而言最糟糕的情况是什么，而均衡交易量则指出了在最糟糕的情况下交易者的最优策略是什么.

定理 2 (均衡价格路径) 均衡状态下的价格路径不唯一，总共有 2^{T-1} 种可能性. 第 1 期的均衡定价为

$$p_1^{S^*} = m + (M - m)\left(\frac{T - 1}{T}\right)^{T-1}$$

后续各期的均衡定价与上一期累积交易量有关. 如果上一期的累积交易量恰好达到累积交易控制量，则该期的均衡价格为 $m + (M - m)\left(\dfrac{\bar{p}_{t-1} - m}{M - m}\right)^{\frac{T-1}{T-t+1}}$ 或者 m; 如果上一期的累积交易量低于累积交易控制量，则该期均衡价格为下限 m.

图 1 是用二叉树表示定理 2 所描述的均衡价格路径的示例，交易期限 $T = 4$. 二叉树的每 1 层对应 1 个交易期; 结点表示均衡价格，其中空心圆表示交易不足价格，实心圆表示交易过量价格; 每个结点有一个或两个子树，子树代表了相邻两期的均衡价格走向，其中，从空心圆指向实心圆的虚线表示，只有当交易者面对价格 m 时达到累积交易控制量，下一期的价格才有可能上升. 从根节点开始沿着子树一直走到树的底层所经历的所有结点构成一条均衡价格路径. 可以观察到，除了第一期之外，各期都有两个可能的均衡价格，这其实反映了“对手”针对交易者上一期的销售量决策所制造的两种价格威胁，以避免交易者上一期销售过多或过少. 由于第 1 期没有上一期，“对手”无需制造价格威胁，所以其均衡价格唯一.

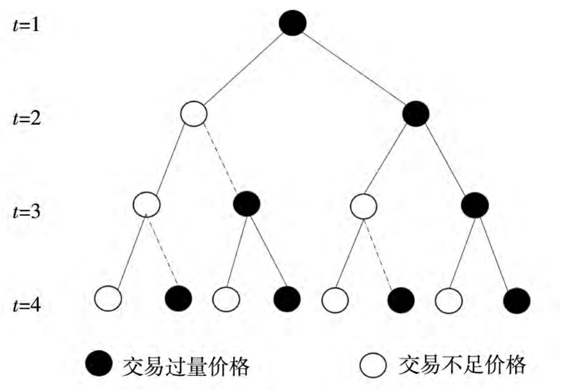


图 1　单向交易问题均衡价格路径的二叉树表示($T=4$)

Fig. 1 Equilibrium prices of the one-way trading problem in binary tree($T=4$)

值得一提的是，文献[3] 只找到了类似于图 1 中完全由实线构成的均衡价格路径，即价格路径要么逐期递增至 M，要么在任意一期(除了第 1 期) 永久性地下降至 m. 文献[3] 之所以漏掉了图 1 中含虚线的均衡价格路径，根本原因在于其第 1 条交易规则就是“只有价格上升才考虑销售”. 进一步，引理 1 给出了竞争差分析与竞争比分析的代表性均衡价格路径的对比结果.

引理 1　竞争差分析与竞争比分析下逐期递增的那条均衡价格路径相比，除了最后一期两者的均衡价格都是 M 外，其他各期前者的均衡价格比后者的高.

对于收益最大化问题，逐期递增的那条均衡价格路径代表了交易者对于未来高价的保护力度，该价格路径越高表示交易者越愿意等待未来的高价，即越冒险. 引理 1 意味着基于竞争差分析的交易者比基于竞争比分析的交易者更加冒险，这与本文第 2 节的分析结论一致.

定理 3(均衡交易量)　若当期均衡价格为

下限 m，则当期均衡交易量可以取区间 [0,$(\overline{K}_t^S - K_{t-1})^+$] 内的任意值，且一定低于按照剩余各期等量交易的原则所确定的交易量; 否则，交易者按照剩余各期等量交易的原则确定当期均衡交易量.

定理 3 的结论与文献 [3] 的结论一致，指出在一般的均衡价格下(未遇到价格上下限)，交易者的均衡交易策略遵循一条传统的投资观点——平均成本法(dollar cost averaging，DCA)，又称为“懒人理财术”或“定期定额投资法”，是指每天投资固定的等量资产.

