股权众筹投融资方的最优策略分析①

曾　燕[1]，梁思莹[1]，田凤平[2*]，魏嘉伟[3]

（1. 中山大学岭南（大学）学院，广州 510275；2. 中山大学国际金融学院，广州 510275；
3. 中山大学数学学院，广州 510275）

摘要：分析了股权众筹融资方和投资方的最优策略. 依据股权众筹的流程，构建了股权众筹过程中投融资方利益博弈的3阶段模型，并在同时满足融资方与投资方预期收益最大化的条件下，求解了相应的最优化问题并给出了投融资方最优策略的解析式. 研究结果表明，在参数满足一定条件时，股权众筹投融资方均存在最优策略，且最优策略受边际收益、项目成功概率、预期回报率等因素的影响.

关键词：股权众筹；最优投融资策略；项目价值；异质性投资者；多方博弈

中图分类号：F830.9；C934；O221　文献标识码：A　文章编号：1007－9807(2017)09－0113－14

0　引　言

股权众筹，是指公司通过互联网渠道向普通投资者进行融资，同时出让一定比例的股权，投资者成为公司股东并可获得未来收益的融资方式[1]. 传统的股权融资方式对中小企业的资本支持非常有限，而股权众筹模式的出现弥补了天使投资、VC、PE等传统方式的空白，由于更多投资者共担风险而让更多初创企业获得股权融资，是股权融资领域发展的一大里程碑. 从投资者角度，天使投资的高风险往往要求投资者具有专业的投资和管理能力. 相比之下，股权众筹对投资者的资金实力、专业能力条件放宽，能让更多普通投资者参与股权投资. 因此，无论对于初创企业还是股权投资者，股权众筹都具有非常重要的意义.

在美国，股权众筹已是相对普遍、广泛兴起的投融资模式，并且随着乔布斯法案(JOBs)的出台，股权众筹得到政府的重视和扶持. 在我国，股权众筹尚处于起步阶段. 近两年来，股权众筹发展迅速，受到了政府的重视和众多知名电商的关注. 2014年11月国务院常务会议召开时，李克强总理首次提出"开展股权众筹融资试点"的建议. 根据云投汇数据显示，截至2015年11月，75家股权众筹平台共上线项目2.1万个，募资109.5亿元. 2015年3月31日，京东的股权众筹平台东家上线，截至8月中旬股权众筹类项目共计52个，募资超过5.5亿元. 2015年6月，阿里巴巴旗下的蚂蚁达客在上海成为首个获得工商登记确认的股权众筹企业. 在政策推动和创业热潮背景下，股权众筹的崛起将完善我国多层次资本市场体系，很大程度上帮助中小企业解决融资难问题.

目前，股权众筹运作过程中存在不少难点，较为棘手的是项目估值及参与者如何决策. 2015年3月，在中国证券投资基金业年会上，上海交通大学互联网金融研究所所长罗明雄指出，股权项目的估值定价是股权众筹的核心难点之一，它缺乏可靠的估值方法，往往都是"拍脑袋"估值

① 收稿日期：2015－11－15；修订日期：2017－02－22.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(71571195)；国家社会科学基金资助项目(15CJY004)；霍英东教育基金会高等院校青年教师基金资助项目(151081)；广东省自然科学杰出青年基金资助项目(2015A030306040).
通讯作者：田凤平(1983—)，女，湖南常德人，博士，讲师. Email：tfengp@mail.sysu.edu.cn

的. 蓝俊杰[2]指出股权众筹存在道德风险和逆向选择，筹资者会利用信息资源的优势，将所筹资金投资于协议外的高风险行业，导致投资者利益受损，而逆向选择是因平台对项目估值不合理产生的，平台方给予劣质项目过高的融资额度，使劣质项目更愿意进入平台，而优质项目无法有效融资. 项目价值、股权出让比例及投入的时间和精力往往仅凭借企业的主观判断，投资者的出资额由其预期的项目价值、投资成本等因素决定. 由于信息不对称，存在股权众筹投资者盲目投资的情况.

股权众筹的相关研究主要集中在 3 个方面: 1) 对众筹与其它融资方式的选择以及优劣条件进行建模分析; 2) 分析讨论影响众筹项目成功的因素; 3) 从众筹参与方的决策角度出发，讨论投资者行为对企业融资决策的影响.

在研究众筹与其它融资方式的选择及优劣条件方面，Belleflamme 等[3]通过建立与求解理论模型比较了传统融资方式和众筹融资方式，给出了众筹融资优于传统融资的条件，并认为众筹融资能使企业的产品更广为人知. Belleflamme 等[4]分析了项目众筹和股权众筹两种众筹模式的异同，认为企业在初始资金需求较低时倾向项目众筹，而在初始资金需求较高时倾向股权众筹，并指出企业可在筹资阶段采取不同的价格以区分不同的投资者. 苗文龙和严复雷[5]建立了多阶段投资决策模型，结果表明: 同时存在好与坏的项目前提下，投资者通过众筹选择好项目的概率高于单人决策的金融制度; 在经济发展水平较低时单人决策制度的运行成本更低、效率更高，而当经济发展到一定阶段时，多人决策的众筹融资模式能成为推动技术创新和转化的新型金融制度.

在研究众筹项目成功概率的影响因素方面，Hu 等[6]指出当融资金额达到某一目标值时项目才能成功实现，企业可依据投资者对项目质量的评价对不同投资者实施价格歧视. Ahlers 等[7]利用澳大利亚股权众筹平台的数据，实证分析了项目募集到足够融资金额的概率受融资计划、风险和管理层水平等因素影响，与外部保证无关. Keuschnigg 和 Nielsen[8]将投资机构在专业化管理和投资经验方面的投入、政府机构在政策和资金上的扶持及企业自身努力程度等因素纳入影响创业项目成功概率的模型中，认为当企业付出特定努力时成功概率才会大于零. Bettignies 和 Brander[9]建立了两阶段的风险投资(venture capital，VC) 决策模型，考虑企业的努力程度和 VC 出资额对项目未来价值的影响.

股权众筹项目的未来价值存在不确定性，投融资方的决策过程实际上是相互博弈的过程. 因此需要考虑投资者行为对企业融资带来的影响. 刘晓峰和黄沛[10]运用博弈模型和机制设计理论，研究发现厂商可基于策略型消费者进行最优动态定价与库存决策. 马健等[11]探讨异质信念下企业的融资决策问题，认为投资者相对于管理者的信念越高，投资者间异质信念越大，企业越可能进行股权融资且发生过度投资. Hardy[12]通过建立两阶段决策模型，分析了同时满足投资者和企业利益最大化的约束下，企业如何设定其激励参数以达到最优决策，并发现投资者的收益、企业自身收益与众筹人数、项目基本价值正相关，与融资阈值负相关. Varian[13]建立单期模型探讨公共品筹资与私人回报的关系，发现存在私人回报时投资者愿意投资更多资金. 丁川和陈璐[14]基于不同努力类型建立了风险投资委托代理模型，结果表明付出隐性努力的企业比显性努力的企业更需要和投资者分享项目收益(激励系数大于 0) .

从投资回报方式看，股权众筹与 VC/PE 投资等有异曲同工之妙. Elitzur 和 Gavious[15]构建了融资企业、天使投资人和风险投资(VC) 三者之间利益均衡模型，认为天使投资人一般在企业初创期投入资金，因此承担较高的风险，而 VC 在企业成长和成熟期投入，在天使投资人退出后才进入企业，承担较低风险. Bettignies 和 Brander[9]在 Elitzur 和 Gavious[15]的基础上，考虑融资企业的努力程度和 VC 出资额对项目价值的影响，通过建立两阶段决策模型，研究双方决策变量的影响因素，结果表明企业得益于 VC 的投入但需承受一定的股权稀释，进而影响其自身努力程度.

与传统 VC/PE 等股权投资模式相比，多人

决策的股权众筹模式的特性可总结为，1）存在融资阈值的设置，当总募集资金不少于融资阈值时项目才能启动；2）投资者众多且具有异质性，收益受自身和其他投资者决策影响；3）超募资金对项目价值有增值作用②；4）企业自身努力对项目价值影响大，影响投资者对项目的选择和出资额.

虽已有部分文献研究了投融资双方的决策行为，但，1）大多数分析企业决策行为的文献将投资者的行为当作外生变量，实际上投融资方决策是相互博弈的过程，双方的决策会相互影响；2）大多数文献以研究产品众筹为主，股权众筹投融资方决策的研究较少；3）已有研究众筹的大多数文献中项目价值是给定的，未考虑到投融资方行为对项目价值的影响. 从目前已有的风险投资（VC）研究来看，已有文献主要是考虑单个投资者与被投资企业之间的利益均衡关系，未考虑多个投资者以及投资者的异质性.

Bettignies 和 Brander[9] 考虑融资企业和 VC 各自努力程度对项目价值的影响，通过建立两阶段决策模型分析企业和 VC 双方最优决策的影响因素. 本文基于文献[9]等，结合股权众筹的特性，假设项目价值受超融比率、企业的超额努力程度的影响，在同时满足双方收益最大化的约束下，建立融资企业与异质性投资者利益博弈的 3 阶段模型，得到股权众筹投融资方的最优策略并进一步分析其影响因素. 本文主要创新包括：1）研究对象为股权众筹，构建的投融资模型反映了股权众筹“公开、大众、小额”的特性；2）模型将多个投资者的决策考虑为内生变量，分析其对企业决策行为的影响；3）考虑了投资者的资金和企业的行为对项目价值的影响；4）考虑投资者具有异质性，即在多人决策的股权众筹模式下，允许不同投资者的预期回报率不同.

1 模型构建

本文关注因内部融资不足而需要寻求外部融资的初创型企业. 在股权众筹中，融资企业与多个投资者是参与主体，下文将首先给出融资企业和投资者的决策顺序和步骤，然后在各决策阶段分别建立满足投融资方收益最大化约束的模型. 股权众筹的开展一般分 3 个决策步骤进行.

步骤 1 融资企业通过众筹平台发布相关信息，包括项目基本状况和融资阈值 T，并决定将回馈给股权众筹投资者们的股权出让比例 s，$0 \leqslant s \leqslant 1$.

步骤 2 各投资者决定出资额，投资者 i 的出资额为 I_i，当 $I_i > 0$ 时表示该投资者出资，当 $I_i = 0$ 时表示该投资者不出资. 假设企业融资金额下限为融资阈值 T（$T > 0$），存在 N 个投资者参与股权众筹. 若 $\sum_{i=1}^{N} I_i \geqslant T$，即总募集资金不少于融资阈值，企业融资足够，项目启动；若 $\sum_{i=1}^{N} I_i < T$，即总募集资金少于融资阈值，企业融资不足，出资额将退还给投资者.

步骤 3 项目融资足够并启动后，企业付出基本程度的努力，假设企业付出的超额努力程度③为 e，当 $e > 0$ 时表示企业愿意付出比基本程度更多的努力，从而增加项目价值；当 $e = 0$ 时企业超额努力程度为 0，项目仅获得基本收益.

本文定义总募集资金与融资阈值的比例 $\frac{\sum_{i=1}^{N} I_i}{T}$ 为超融比率，它反映项目的资金超募情况. 若融资不足，项目无法启动，价值为 0；若融资足够并启动后，假设项目运营成功时的价值 R 是由超

② 柯布 - 道格拉斯生产函数反映了产出价值与资本投入呈正相关指数增长关系，在经济学上资金对企业价值具有增值作用是显而易见的. Hardy[12] 假设项目总价值与超过融资阈值的货币量成正比例关系.

③ 参考 Kahn[16] 和 Barrick 等[17]，企业努力程度的测量可用是否积极投入资源来刻画，如人力资源投入、厂房等固定资产投入、管理层的领导力和企业的激励机制等. 另参考 Foo 等[18] 和 Gielnik 等[19]，根据一段时间内企业投放多少努力去正常或超量完成任务来刻画“少”或“多”的努力程度.

融比率 $\frac{\sum_{i=1}^{N} I_i}{T}$ 及企业自身的超额努力程度 e 共同决定，超融比率及超额努力程度为项目带来的边际收益分别为 a 和 b，体现了两者对项目价值的影响程度(类似假设可见文献[9]和文献[12]). R 表示为

$$R\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} I_i}{T}, e\right) = \begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^{N} I_i < T \\ a\frac{\sum_{i=1}^{N} I_i}{T} + be, & \sum_{i=1}^{N} I_i \geqslant T \end{cases}$$

由于融资不足时项目无法启动，故本文仅考虑融资足够项目启动的情形，即假设 $\sum_{i=1}^{N} I_i \geqslant T$.

假设项目运营成功的概率为 p，$0 < p < 1$. 虽然项目运营成功的概率 p 会受到融资金额和企业超额努力程度的影响，但若假设 p 与融资金额和企业超额努力程度有关，相关求解过程非常复杂. 因此为了简便且不失一般性，本文参照 Bettignies 和 Brander[9]，假设 p 为常数. 此外，本文假设企业将项目运营成功时的价值按一定股权比例 s 回馈给投资者，各投资者根据自身的出资额按比例分配回馈收益. 本文考虑异质性投资者的决策行为，即不同投资者对项目的要求回报率不同. 假设第 i 个投资者的出资额为 I_i，期望回报率为 α_i，则期望收益 U_i 为

$$\begin{aligned} U_i(I_i) &= \frac{I_i}{\sum_{i=1}^{N} I_i} spR - I_i(1+\alpha_i) \\ &= \frac{I_i spa}{T} + \frac{I_i}{\sum_{i=1}^{N} I_i} spbe - I_i(1+\alpha_i) \end{aligned}$$

与投资者的期望收益函数类似，企业按剩余股权获得项目剩余价值. 假设其自身超额努力成本为 $C(e) = \frac{e^2}{2}$(参见文献[9])，则企业的期望剩余收益 E 为

$$\begin{aligned} E(e,s) &= (1-s)pR - C(e) \\ &= (1-s)p\left(a\frac{\sum_{i=1}^{N} I_i}{T} + be\right) - \frac{e^2}{2} \end{aligned}$$

在步骤1中，企业须在融资金额足够使项目启动的前提约束下，决定股权出让比例 s 使自身收益最大化，s 的大小将会影响到投资者们的决策行为(出资额 I_i)和企业稍后的决策行为(超额努力程度 e)，故企业面临的最优化问题为

$$(\text{P1}) \max_{0\leqslant s\leqslant 1} E(s) = (1-s)p\left(a\frac{\sum_{i=1}^{N} I_i(s)}{T} + be(s)\right) - \frac{e(s)^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{N} I_i(s) \geqslant T$$

在步骤2中，每个投资者 i 根据股权出让比例 s 和预期项目价值，各自独立决定出资额 I_i 以使自身收益最大化. 假设参与众筹融资的投资者出资额均大于0，即 $I_i > 0$，投资者面临的最优化问题为

$$(\text{P2}) \max_{I_i>0} U_i(I_i) = \frac{I_i spa}{T} + \frac{I_i}{\sum_{i=1}^{N} I_i} spbe - I_i(1+\alpha_i) \quad (2)$$

在步骤3中，项目启动后，企业根据自身决策行为(股权出让比例 s)和投资者们决策行为(出资额 I_i)，决定随后自身付出超额努力 e 的大小. 由于超额努力存在成本，因此该时刻企业面临的最优化问题为

$$(\text{P3}) \max_{e\geqslant 0} E(e) = (1-s)p\left(a\frac{\sum_{i=1}^{N} I_i}{T} + be\right) - \frac{e^2}{2} \quad (3)$$

综上，模型从以下方面体现了股权众筹的主要特性，1) 假定项目信息公开，投资者及企业均对项目价值具有一致的预期，双方均根据对方的收益函数及行为做下一步决策，反映了“公开”特性; 2) 存在异质性投资者，其具有不同的预期回报率 α_1、α_2，投资金额分别为 I_1、I_2，且多个投资者共同决策，反映了“大众”特性; 3) 实际上项目参与股权众筹设置募集资金下限，假设该下限为融资阈值 $T(T>0)$，$\sum_{i=1}^{N} I_i \geqslant T$ 为模型求解的约束条件，反映了股权众筹的“最低募资额”特

性; 4) 以股权众筹方式融资的多为初创企业，资金对企业发展具有明显作用，故假设超募资金对项目有增值作用，反映了股权众筹项目的“成长性”.