4 数值模拟

本节将通过数值模拟来比较基于竞争差分析和竞争比分析的占线算法的绩效，对比的 5 种算法如表 3 所示. 其中，调整型占线算法是指每一期交易者都会根据本期的实际价格调整目标竞争差/比; 非调整型占线算法是指交易者各期始终维持同一个目标竞争差/比. 算法 I 如本文中式(4)所示. 算法 II 是在算法 I 的基础上人为加入限制条件(以便与算法 IV 更具可比性)，即对于收益最大化问题，只有当前价格高于历史最高价才交易; 对于成本最小化问题，只有当前价格低于历史最低价才交易. 算法 III 是基于竞争差分析的非调整型占线算法，以收益最大化问题为例，算法 III 的具体交易规则为: 1) 只有当前价格高于历史最高价格才考虑销售; 2) 销售量刚好能保证即便未来价格永久地降低到下限 m 也恰好能维持竞争差 D^*; 3) 最后一期必须销售完剩余的全部商品. 基于竞争比分析的调整型占线算法(算法 IV)和非调整型占线算法(算法 V)分别见文献 [3] 中第 4.2 和 4.1 小节的分析.

表 3　模拟实验中对比的 5 种占线算法

Table 3 Five online algorithms compared in the simulation experiments

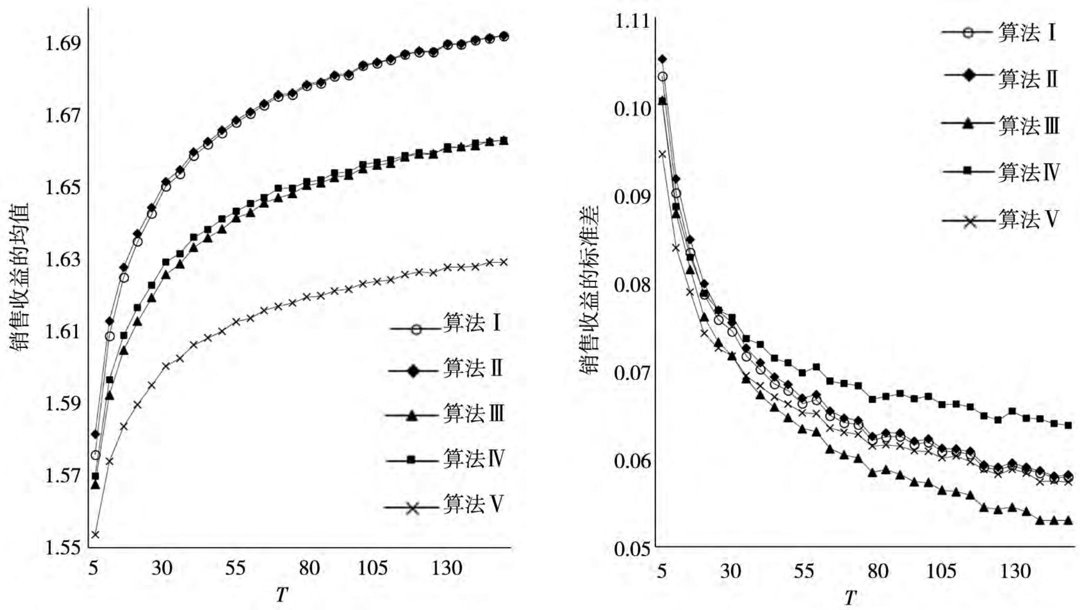
	调整型占线算法	非调整型占线算法
竞争差分析	算法 I(算法 II)	算法 III
竞争比分析	算法 IV	算法 V