2 模型求解

本文采用拉格朗日法和代数分析法对上述 3 个优化问题进行求解. 根据企业和投资者的决策步骤可知，企业在已知股权出让比例 s 和投资者总出资额 $\sum_{i=1}^{N} I_i$ 下决定付出超额努力 e，投资者在已知股权出让比例 s 下决定出资额 I_i. 因此求解步骤为先求解(P3)，然后求解(P2)，最后求解(P1)(参见文献[2]).

表 1 本文所涉及的符号及含义

Table 1 Description of the symbols used in this paper

符号	含义	符号	含义
e	企业的超额努力程度	s	融资方出让的股权比例
I_i	第 i 个投资者的出资额	U_i	第 i 个投资者的期望收益
α_i	第 i 个投资者预期回报率	E	企业的期望剩余收益
T	融资阈值	a	超融比率的边际收益
$\frac{\sum_{i=1}^{N} I_i}{T}$	超融比率(总募集资金与融资阈值的比例)	b	企业超额努力的边际收益
p	项目成功概率		

2.1 求解问题(P3)

问题(P3)中企业决定付出超额努力 e 使自身收益最大化，相应的拉格朗日函数为

$$L(e) = (1-s)p\left(a\frac{\sum_{i=1}^{N} I_i}{T} + be\right) - \frac{e^2}{2} + \lambda_1 e$$

其库恩 – 塔克(以下简称 KKT)条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial e} = (1-s)pb - e + \lambda_1 = 0 & (4) \\ e \geqslant 0, \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_1 e = 0 & (5) \end{cases}$$

若 $\lambda_1 > 0$，则由式(5)可得 $e = 0$. 再由式(4)，可知 $e = e(s) = (1-s)bp + \lambda_1 > 0$，与 $e = 0$ 矛盾. 因此 $\lambda_1 = 0$. 由式(4)得，$e = e(s) = (1-s)bp$. 又因为 $\frac{\partial^2 E(e)}{\partial e^2} = -1 < 0$，即 $E(e)$ 关于 e 是凹函数，故问题(P3)的最优超额努力程度为

$$e^* = e^*(s) = (1-s)bp \tag{6}$$

综合以上分析，问题(P3)的最优投资决策可归结为如下命题.

命题 1 企业最优的超额努力程度为 $e^* = e^*(s) = (1-s)bp$.

命题 1 反映了企业最优的超额努力程度 e^* 与其自身超额努力的边际收益 b、项目成功概率 p 以及股权出让比例 s 有关. 易发现，企业最优超额努力程度 e^* 与股权出让比例 s 负相关，体现了股权众筹模式中企业的权衡，投资者出资额能增加预期项目价值，但企业须同时承担股权稀释，进而削弱其积极性、影响其付出的努力程度.

2.2 求解问题(P2)

接下来确定每个投资者的出资额 I_i. 为表达简便且不失一般性，本文从仅有两个投资者的情形出发，多个投资者的情形可类似求解. 假设 $N = 2$，存在两个有不同预期回报率的投资者，即 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，不妨设 $\alpha_1 > \alpha_2$. 问题(P2)的拉格朗日函数为

$$L_1(I_1) = \frac{I_1 spa}{T} + \frac{I_1}{I_1 + I_2} spbe - I_1(1+\alpha_1) + \lambda_1 I_1$$

$$L_2(I_2) = \frac{I_2 spa}{T} + \frac{I_2}{I_1 + I_2} spbe - I_2(1+\alpha_2) + \lambda_2 I_2$$

其 KKT 条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_1}{\partial I_1} = \dfrac{spa}{T} + \dfrac{I_2}{(I_1+I_2)^2} spbe - (1+\alpha_1) + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L_2}{\partial I_2} = \dfrac{spa}{T} + \dfrac{I_1}{(I_1+I_2)^2} spbe - (1+\alpha_2) + \lambda_2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} I_1 \geqslant 0, \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_1 I_1 = 0 \\ I_2 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \lambda_2 I_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

由于参与众筹融资的投资者出资额均大于 0④，即 $I_1 > 0$，$I_2 > 0$，故由式(8)可得 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 0$，又由式(7)，当 $0 < s < \frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$ 时，有 $I_1 > 0$，$I_2 > 0$，且有

$$\begin{cases} I_1^* = I_1^*(s) \\ \quad = \dfrac{(1-s)sp^2b^2\left(1+\alpha_2-\dfrac{spa}{T}\right)}{\left(2+\alpha_1+\alpha_2-2\dfrac{spa}{T}\right)^2} \\ I_2^* = I_2^*(s) \\ \quad = \dfrac{(1-s)sp^2b^2\left(1+\alpha_1-\dfrac{spa}{T}\right)}{\left(2+\alpha_1+\alpha_2-2\dfrac{spa}{T}\right)^2} \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} I_1^* + I_2^* &= I_1^*(s) + I_2^*(s) \\ &= \frac{(1-s)sp^2b^2}{2+\alpha_1+\alpha_2-2\dfrac{spa}{T}} \end{aligned} \tag{10}$$

故 $Id_1(s) + I_2^*(s) > 0$. 又因为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_1(I_1)}{\partial I_1{}^2} = -\dfrac{2I_2spbe}{(I_1+I_2)^3} \leqslant 0 \\ \dfrac{\partial^2 U_2(I_2)}{\partial I_2{}^2} = -\dfrac{2I_1spbe}{(I_1+I_2)^3} \leqslant 0 \end{cases}$$

即 U_1，U_2 分别关于 I_1，I_2 是凹函数. 因此当 $s < \frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$ 时，式(9)即为问题(P2)的最优解. 当 $s \geqslant \min\left\{1, \frac{(1+\alpha_2)T}{ap}\right\}$ 或 $s = 0$ 时，由式(7)有 $I_1 \leqslant 0$，$I_2 \leqslant 0$，故有 $I_1^*(s) = I_2^*(s) = 0$.

综合以上分析，问题(P2)的最优投资决策可归纳为如下命题.

命题 2　投资者最优出资额 I_i^* 与企业的股权出让比例 s 有关，即

1) 当 $0 < s < \min\left\{1, \frac{(1+\alpha_2)T}{ap}\right\}$ 时，投资者选择的最优出资额 $I_i^*(s)$ 为

$$I_1^*(s) = \frac{(1-s)sp^2b^2\left(1+\alpha_2-\dfrac{spa}{T}\right)}{\left(2+\alpha_1+\alpha_2-2\dfrac{spa}{T}\right)^2}$$

④ 为体现众筹的特性，假设至少有两个投资者参与. 因此在 $N=2$ 时，假设两名投资者出资额均大于 0.

$$I_2^*(s)=\frac{(1-s)sp^2b^2\left(1+\alpha_1-\dfrac{spa}{T}\right)}{\left(2+\alpha_1+\alpha_2-2\dfrac{spa}{T}\right)^2}$$

2) 当 $s\geqslant\min\left\{1,\dfrac{(1+\alpha_2)T}{ap}\right\}$ 或 $s=0$ 时，$I_1^*(s)=I_2^*(s)=0$.

命题 2 反映了当股权出让比例 s 满足一定条件时，投资者才会参与股权众筹. 股权出让比例为 0 时，自然没有投资者愿意投资. 有趣的是，股权出让比例过大时投资者亦不愿意投资. 实际上，若企业的股权出让比例过大且接近于 1，股权稀释程度过高，企业很可能不愿意付出任何超额努力来提高项目价值. 由命题 1 也可得到同样结论，因此预期项目价值达不到投资者的要求，从而投资金额为 0.