针对每一组给定的参数组合 $\{m,M,T\}$，在多种可能的价格序列下执行各占线算法相应的 Matlab 程序，记录下计算时间以及销售收益的均值和标准差(或者采购成本的均值和标准差)进行对比. 通过大量实验发现，对各占线算法的相对绩效起到结构性影响的参数是交易期限，因此，令 $m = 1$，$M = 2$，而交易期限 T 按照步长 5 取 5 至 150 之间的整数，即 $T \in \{5, 10, 15, \cdots, 140, 145, 150\}$. T 的每个取值下的实验次数为 20 000 次，即可能的价格路径的条数，每一条价格路径都按照均值为 $(M+m)/2$、标准差为 $(M-m)/6$ 的正态分布生成，如果产生了不在价格范围 $[m,M]$ 内的数值(上述对均值和标准差的设置已经保证了这种情况出现的概率比较小)，则重新生成 1 个价格直至其在给定范围内. 值得一提的是，这里 5 种占线算法都是稳健性的，它们只依赖于价格波动的范围，用不同的分布生成价格序列对实验结论的影响相对较小. 从模拟结果可知，就计算效率而言，基于竞争差分析与竞争比分析的非调整型占线算法的计算时间几乎相同，但是基于竞争差分析的调整型占线算法比基于竞争比分析的调整型占线算法所耗费的计算时间短. 图 2 和图 3 分别展示了各占线算法在解决收益最大化问题与成本最小化问题时的绩效随交易期限变化的曲线图. 算法 I 与 II 的绩效非常接近，特别是当交易期限足够长时，所以下面的分析不再区分二者.

对于表 3 中任意一种占线算法，交易期限越长对交易者越有利，不仅可以改进销售收益或者采购成本的均值，而且也可以降低其标准差; 另外，延长交易期限交易者的边际收益将递减. 在给定交易总量和价格波动范围的情况下，交易期限越长表示交易机会越多，交易者就能把交易总量拆分成越多、越小的子交易任务，从而更好地适应和利用实际价格波动路径来改进平均收益或成本，同时更加细分化的交易任务也能使得不同价格路径导致的销售收益或者采购成本差别缩小，也就是缩小了相应的标准差.

比较算法 I(或 II)与 III，或者算法 IV 与 V，发现调整型占线算法相比非调整型占线算法可以改进销售收益或者采购成本的均值，但是会增大其标准差，并且调整型占线算法在均值方面的优势以及在标准差方面的劣势随着交易期限的增长而越发明显. 当交易者采用调整型占线算法时，他

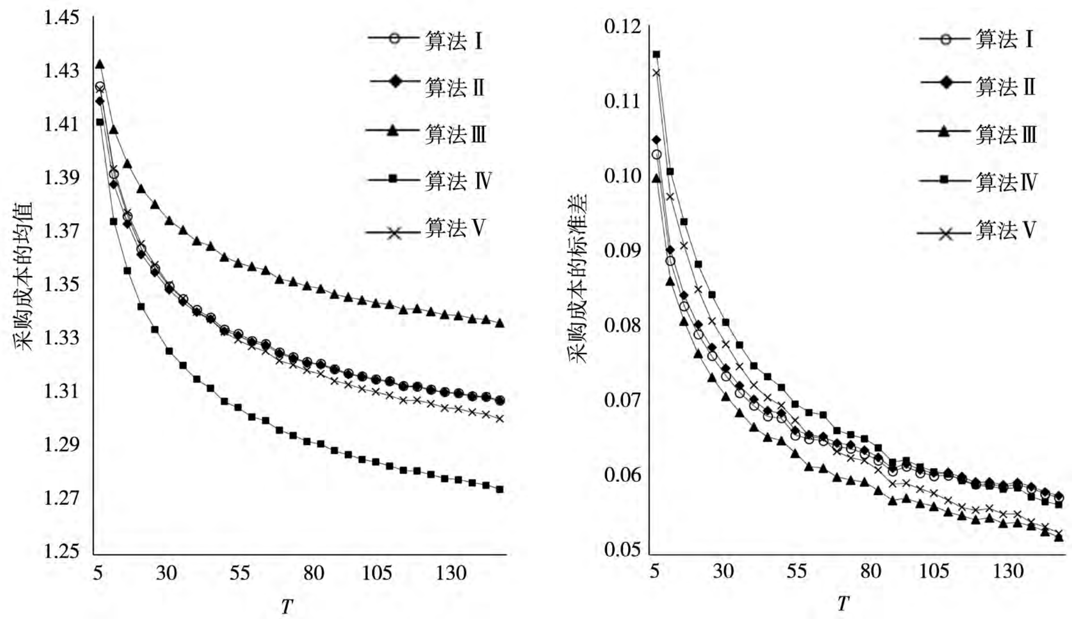
实质上是在利用“对手”每一期偏离均衡价格路径的机会来不断缩小竞争差(或者竞争比)，从而改进占线算法的绩效.



(a)　　(b)

图 2　收益最大化问题的竞争差与竞争比分析效果对比

Fig. 2 Comparison of the performance of CDA and CRA in solving revenue-maximization problems



(a)　　(b)

图 3　成本最小化问题的竞争差与竞争比分析效果对比

Fig. 3 Comparison of the performance of CDA and CRA in solving cost-minimization problems

比较算法 I(或 II) 与 IV，或者算法 III 与 V，可以发现，对于收益最大化问题，基于竞争差分析的占线算法相比基于竞争比分析的占线算法能够增加销售收益的均值，并且在交易期限较长时能够降低销售收益的标准差; 对于成本最小化问题，基于竞争比分析的占线算法相比基于竞争差分析的占线算法能够降低采购成本的均值，并且在交易期限较长时能够降低采购成本的标准差. 导致

竞争差与竞争比分析方法在解决不同类型的问题时相对绩效完全相反的根本原因在于风险厌恶程度的差别. 面对收益最大化问题时,交易者在竞争差分析下相对而言更加冒险; 而在面对成本最小化问题时,交易者在竞争比分析下相对而言更加冒险. 越是冒险的占线策略越是愿意等待未来的有利价格,因而获得了改进绩效的机会.

5 结束语

针对仅知道价格波动范围的单向交易问题,本文基于经典的后悔值准则提出了竞争差分析方法,该方法将原先不确定环境下的单人序贯决策问题转化为交易者与假想的“对手”之间的双人零和博弈问题,并利用逆向归纳法求解找出了稳健性的、调整型的最优占线交易策略,该策略不仅可以确保无论价格如何波动,它所达到的收益与最优离线算法的收益之间的差距在一定的范围内,而且还可以实时地调整目标竞争差,从而充分利用实际价格偏离均衡价格的机会来改进收益. 同时,本文也揭示了对于交易者而言所有可能的最糟糕情况,也就是所有的均衡价格路径. 本文所采用的竞争差分析方法与传统的竞争比分析方法相比具有很多优势,一是可以直接采用逆向归纳法求解,而无需像竞争比分析那样需要事先对最优占线策略的结构进行猜测; 二是基于竞争差分析的占线交易策略更节省计算时间,且在解决收益最大化问题时的平均表现比竞争比分析好.

本文假设价格波动的上、下限是固定的,并且忽略交易成本,未来可以考虑放松这些假设,进一步探讨这些相关的具有有限信息的单向交易问题. 此外,未来还可以应用本文提出的竞争差分析方法来分析一些其他类型的交易问题,例如,k 搜索(k-search) 问题,即在一定期限内卖出(或买入) k 种商品,商品不能进一步分割,如机器、设备; 双向交易问题,即交易者在交易期限内既可以买入也可以卖出商品.

参 考 文 献:

[1] Lippman S A, McCall J J. The economics of job search: A survey [J]. Economic Inqury, 1976, 14(6): 155-189.

[2] Lippman S A, McCall J J. The Economics of Uncertainty: Selected Topics and Probabilistic Methods [M] // Ed. Arrow K J, Intriligator M D. Handbook of Mathematical Economics I, Amsterdam: North-Holland, 1981: 211-284.

[3] El-Yaniv R, Fiat A, Karp R M, et al. Optimal search and one-way trading online algorithms [J]. Algorithmica, 2001, 30(1): 101-139.

[4] Sleator D, Tarjan R E. Amortized efficiency of list update and paging rules [J]. Communications of the ACM, 1985, 28(2): 202-208.

[5] Chen G H, Kao M Y, Lyuu Y D, et al. Optimal buy-and-hold strategies for financial markets with bounded daily returns [J]. SIAM Journal on Computing, 2001, 31(2): 447-459.

[6] Zhang W M, Xu Y F, Zheng F F, et al. Optimal algorithms for online time series search and one-way trading with interrelated prices [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2012, 23(2): 159-166.

[7] Larsen K S, Wøhlk S. Competitive analysis of the online inventory problem [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 207(2): 685-696.