存在异质性投资者时，与高预期回报率投资者相比，低预期回报率投资者更不看好项目，为保证低预期回报率投资者能参与股权众筹融资(即出资额大于 0)，企业在设置股权出让比例时须优先考虑低预期投资者的回报率. 这是为何 s 须满足的条件看似仅与 α_2 有关而与 α_1 无关，实际上，由于 $\alpha_1>\alpha_2$，故当 s 满足条件 $0<s<\min\left\{1,\dfrac{(1+\alpha_2)T}{ap}\right\}$ 约束时，它自然会满足条件 $0<s<\min\left\{1,\dfrac{(1+\alpha_1)T}{ap}\right\}$.

2.3 求解问题(P1)

接下来，考虑企业决定回馈投资者的股权比例 s，以使自身收益最大化. 令 $\delta=(2+\alpha_1+\alpha_2)T$. 当 $N=2$ 时，将式(6)和式(10)代入式(1)可得

$$\max_{0<s<\min\left\{1,\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}\right\}}E(s)=(1-s)p\left(a\frac{\sum_{i=1}^{2}I_i}{T}+be\right)-\frac{e^2}{2}$$
$$=\frac{b^2p^2(s-1)^2\delta}{2(\delta-2aps)}\tag{11}$$
$$\text{s.t.}\ \frac{(1-s)sp^2b^2}{2+\alpha_1+\alpha_2-2\dfrac{spa}{T}}\geqslant T$$

经求解，问题(P1)的最优投资决策可归结为如下命题，具体求解过程详见附录.

命题 3 若参数满足如下任一条件

1) $\max\left\{0,\dfrac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2}\right\}<p<\min\left\{1,\dfrac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}$ 且 $\dfrac{2a}{b^2}\leqslant\min\left\{1,\dfrac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}$,

2) $\max\left\{\dfrac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2},\dfrac{(1+\alpha_2)T}{a},\dfrac{a^2(\alpha_1-\alpha_2)+Tb^2(1+\alpha_2)^2}{ab^2(1+\alpha_2)}\right\}\leqslant p<1$,

3) $\max\left\{\dfrac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2},\dfrac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}\leqslant p<\dfrac{2b^2(1+\alpha_2)T-2a^2}{ab^2}$ 且 $(1+\alpha_2)Tb^2\dfrac{1+\alpha_2}{2+\alpha_1+\alpha_2}<a^2<(1+\alpha_2)Tb^2$,

4) $\max\left\{\dfrac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2},\dfrac{(1+\alpha_2)T}{a},\dfrac{2b^2(1+\alpha_2)T-2a^2}{ab^2}\right\}\leqslant p<\dfrac{a^2(\alpha_1-\alpha_2)+Tb^2(1+\alpha_2)^2}{ab^2(1+\alpha_2)}$ 且 $a^2>(1+\alpha_2)Tb^2$.

企业最优的股权出让比例为

$$s^*=\frac{(2a+pb^2)-\sqrt{(2a+pb^2)^2-4b^2\delta}}{2pb^2}$$

命题 3 反映了项目成功概率 p 满足一定条件时存在最优股权出让比例 s^*. 若项目成功概率过低，投资者不愿意投资项目，企业亦不能获得较高的预期项目收益，故选择出让股权比例为 0. 但若成功概率很大甚至接近 1，最优股权出让比例也为 0. 由于当项目成功概率过大，企业不愿意与投资者分享项目收益，反而导致股权稀

释，则企业更倾向于选择借款或内部融资. 仅当项目成功概率满足一定条件时存在最优股权出让比例 s^*.

3　数值算例及经济释义

由命题 1 ~ 命题 3 易知，边际收益、项目成功概率和预期回报率等参数对企业最优股权出让比例 s^* 有影响，从而影响投资者最优出资额 I_i^* 与企业最优超额努力程度 e^*. 由命题 3 知，在满足一定条件时，企业最优股权出让比例为 $s^* = \frac{(2a + pb^2) - \sqrt{(2a + pb^2)^2 - 4b^2\delta}}{2pb^2}$，且 $0 < s^* < 1$. 易知 a、b、p 和 $\delta = (2 + \alpha_1 + \alpha_2) T$ 对 s^* 有影响，将 s^* 代入 $e^*(s) = (1 - s) bp$ 和 $I_i^*(s) = \frac{(1 - s) sp^2 b^2 \left(1 + \alpha_j - \frac{spa}{T}\right)}{\left(2 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2\frac{spa}{T}\right)^2}$ 中，可分析各参数对 e^* 和 I_i^* 的影响. 下面将运用 MATLAB 工具，通过数值算例来分析参数对投融资决策的影响，并给出经济解释.

3.1　参数对股权出让比例的影响

参照 Bettignies 和 Brander[3] 中的参数设定来分析各参数对决策变量的影响，若无其它声明，取 $a = 4$，$b = 17$，$\alpha_1 = 0.49$，$\alpha_2 = 0.4$，$T = 3$，$p = 0.4$、0.6、0.8.

如图 1 和图 2 所示，超融比率的边际收益 a、超额努力的边际收益 b 与最优股权出让比例 s^* 成负相关关系. a、b 越大，项目预期收益越高，企业希望自身获得大部分的项目收益，而不愿意过多分配给投资者，因此 s^* 随 a、b 的增大而减小. 图 1 和图 2 还反映了项目成功概率 p 越大，企业愿意出让的股权比例亦越小，因此 s^* 随 p 的增大而减小.

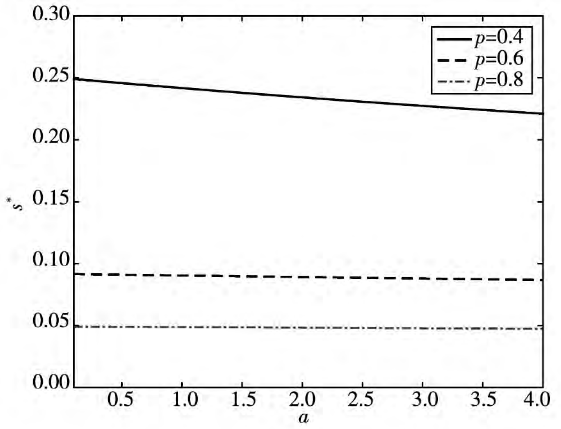


图 1　边际收益 a 对股权出让比例的影响

Fig. 1 Effect of a on s^*

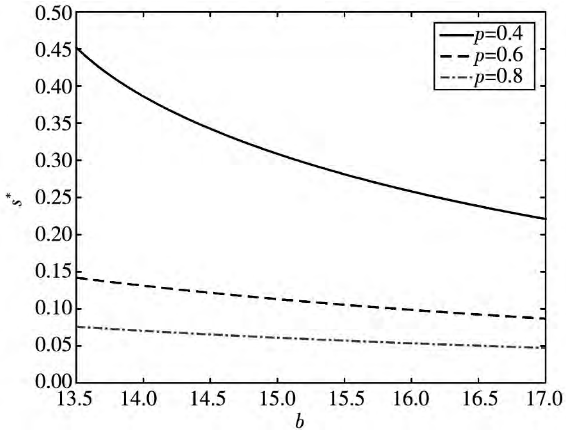


图 2　边际收益 b 对股权出让比例的影响

Fig. 2 Effect of b on s^*

图 3 和图 4 反映了 s^* 与融资阈值 T 和投资者预期回报率 α_i 成正相关关系. T 越大，表示项目规模越大、企业融资金额越多，为了对投资者足够吸引，企业需要选择较高的股权出让比例，否则容易导致融资不足，项目无法启动，因此 s^* 随 T 的增大而增大. 同时由图 4 可以发现，α_i 越大，投资者预期回报率越高，为吸引投资者，股权出让则越多，故 s^* 随 α_i 的增大而增大.

结论 1　企业最优的股权出让比例 s^* 与超融比率的边际收益 a 、超额努力的边际收益 b 以及项目成功概率 p 负相关，与融资阈值 T 和投资者预期回报率 α_i 正相关.

3.2　参数对超额努力程度的影响

由于 $e^*(s) = (1-s)bp$ 且 s^* 与 a、b 和 p 负相关，与 T 和 α_i 正相关，故可得如下结论.

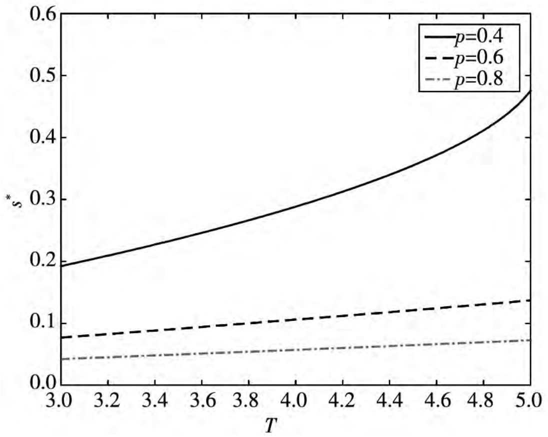


图 3　融资阈值对股权出让比例的影响

Fig. 3 Effect of T on s^*

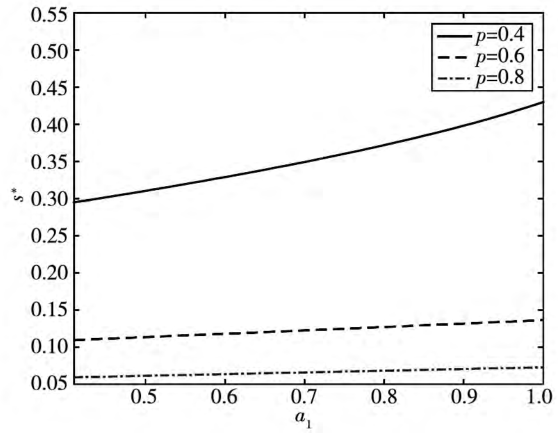


图 4　预期回报率对股权出让比例的影响

Fig. 4 Effect of α_i on s^*

结论 2　企业最优的超额努力程度 e^* 与超融比率的边际收益 a、超额努力的边际收益 b 以及项目成功概率 p 成正相关，与融资阈值 T 和投资者预期回报率 α_i 负相关.

从结论 1 和结论 2 可发现有特别的结论，参数对企业决策变量 e^* 和 s^* 的影响存在反向关系. 这是由于 s^* 与 e^* 这两个决策是企业分别在募集期前后两个不同阶段决策的，若 s^* 较小，则企业必须在项目启动后选择较大的 e^*，才能既满足自身收益最大化，又能保证投资者收益最大化. 以上结论表明，现实中股权众筹存在道德风险问题. 最优股权出让比例和最优超额努力是企业在不同时段的决策，若股权过于稀释则它们没有动力去付出超额努力.

3.3　参数对出资额的影响

本小节探讨边际收益和预期回报率参数对投

资者最优出资额的影响. 图 5 反映了高预期回报率投资者最优出资额 I_1^* 与边际收益 b 正相关. 由于投资者最优出资额之和 $I_1^* + I_2^*$ 等于融资阈值 T，不同投资者最优决策存在反向变动关系，因此低预期回报率者最优出资额 I_2^* 随 b 的增大而减小. 由此可见，高低预期回报者的利益之间存在替代关系，参数对两者最优决策的影响存在反向变动关系. 对于同一融资项目，高预期回报率者比低预期回报率者更看好项目，故当利于项目价值提高的参数变化时，自然地高预期回报率者投资便越多，同时由于存在融资阈值的限制，低预期回报率者投资会越少.

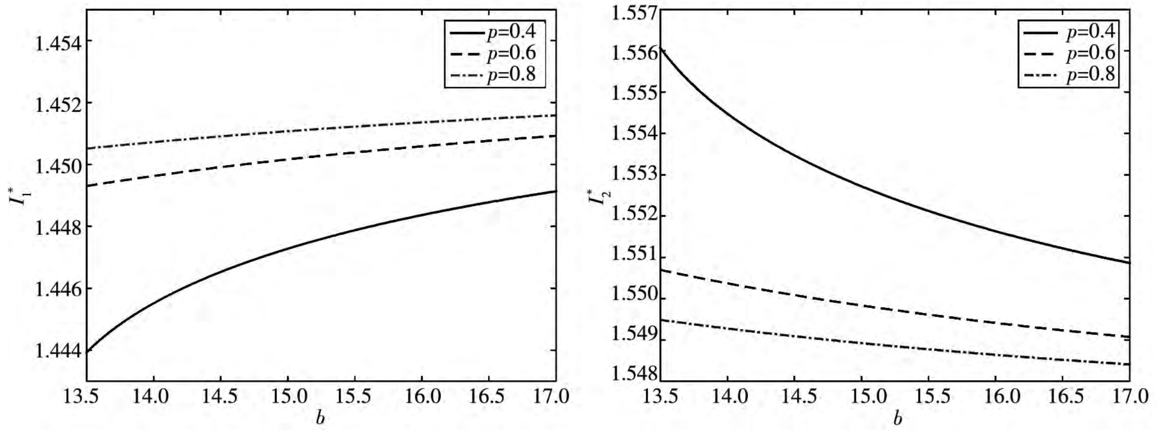
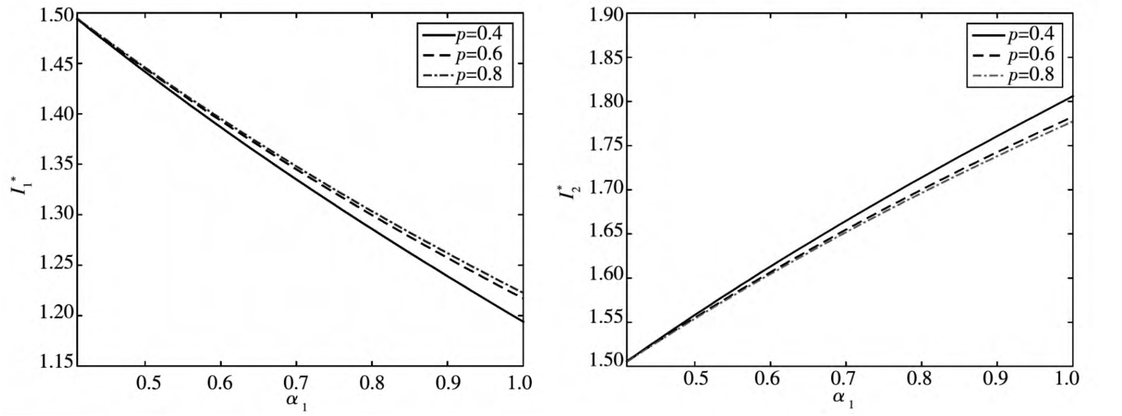


图 5 边际收益 b 对最优出资额 I_1^* 、I_2^* 的影响

Fig. 5 Effects of b on I_1^* and I_2^*

图 6 反映了投资者最优出资额 I_i^* 与自身预期回报率 α_i 负相关，与其他投资者的预期回报率 α_j 成正相关. 自身预期回报率越高，则相对于其他投资者，同一个项目带给自身的收益会越低，选择的投资金额越小. 因此 I_i^* 随 α_i 增大而减小，随 α_j 增大而增大.