[8] Dai W, Jiang Q, Feng Y. A note: An improved upper bound for the online inventory problem with bounded storage and order costs [J]. European Journal of Operational Research, 2016, 249(2): 628-630.

[9] Damaschke P, Ha P H, Tsigas P. Online search with time-varying price bounds [J]. Algorithmica, 2009, 55(4): 619-642.

[10] Xu Y F, Zhang W M, Zheng F F. Optimal algorithms for the online time series search problem [J]. Theoretical Computer Science, 2011, 412(3): 192-197.

[11] Lorenz J, Panagiotou K, Steger A. Optimal algorithms for k-search with application in option pricing [J]. Algorithmica, 2009, 55: 311-328.

[12] Zhang W M, Xu Y F, Zheng F F, et al. Online algorithms for the general k-search problem [J]. Information Processing

Letters, 2011, 111(14): 678 - 682.

[13] Zhang W M, Xu Y F, Zheng F F, et al. Online algorithms for the multiple time series search problem [J]. Computers & Operations Research, 2012, 39(5): 929 - 938.

[14] 倪冠群，徐寅峰，徐玖平. 航空收益管理价格和座位在线联合控制策略[J]. 管理科学学报，2014, 17(7): 10 - 21.

Ni Guanqun, Xu Yinfeng, Xu Jiuping. Competitive analysis of revenue management: Online joint pricing and booking strategies [J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(7): 10 - 21. (in Chinese)

[15] 张卫国，张 永，徐维军，等. 随机选择设备获得方式的可折旧设备在线租赁[J]. 管理科学学报，2013, 16(4): 1 - 7.

Zhang Weiguo, Zhang Yong, Xu Wejun, et al. Online leasing of depreciable equipment based on randomization of obtaining methods [J]. Journal of Management Sciences in China, 2013, 16(4): 1 - 7. (in Chinese)

[16] 胡茂林，徐维军，刘幼珠. 存在市场利率的连续松弛多重在线租赁问题[J]. 管理科学学报，2014, 17(9): 29 - 39.

Hu Maolin, Xu Weijun, Liu Youzhu. Multiple online leasing problem of continuous relaxation with market interest rate [J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(9): 29 - 39. (in Chinese)

[17] Dorrigiv R, López-Ortiz A. A survey of performance measures for online algorithms [J]. SIGACT News (ACM Special Interest Group on Automata and Computability Theory), 2005, 36 (3): 67 - 81.

[18] Boyar J, Larsen K S, Maiti A. A comparison of performance measures via online search [J]. Theoretical Computer Science, 2011, 532(3): 2 - 13.

[19] Fujiwara H, Iwama K, Sekiguchi Y. Average-case competitive analyses for one-way trading [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2011, 21(1): 83 - 107.

[20] Mohr E, Schmidt G. How much is it worth to know the future in online conversion problems [J]. Discrete Applied Mathematics, 2013, 161(10/11): 1546 - 1555.

[21] Mohr E, Ahmad I, Schmidt G. Online algorithms for conversion problems: A survey [J]. Surveys in Operations Research and Management Science, 2014, 19(2): 87 - 104.

Online one-way trading strategy based on competitive difference analysis

WANG Wei[1], *LAN Ying-jie*[2*], *YAN Jian-yuan*[1]

1. School of Business, Nankai University, Tianjin 300071, China;
2. Peking University HSBC Business School, Shenzhen 518055, China

Abstract: How to make online trading decisions in one-way trading when only the range of prices in the future is known beforehand? This paper applies Savage's mini-max regret criterion and proposes a method of competitive difference analysis (CDA). The CDA introduces an imaginary adversary who controls the price sequences, thus transforming the original one-person decision-making problem into a two-person zero-sum game. Compared with the widely used method of competitive ratio analysis (CRA) which depends heavily on prior intuition, the CDA can directly obtain the optimal online trading strategy and all the possible worst-case scenarios for the trader via backward induction. In addition, numerical experiments show that the online algorithm based on CDA can save calculation time and that it outperforms the online algorithm based on CRA when solving revenue-maximization problems because it is less conservative.

Key words: one-way trading; online algorithm; competitive difference analysis; competitive ratio analysis; Savage's mini-max regret criterion