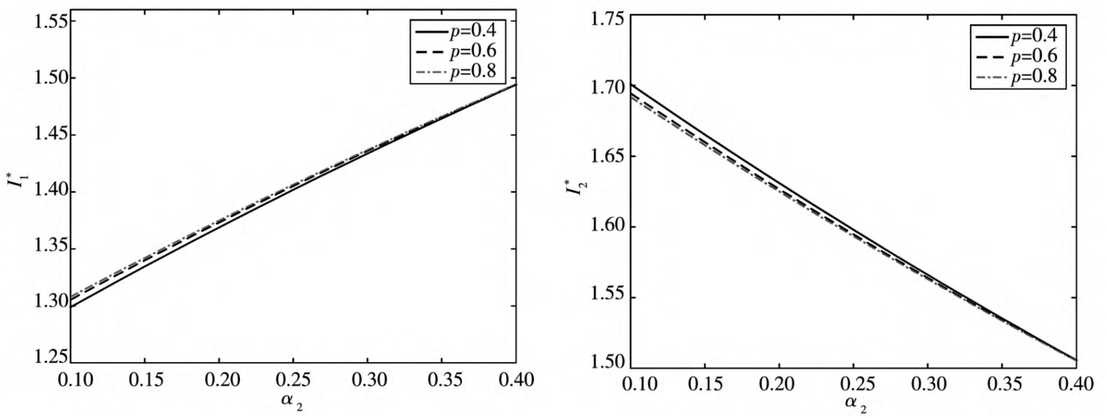


图 6　预期回报率对最优出资额的影响

Fig. 6 Effect of α_i on I_i^*

结论 3　高预期回报率者最优出资额 I_1^* 与超额努力的边际收益 b、成功概率 p 正相关，而低预期回报率者恰好相反. 投资者最优出资额 I_i^* 与自身预期回报率 α_i 负相关，与其他投资者的预期回报率 α_j 正相关.

4　结束语

股权众筹项目启动的前提是总募集资金不少于融资阈值，投入的资金和企业付出超额努力越多，项目预期收益越大. 本文考虑项目的预期价值受到超融比率、企业超额努力程度的影响，在此基础上进行股权众筹融资模型的建立和投融资方的决策分析.

股权众筹投融资方的决策行为是互相博弈的结果. 本文分别构建了双方的预期收益函数，在融资过程的三阶段模型中，企业决定最优股权出让比例、最优超额努力程度,投资者决策最优出资额. 最优化模型求解结果表明: 当参数满足一定条件时，双方均存在最优的决策，且边际收益、项目成功概率、投资者的预期回报率对决策变量具有影响. 实践中，当有资金需求的企业通过融资平台向投资者融资时，双方均可通过项目的基本情况(如成功概率、超募资金与努力程度的边际收益等) 和投资者预期回报率博弈作出最优决策，达到收益最大化.

对股权众筹融资模式的研究还可从多个方面和角度进行拓展. 众筹平台实际上起到融资中介、项目初步筛选和投后管理等作用，投资者、企

业和众筹平台三者的利益均衡可深入研究. 另外，实操上大部分股权众筹项目采取“领投”与“跟投”的方式开展，领投人与跟投人之间的博弈也是一个有价值的研究方向. 本文作者将在后续研究中继续深入探讨股权众筹模式中的项目估值与投资决策等问题.

参 考 文 献:

[1] Bradford S C. Crowdfunding and the federal securities laws [J]. Columbia Business Law Review, 2012, 1(1): 1 – 150.

[2] 蓝俊杰. 我国股权众筹融资模式的问题及政策建议 [J]. 金融与经济, 2015, (2): 57 – 61.
Lan Junjie. The problems and policy suggestions of crowdfunding finance [J]. Finance and Economy, 2015, (2): 57 – 61. (in Chinese)

[3] Belleflamme P, Lambert T, Schwienbacher A. Crowdfunding: An industrial organization perspective [R]. Universite Catholique de Louvain, 2010.

[4] Belleflamme P, Lambert T, Schwienbacher A. Crowdfunding: Tapping the right crowd [J]. Journal of Business Venturing, 2014, 29(5): 585 – 609.

[5] 苗文龙, 严复雷. 众筹融资、项目选择与技术进步 [J]. 金融经济学研究, 2014, 29(4): 118 – 128.
Miao Wenlong, Yan Fulei. Crowdfunding, project selection and technology development [J]. Journal of Finance and Economics, 2014, 29(4): 118 – 128. (in Chinese)

[6] Hu M, Li X, Shi M Z. Product and pricing decisions in crowdfunding [J]. Marketing Science, 2015, 34(3): 331 – 345.

[7] Ahlers G K C, Cumming D, Günther C, et al. Signaling in equity crowdfunding [J]. Entrepreneurship Theory and Practice, 2015, 39(4): 955 – 980.

[8] Keuschnigg C, Nielsen S B. Start-ups, venture capitalists, and the capital gains tax [J]. Journal of Public Economics, 2004, 88(5): 1011 – 1042.

[9] Bettignies J D, Brander J A. Financing entrepreneurship: Bank finance versus venture capital [J]. Journal of Business Venturing, 2007, 22(6): 808 – 832.

[10] 刘晓峰, 黄 沛. 基于策略型消费者的最优动态定价与库存决策 [J]. 管理科学学报, 2009, 12(5): 18 – 26.
Liu Xiaofeng, Huang Pei. Optimal dynamic pricing and inventory policy under strategic customers [J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(5): 18 – 26. (in Chinese)

[11] 马 健, 刘志新, 张力健. 异质信念、融资决策与投资收益 [J]. 管理科学学报, 2013, 16(1): 59 – 73.
Ma Jian, Liu Zhixin, Zhang Lijian. Heterogeneous beliefs, corporate financing and investment return [J]. Journal of Management Sciences in China, 2013, 16(1): 59 – 73. (in Chinese)

[12] Hardy W. How to perfectly discriminate in a crowd? A theoretical model of crowdfunding [R]. Warsaw: University of Warsaw, Faculty of Economic Sciences, Working Paper No. 16, 2013.

[13] Varian H. Public goods and private gifts [R]. Berkeley: University of California, 2013.

[14] 丁 川, 陈 璐. 考虑风险企业家有公平偏好的风险投资激励机制——基于显性努力和隐性努力的视角 [J]. 管理科学学报, 2016, 19(4): 104 – 117.
Ding Chuan, Chen Lu. Incentive mechanism for venture investment when venture entrepreneurs have fairness preferences from explicit efforts and implicit efforts perspectives [J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(4): 104 – 117. (in Chinese)

[15] Elitzur R, Gavious A. Contracting, signaling, and moral hazard: A model of entrepreneurs, “angels” and venture capitalists [J]. Journal of Business Venturing, 2003, 18(6): 709 – 725.

[16] Kahn W A. Psychological conditions of personal engagement and disengagement at work [J]. Academy of Management Journal, 1990, 33(4): 692 – 724.

[17] Barrick M R, Thurgood G R, Smith T A, et al. Collective organizational engagement: Linking motivational antecedents, strategic implementation, and firm performance [J]. Academy of Management Journal, 2015, 58(1): 111 - 135.

[18] Foo M D, Uy M A, Baron R A. How do feelings influence effort? An empirical study of entrepreneurs' affect and venture effort [J]. Journal of Applied Psychology, 2009, 94(4): 1086 - 1094.

[19] Gielnik M M, Spitzmuller M, Schmitt A, et al. I put in effort, therefore I am passionate: Investigating the path from effort to passion in entrepreneurship [J]. Academy of Management Journal, 2015, 58(4): 1012 - 1031.

The optimal strategy for entrepreneur and investors in equity crowdfunding

ZENG Yan[1], *LIANG Si-ying*[1], *TIAN Feng-ping*[2*], *WEI Jia-wei*[3]

1. Lingnan (University) College, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. International School of Business & Finance, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
3. School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: This paper studies the optimal strategy for entrepreneur and investors in equity crowdfunding. Based on the general procedure for equity crowdfunding, a three-step model is established to characterize the gambling behaviors between the entrepreneur and the investors. To maximize the expected utility of the enterprise and investors, three optimal problems are solved and the optimal strategy for each stage is given. The results indicate that when parameters satisfying certain condition, optimal strategies for the investors and entrepreneur exist, which are influenced by marginal revenue, the probability of project succeed, expected rate of return, etc.

Key words: equity crowdfunding; optimal strategy for entrepreneur and investors; project's expected value; heterogeneous investors; multiplayer game

附录: 问题(P1)的求解过程

考虑企业决定回馈投资者的股权比例 s，以使自身收益最大化. 令 $\delta = (2 + \alpha_1 + \alpha_2)T$. 当 $N = 2$，将式(6)和式(10)代入式(1)可得

$$\max_{0 < s < \min\left\{1, \frac{(1+\alpha_2)T}{ap}\right\}} E(s) = (1 - s)p\left(a\frac{\sum_{i=1}^{2} I_i}{T} + be\right) - \frac{e^2}{2} = \frac{b^2p^2(s - 1)^2\delta}{2(\delta - 2aps)}$$
$$\text{s.t.}\ \frac{(1 - s)sp^2b^2}{2 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2\frac{spa}{T}} \geqslant T \tag{11}$$

由式(11)得 $\frac{\partial^2 E(s)}{\partial s^2} = \frac{\delta b^2p^2(\delta - 2ap)^2}{(\delta - 2aps)^3}$，由于 $0 \leqslant s \leqslant \min\left\{1, \frac{(1 + \alpha_2)T}{ap}\right\}$，则 $(\delta - 2aps)^3 \geqslant (\delta - 2T(1 + \alpha_2))^3 = (\alpha_1 - \alpha_2)^3 \times T^3 > 0$，故 $E(s)$ 是凸函数，最大值在其端点值. 为求解 s 的取值范围，令

$$h(s) = \frac{(1 - s)sp^2b^2}{2 + \alpha_1 + \alpha_2 - 2\frac{spa}{T}} - T \tag{12}$$

方程 $h(s)$ 有解的充要条件为其判别式

$$\Delta = (2pa + p^2b^2)^2 - 4p^2b^2\delta \geqslant 0$$

即 $p \geqslant \frac{2b\sqrt{\delta} - 2a}{b^2}$. 令 $h(s) = 0$，得解 s_1，s_2 为

$$\begin{cases} s_1 = \dfrac{(2a+pb^2) - \sqrt{(2a+pb^2)^2 - 4b^2\delta}}{2pb^2} \\ s_2 = \dfrac{(2a+pb^2) + \sqrt{(2a+pb^2)^2 - 4b^2\delta}}{2pb^2} \end{cases}$$

由于

$$(2a+pb^2)^2 > (2a+pb^2)^2 - 4b^2\delta \Leftrightarrow (2a+pb^2) > \sqrt{(2a+pb^2)^2 - 4b^2\delta} \Leftrightarrow \frac{(2a+pb^2) - \sqrt{(2a+pb^2)^2 - 4b^2\delta}}{2pb^2} > 0.$$

故有$s_1 > 0$，进而有 $s_2 > s_1 > 0$.

为求解最优的股权出让比例 s^* ，下面分$\frac{(1+\alpha_2)T}{pa} > 1$ 与 $\frac{(1+\alpha_2)T}{pa} \leqslant 1$ 两种情形求解.

1) 当 $\frac{(1+\alpha_2)T}{pa} > 1$，即 $\max\left\{0,\frac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2}\right\} < p < \min\left\{1,\frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}$ 时，$s \in [0,1]$. 此时需要讨论 s_2 和 1 的大小. 由于 $h(s)|_{s=1} = -T < 0$，故 s_2 和 1 的大小关系取决于 $h(s)$ 对称轴 $s = s_0$ 的位置，可分为以下 3 种情形:

①若对称轴 $s = s_0 < 1$，则 $0 < s_1 < s_2 < 1$.

②若对称轴 $s = s_0 > 1$，则 $s_2 > s_1 > 1$，又 $s \in [0,1]$，故式(11) 约束条件不成立，此情形下不存在最优解.

③若对称轴 $s = s_0 = 1$，由于 $0 < p < \min\left\{1,\frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}$，故 $\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{2T\delta b^2p^2(\delta - 2ap)}{(\delta - 2aps)^3} < 0$ 显然成立，即 $h(s)$ 开口向下，则 $s = 1$ 是 $h(s)$ 的最大值. 因 $h(s) = 0$ 有两个零点 s_1 和s_2，$h(s)$ 的最大值在区间 (s_1, s_2) 内取得，且最大值大于零，与 $h(s)|_{s=1} = -T < 0$ 矛盾，故此情形下不存在最优解.

因此只须对情形①进行讨论. 又由于 $h(s)$ 对称轴 $s = s_0 = \frac{s_1+s_2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{b^2p}$，故 $s = s_0$ 与 1 的大小取决于 $\frac{a}{b^2p}$ 与 $\frac{1}{2}$ 的大小，即 p 与 $\frac{2a}{b^2}$ 的大小，故情形①可分两种情形讨论.

i) 当 $\frac{2a}{b^2} > \min\left\{1,\frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}$ 时，由 $0 < p < \min\left\{1,\frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}$ 可知$\frac{2a}{b^2} > p$，即 $s_0 > 1$，此情形与②类似，不存在最优解.

ii) 当 $\frac{2a}{b^2} \leqslant \min\left\{1,\frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}$ 时，$s_0 < 1$，此情形与情形①类似，此时有 $\max E(s) = \max\{E(s)|_{s=s_1}, E(s)|_{s=s_2}\}$.

又

$$E(s)|_{s=s_1} = \frac{\delta(2a - b^2p + \sqrt{(2a+b^2p)^2 - 4\delta b^2})}{8b^2 - 8a(2a + b^2 + \sqrt{(2a+b^2p)^2 - 4\delta b^2})}$$

$$E(s)|_{s=s_2} = \frac{\delta(b^2p - 2a + \sqrt{(2a+b^2p)^2 - 4\delta b^2})}{8b^2 - 8a(2a + b^2 + \sqrt{(2a+b^2p)^2 - 4\delta b^2})}$$

且

$$E(s)|_{s=s_2} - E(s)|_{s=s_1} = -\frac{p\sqrt{(2a+b^2p)^2 - 4\delta b^2}}{2}$$

即 $E|_{s=s_1} \geqslant E|_{s=s_2}$，故此情形下 $s^* = s_1 = \frac{(2a+pb^2) - \sqrt{(2a+pb^2)^2 - 4b^2\delta}}{2pb^2}$ 是问题(P1) 的最优解.

综上可得，在 $\frac{(1+\alpha_2)T}{pa} > 1$ 的情形下，当参数满足 $\frac{2a}{b^2} \leqslant \min\left\{1,\frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}$ 时，问题(P1) 的最优解为

$$s^* = s_1 = \frac{(2a+pb^2) - \sqrt{(2a+pb^2)^2 - 4b^2\delta}}{2pb^2}$$

2) 当$\frac{(1+\alpha_2)T}{pa} \leqslant 1$，即 $\max\left\{\frac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2},\frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\} \leqslant p < 1$ 时，$s \in \left(0,\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}\right]$. 此时需要讨论 s_2 和 $\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$ 的大小. 将 $s = \frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$ 代入式(13) 可得 $h(s)|_{s=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}} = -T - \frac{Tb^2(\alpha_2+1)(T+T\alpha_2-ap)}{a^2(\alpha_1-\alpha_2)}$. 令 $h(s)|_{s=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}} = 0$，解得$p_0 = \frac{a^2(\alpha_1-\alpha_2) + Tb^2(1+\alpha_2)^2}{ab^2(1+\alpha_2)}$.

容易知道 $h(s)\mid_{s=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}}$ 关于 p 单调递增，故当 $p\geqslant p_0$ 时，$h(s)\mid_{s=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}}\geqslant 0$；当 $p<p_0$ 时，$h(s)\mid_{s=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}}<0$．此时 s_2 和 $\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$ 的大小关系则取决于 $h(s)$ 的对称轴 $s=s_0$ 的位置，可分为以下 3 种情形．

①若对称轴 $s=s_0<\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$，则 $0<s_1<s_2<\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$．

②若对称轴 $s=s_0>\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$，则 $s_2>s_1>\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$，又 $s\in\left[0,\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}\right]$，故式(11)约束条件不成立，此情形下不存在最优解．

③若对称轴 $s=s_0=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$，则 $s=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$ 是 $h(s)$ 的最大值．由不等式 $0<p<\min\left\{1,\frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}$ 可知 $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}s^2}=-\frac{2T\delta b^2p^2(\delta-2ap)}{(\delta-2aps)^3}<0$ 恒成立，即 $h(s)$ 开口向下，故 $h(s)$ 有最大值．因 $h(s)$ 的最大值在区间 (s_1,s_2) 内取得，且最大值大于零，与 $h(s)\mid_{s=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}}<0$ 矛盾，故此情形下不存在最优解．

因此只须对情形①进行讨论．为确定 p 的取值范围，以下对 $p_0=\frac{a^2(\alpha_1-\alpha_2)+Tb^2(1+\alpha_2)^2}{ab^2(1+\alpha_2)}$ 和 1 的大小关系进行分类讨论．

当 $p_0<1$ 时，分以下 $p\geqslant p_0$ 与 $<p_0$ 两种情形讨论：

i) 若 $p\geqslant p_0$，即 $\max\left\{\frac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2},\frac{(1+\alpha_2)T}{a},p_0\right\}\leqslant p<1$，此时 $h(s)\mid_{s=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}}\geqslant 0$，即 $\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}\in[s_1,s_2]$，从而 $s\in\left[s_1,\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}\right]$．$E(s)=\frac{b^2p^2(s-1)^2\delta}{2(\delta-2aps)}$ 有且只有一个零点 $s=1$，且 $E(s)$ 是凸函数，故 $E(s)\geqslant 0$ 恒成立且 $E(s)$ 在 $s\in(-\infty,1]$ 上单调递减．故由 $s_1<\frac{(1+\alpha_2)T}{a}<s_2<1$ 可得

$$E(s)\mid_{s=s_1}=\frac{\delta(2a-b^2p+\sqrt{(2a+b^2p)^2-4\delta b^2})}{8b^2-8a(2a+b^2+\sqrt{(2a+b^2p)^2-4\delta b^2})}>E(s)\mid_{s=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}}=\frac{b^2p^2\delta}{2\delta-4T(\alpha_2+1)}\left(1-\frac{T(\alpha_2+1)}{ap}\right)^2$$

故当 $\max\left\{\frac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2},\frac{(1+\alpha_2)T}{a},p_0\right\}\leqslant p<1$ 时，$s=s_1$ 是问题(P1)的最优解．

ii) 若 $p<p_0$，即 $\max\left\{\frac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2},\frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}\leqslant p<p_0$ 此时 $h(s)\mid_{s=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}}<0$．以下对 $h(s)$ 对称轴 $s=s_0=\frac{1}{2}+\frac{a}{b^2p}$ 的位置进行讨论．令 $g(p)=(\frac{1}{2}+\frac{a}{b^2p})-\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$，整理得 $g(p)=\frac{1}{p}\left(\frac{a}{b^2}-\frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right)+\frac{1}{2}$，这是关于 p 的抛物线方程．令 $g(p)=0$，得 $p'=\frac{2b^2(1+\alpha_2)T-2a^2}{ab^2}$．

为了进一步讨论，先判断 p' 和 $p_0=\frac{a^2(\alpha_1-\alpha_2)+Tb^2(1+\alpha_2)^2}{ab^2(1+\alpha_2)}$ 的关系．

令 $\Delta p=p'-p_0=\frac{[-a^2+(1+\alpha_2)Tb^2](1+\alpha_2)-a^2(\alpha_1+1)}{ab^2(1+\alpha_2)}$．

a) 当 $\frac{a}{b^2}-\frac{(1+\alpha_2)T}{a}<0$，即 $a^2<(1+\alpha_2)Tb^2$ 时，$g(p)$ 单调递增．

令 $\Delta p<0$，即 $(1+\alpha_2)Tb^2\frac{1+\alpha_2}{2+\alpha_1+\alpha_2}<a^2<(1+\alpha_2)Tb^2$，此时 $p'<p_0$；当 $p>p'$ 时，$s_0>\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$，与情形②类似，此时不存在符合约束条件的最优解；当 $p<p'$ 时，$s_0<\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$，与情形①类似，$s\in[s_1,s_2]$，此时 $s=s_1$ 是问题(P1)的最优解．令 $\Delta p\geqslant 0$，即 $0<a^2\leqslant(1+\alpha_2)Tb^2\frac{1+\alpha_2}{2+\alpha_1+\alpha_2}$，此时 $p'\geqslant p_0$，则 $p<p'$ 恒成立，与情形①类似，$s\in[s_1,s_2]$，此时 $s=s_1$ 是问题(P1)最优解．故当 $\max\left\{\frac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2},\frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\}\leqslant p<\frac{2b^2(1+\alpha_2)T-2a^2}{ab^2}$ 且 $(1+\alpha_2)Tb^2\frac{1+\alpha_2}{2+\alpha_1+\alpha_2}<a^2<(1+\alpha_2)Tb^2$ 时，问题(P1)的最优解为 $s^*=s_1=\frac{(2a+pb^2)-\sqrt{(2a+pb^2)^2-4b^2\delta}}{2pb^2}$．

b) 当 $\frac{a}{b^2} - \frac{(1+\alpha_2)T}{a} > 0$，即$a^2 > (1+\alpha_2)Tb^2$ 时，$g(p)$ 单调递减.

由于 $-a^2 + (1+\alpha_2)Tb^2 < 0$,所以 $\Delta p < 0$，即 $p' < p_0$; 当 $p > p'$时，$s_0 < \frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$,与情形①类似,$s \in [s_1, s_2]$，此时 $s = s_1$ 是问题(P1) 的最优解; 当 $p < p'$时,$s_0 > \frac{(1+\alpha_2)T}{ap}$，与情形②类似，不存在符合约束条件的最优解.

故当 $\max\left\{\frac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2}, \frac{(1+\alpha_2)T}{a}, \frac{2b^2(1+\alpha_2)T-2a^2}{ab^2}\right\} \leqslant p < p_0$ 且 $a^2 > (1+\alpha_2)Tb^2$ 时，问题(P1) 的最优解为 $s^* = s_1 = \frac{(2a+pb^2) - \sqrt{(2a+pb^2)^2 - 4b^2\delta}}{2pb^2}$.

c) 当 $\frac{a}{b^2} - \frac{(1+\alpha_2)T}{a} = 0$ 时，$g(p) = \frac{1}{2}$，即 $\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{b^2 p}\right) - \frac{(1+\alpha_2)T}{ap} = \frac{1}{2}$，与情形②类似，不存在符合约束条件的最优解.

综合 a)、b)、c) 可得，当参数条件满足

$\max\left\{\frac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2}, \frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\} \leqslant p < \frac{2b^2(1+\alpha_2)T-2a^2}{ab^2}$ 且 $(1+\alpha_2)Tb^2 \frac{1+\alpha_2}{2+\alpha_1+\alpha_2} < a^2 < (1+\alpha_2)Tb^2$ 或 $\max\left\{\frac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2}, \frac{(1+\alpha_2)T}{a}, \frac{2b^2(1+\alpha_2)T-2a^2}{ab^2}\right\} \leqslant p < \frac{a^2(\alpha_1-\alpha_2) + Tb^2(1+\alpha_2)^2}{ab^2(1+\alpha_2)}$ 且$a^2 > (1+\alpha_2)Tb^2$ 时，问题(P1) 的最优解为 $s^* = s_1 = \frac{(2a+pb^2) - \sqrt{(2a+pb^2)^2 - 4b^2\delta}}{2pb^2}$.

当 $p_0 \geqslant 1$ 时，由于 $\max\left\{\frac{2b\sqrt{\delta}-2a}{b^2}, \frac{(1+\alpha_2)T}{a}\right\} \leqslant p < 1$，故不等式 $p < p_0$ 恒成立，则 $h(s)|_{s=\frac{(1+\alpha_2)T}{ap}} < 0$，分析思路与 $p_0 < 1$ 中情形 ii 类似，此处不再赘述.

综合以上分析，问题(P1) 的最优投资决策可归结为文中的命题 3.